KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-



# VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

-:- VAN 24 MEI 1907 -:-
TOT 30 NOVEMBER 1907

DEEL XVI
(1STE GEDEELTE)

JOHANNES MÜLLER :—: AMSTERDAM
: DECEMBER 1907 :

KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-

# VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

## VAN 24 MEI 1907 TOT 24 APRIL 1908

DEEL XVI

JOHANNES MÜLLER :—: AMSTERDAM
JUNI 1908

ERRATA.

In het verslag der vergadering van November 1907

Op pl. I behoorende bij de meded. van H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK (p. 411) zijn de cijfers I en II met elkander te verwisselen.

p. 420. Aan noot 1 voege men toe: In deze mededeeling is de weerstandsthermometer van meded. No. 95$^{c}$ (Juni '06), die $Pt_I$ genoemd is, gebruikt.

---

ERRATA.

p. 650 r. 14 v. b. *schrap*: bijna alle.

p. 650 r. 16 v. b. *staat*: alle, *lees*: bijna alle.

p. 650 r. 2 v. o. *staat*: l.c., *lees*: A. ERNST l.c.

p. 657 r. 9 v. o. *staat*: psendophylla, *lees*: pseudophylla.

LINGH ONNES, in het onderschrift van fig. 1 leze men: 1.71 mM. in 1, 3, 4 in pl. v. 1.71 mM. in 1, 2, 3, 4.

In de meded. van den Heer DE SITTER over de satellieten van Jupiter, (Verslag der vergadering van 28 Maart 1908) gelieve men de volgende verbeteringen aan te brengen:

Blz. 720: $log\ a_4 = 8{\cdot}0998360$

Blz. 726: de teekens $a_{21}$ en $a'_{21}$ moeten omgekeerd worden.

Ingekomen is:

1°. Bericht van de Heeren H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN en H. KAMERLINGH ONNES dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 16 Mei jl. waarbij bericht wordt dat H. M. de Koningin de benoeming bekrachtigd heeft van de Heeren Dr. W. BURCK, te Leiden en Dr. C. EYKMAN te Utrecht, tot gewone Leden en van de Heeren W. C. RÖNTGEN, hoogleeraar te München, H. E. J. G. DU BOIS, hoogleeraar te Berlijn, J. P. PAWLOW, hoogleeraar te St. Petersburg en EDM. B. WILSON, hoogleeraar te New-York tot buitenlandsche Leden.

3°. Brieven van de Heeren C. EYKMAN en H. E. J. G. DU BOIS waarbij zij onder dankzegging voor de hun verleende onderscheiding, hunne benoeming respectievelijk tot gewoon en tot buitenlandsch Lid aannemen.

4°. Schrijven van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 15 Mei jl., met verzoek het gevoelen der Afdeeling te vernemen over een door den Heer H. M. BERNELOT MOENS gedaan verzoek om ondersteuning voor wetenschappelijke onderzoekingen.

In handen gesteld van de Heeren EINTHOVEN, WEBER en ZWAARDEMAKER om advies.

5°. Schrijven van den Heer Prof. E. C. VAN LEERSUM te Leiden, waarbij dank betuigd wordt voor de medewerking door de Akademie verleend bij de inrichting van de geschiedkundige tentoonstelling van het Natuur- en Geneeskundig Congres.

Voor kennisgeving aangenomen.

6°. Missive van den Heer M. GANDILLOT ter begeleiding van drie Brochures, getiteld: „Théorie de la Musique".

Ter kennisneming voor de leden beschikbaar gesteld.

De aanwezige nieuw benoemde leden EYKMAN en DU BOIS worden binnengeleid en door den Voorzitter verwelkomd.

**Geophysica.** — De Heer LELY brengt het volgende verslag uit over een missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken, waarbij verzocht werd om bericht en raad betreffende een schrijven van den Belgischen Gezant waarbij de Nederlandsche Regeering wordt uitgenoodigd zich te doen vertegenwoordigen op een congres voor poolonderzoek in Mei 1908 te Brussel te houden.

Bij opdracht van den Voorzitter d. d. 19 April 1907 No 21 is ter fine van advies in onze handen gesteld het Renvooi d. d. 13 April 1907 door den heer Minister van Binnenlandsche Zaken aan de Natuurkundige afdeeling der Koninklijke Academie van Wetenschappen gezonden, met verzoek om bericht en raad, betreffende een schrijven van den Belgischen Gezant, waarbij de Nederlandsche Regeering wordt uitgenoodigd zich te doen vertegenwoordigen op een Congres voor poolonderzoek, dat in Mei 1908 te Brussel zal worden gehouden.

In voldoening aan die opdracht geven de ondergeteekenden in overweging het volgende te antwoorden:

dat de Afdeeling zoowel wegens de vele en belangrijke geophysische problemen, wier kennis door een wetenschappelijk onderzoek der poolstreken zonder twijfel belangrijk vermeerderd zal kunnen worden, als met het oog op het aandeel in vroegere jaren door Nederlandsche zeevaarders aan het poolonderzoek genomen niet aarzelt de Nederlandsche Regeering tot deelneming aan het Congres te adviseeren en daartoe in verband met art. 5 der Statuten ontworpen op het in September 1906 gehouden Congres twee effectieve en twee plaatsvervangende leden aan te wijzen bij voorkeur te kiezen uit personen die aan een poolexpeditie hebben deelgenomen.

(w. g.) C. LELY.
(w. g.) MAX WEBER.
(w. g.) J. P. VAN DER STOK.

26 April 1907.

De conclusie van het verslag wordt goedgekeurd.

**Palaeontologie.** — De Heer MOLENGRAAFF brengt ook namens den Heer MARTIN het volgende verslag uit over eene verhandeling van den Heer CLEMENT REID en Mrs. ELEANOR M. REID: *„The fossil flora of Tegelen sur Meuse, near Venloo, in the province of Limburg".*

De Verhandeling van den Heer CLÉMENT REID en Mrs. E. M. REID geeft in hoofdzaak eene zeer nauwkeurige beschrijving van de flora van de klei van Tegelen.

Met groote zorg werden uit een hoeveelheid van deze klei de plantenoverblijfselen, vooral zaden, verzameld, gepraepareerd en beschreven. Niet minder dan 70 soorten van planten werden gedetermineerd. Deze flora wordt door de schrijvers kritisch vergeleken met die der Cromer-Forest beds. Zij wijkt van laatstgenoemde flora in dezen zin af, dat zij op een warmer klimaat wijst, en wel zooveel warmer, dat het verschil niet door de geographische ligging van Tegelen, 1°. zuidelijker dan Cromer, kan worden verklaard. Het verschil is zoo groot, dat het ongeveer zou correspondeeren met een verschil in geographische ligging van 4° of 5°. Gelet op het feit dat in 't algemeen de plioceene afzettingen, die ouder zijn dan de Cromer-Forest beds, een fauna en flora bevatten, welke op een warmer klimaat wijzen dan heerschte gedurende de vorming dier lagen, komen de schrijvers tot het besluit, dat de klei van Tegelen tot een étage van het Plioceen ouder dan de Cromer-Forest beds moet behooren, in ouderdom wellicht overeenkomend met de Red Crag of misschien zelfs met het Scaldisien. De schrijvers verwerpen de meening, dat de klei van Tegelen interglaciaal (quartair) zou kunnen zijn.

Voorts wordt een lijst gegeven der soorten van visschen waarvan overblijfsels in de klei zijn gevonden. Deze werden door BULLEN NEWTON onderzocht, waarbij bleek dat zij allen tot soorten behooren, die thans nog in Nederland leven.

De Verhandeling gaat vergezeld van 127 photographische afbeeldingen van zaden.

Het geheele stuk geeft, door de groote nauwkeurigheid en de groote zorg die aan het verzamelen en bewerken van het delicate materiaal is besteed, een waardevolle vermeerdering van de kennis van de interessante flora van de klei van Tegelen, voor welke door de publicaties van DUBOIS groote belangstelling is gewekt. Om deze redenen hebben de ondergeteekenden de eer de Akademie te adviseeren de genoemde Verhandeling in haar publicaties op te nemen.

*Leiden,* / *'s Hage,* 23 Mei '09.

K. MARTIN.
G. A. F. MOLENGRAAFF.

De conclusie van het verslag wordt goedgekeurd.

**Dierkunde.** — De Heer VOSMAER biedt eene mededeeling aan van den Heer J. BOEKE: *„Over den bouw van de gangliencellen in het centraal zenuwstelsel van Branchiostoma lanceolatum."* (1ste mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer L. BOLK).

(Aangeboden in de vergadering van 26 April 1907).

De in de laatste jaren gepubliceerde methoden van RAMON Y CAJAL, VAN DONAGGIO en vooral van BIELSCHOWSKY hebben ons in staat gesteld den bouw der gangliencellen ook van de hoogere dieren (spec. de vertebraten) met meer succes te bestudeeren dan dit vroeger mogelijk was. In verband met de vroeger door mij in deze verslagen gepubliceerde uitkomsten van het onderzoek naar den bouw der gangliencellen van Amphioxus met behulp van de goudchloridmethode van APATHY[1]), scheen het mij wenschelijk toe, eveneens hier te berichten over de uitkomsten, nu over ditzelfde onderwerp met de bovengenoemde methoden verkregen, daar deze mijne vroegere opgaven in verscheidene punten uitbreiden. In tegenstelling met wat EDINGER[2]) de eenige onderzoeker, die de nieuwere methoden op het centraalzenuwstelsel van Amphioxus toepaste, aangeeft, n.l. dat de methoden tot kleuring van de neurofibrillen voor de gangliencellen zelf tot weinig resultaten leiden, gelukte het met de voortreffelijke methode van BIELSCHOWSKY—POLLACK in talrijke cellen van het centraalzenuwstelsel de neurofibrillen scherp en electief te kleuren ook *in* het cellichaam. Praeparaten met een mengsel van platinchloride-osmium-azijnzuur en sublimaat[3]) gefixeerd, en op dunne doorsneden met ijzerhaematoxyline volgens HEIDENHAIN gekleurd, dienden ter contrôle, en voor het bestudeeren van den fijneren bouw van het protoplasma der gangliencellen tusschen en om de neurofibrillen.

Daar over het algemeen de verschillende cellen een gelijksoortig beeld gaven, wil ik slechts enkele celvormen hier bespreken.

1. De op regelmatige afstanden van elkaar ongeveer in de mediaanlijn van het ruggemerg verspreid liggende zeer groote zenuwcellen („Kolossalzellen") bezitten, zooals bekend is, een dik ascylinderuitsteeksel, dat na een grooten boog beschreven te hebben, in een der in de lengterichting van het zenuwstelsel loopende kolossaalvezels over-

---

1) Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. zitting van 25 Oct. 1902.

2) Anat. Anzeiger, Bd. 28, No. 17, 18, 24 April 1905.

3) Volgens Dr. LEGROS de beste fixatie-methode voor Amphioxus. Voor het centraal zenuwstelsel kan ik dit volkomen beamen. Zij geeft hierbij betere uitkomsten dan eenige andere methode.

gaat, en tal van op verschillende plaatsen uit het cellichaam ontspringende dendrieten. Doorsneden van deze cellen, volgens de methode van Bielschowsky gekleurd, vertoonen nu een zeer duidelijk beeld der neurofibrillenstructuur. In eene doorsnede, waarin slechts de dendrieten getroffen zijn, en niet de ascylinder met zijn cône d'entrance (waarover later meer), vertoonen deze cellen het beeld van fig. 1.

De cel is omgeven door een glieuze kapsel, uit fijne met elkaar vervlochten fibrillen bestaande. Tengevolge van de formolfixatie is doorgaans de cel iets geschrompeld, en derhalve de pericellulaire ruimte grooter dan zij in het normale leven is, of in goed gefixeerde preparaten zich vertoont. In het cellichaam is een zeer regelmatig en duidelijk netwerk van overal met elkaar anastomoseerende neurofibrillen zichtbaar. De mazen zijn regelmatig, rond of veelhoekig, nagenoeg gelijk van grootte. Slechts vertoont het netwerk eene iets onder de peripherie gelegen zône, waar de mazen iets nauwer zijn, en de fibrillen, die het netwerk vormen, iets dikker. Van uit dit gedeelte zijn enkele dikkere neurofibrillen naar de streek rondom de kern te vervolgen. De kern zelf is in deze preparaten niet gekleurd, doch slechts als ongekleurde vlek in het netwerk van neurofibrillen te zien. Daar waar een dikke uitlooper (dendriet) uit de cel ontspringt, zijn de mazen van het netwerk lang gestrekt in de richting van den uitlooper (fig. 1, 4*b*). In de uitloopers zelf kan men het met elkaar anastomoseeren van de fibrillen tot op vrij grooten afstand van de cel duidelijk vervolgen, tenminste in de dendrieten. Fig. 1 stelt slechts een schijfje van 7 $\mu$ dikte uit het cellichaam voor. In nog drie verdere doorsneden kon ik in de uitloopers, waarvan de oorsprong in fig. 1 zichtbaar is, de anastomosen der neurofibrillen waarnemen. In fig. 2 heb ik een tot een dergelijke reuzencel behoorenden dikken dendriet afgebeeld daar, waar zij zich vertakt. Men ziet de netten der neurofibrillen, enkele dikkere fibrillen en het samenhangen van het netwerk der beide uitloopers op de vertakkingsplaats. In de dunnere uitloopers (dendrieten) schijnen de neurofibrillen al spoediger na het verlaten van het cellichaam van elkaar onafhankelijk te worden (fig. 1 bij *b*). Hetzelfde ziet men in de kleinere gangliencellen (fig. 4*b*, fig. 6).

De ascylinder van de reuzencellen bezit een iets andere structuur. Zooals ik reeds vroeger beschreef[1]), bestaan de kolossaal-zenuwvezels uit een bundel los naast elkaar loopende, uiterst dunne en fijne fibrillen, die in goed gefixeerde preparaten de geheele ruimte gelijk-

[1]) Versl. Kon. Akad. van Wetensch. Zitting van 25 Oct. 1902.

matig opvullen. Daar waar de ascylinder in de cel treedt, kan men dezen bundel fijnste fibrillen nog een eindweegs in de cel vervolgen. Zij schijnt zich dan steeds in een boog om de kern heen te begeven, en lost zich dan langzamerhand in het grovere netwerk der neurofibrillen, dat boven beschreven werd, op.

Ook de middelgroote en kleine gangliencellen van Branchiostoma, zooals die, welke in fig. 4, 5 en 6 bij dezelfde vergrooting als de reuzencel van fig. 1 werden geteekend, geven nu met de methode van Bielschowsky hetzelfde beeld, n.l. een regelmatig netwerk van neurofibrillen, de mazen langgestrekter daar, waar zij in de uitloopers overgaan, rond of veelhoekig in het midden van de cel. Slechts mist men hier de zône vlak onder de oppervlakte van de cel, met dichtere mazen en iets dikkere neurofibrillen; het netwerk is overal vrij gelijkmatig. In fig. 4*a* en 4*b* zijn twee op elkaar volgende doorsneden door dezelfde middelgroote ganglieneel geteekend. In fig. 4*a* ziet men de kern doorschemeren, en boven die kern een duidelijk gelijkmatig netwerk, dat juist hier, waar slechts ééne laag er van getroffen is, zeer duidelijk in zijn werkelijken vorm kan worden bestudeerd. Deze doorsnede loopt ongeveer door het midden van de cel. Fig. 4*b* vertoont het randgedeelte van dezelfde cel. De mazen zijn hier duidelijk anders van vorm, langgestrekt in de richting van den uitlooper, terwijl enkele fibrillen zich door hun grootere dikte en donkere tint van de andere onderscheiden. Ook deze fibrillen echter nemen deel aan de vorming van het netwerk; zij zijn het vooral, die in den uitlooper overgaan. In den uitlooper zelf schijnen, in overeenstemming met hetgeen boven werd gezegd, de fibrillen naast elkaar te loopen, zonder anastomosen te vormen. Hetzelfde is in fig. 6 te zien. Ook in de kleinste gangliencellen, zooals er bijv. een in fig. 5 (bij dezelfde vergrooting als de andere cellen) is afgebeeld, is het netwerk van neurofibrillen duidelijk zichtbaar, en de mazen blijken hier ongeveer even groot te zijn als in de grootere gangliencellen; zij zijn dan natuurlijk in veel geringer aantal voorhanden.

Cellen, spoelvormig van gedaante, waar de neurofibrillen eenvoudig recht door loopen, zonder met elkaar te anastomoseeren, zooals ik ze vroeger beschreef, vond ik in de praeparaten volgens de methode van Bielschowsky gekleurd, niet. Overal, waar de neurofibrillen zichtbaar waren, vertoonden zij een netwerk. In de preparaten, volgens de goudchloridmethode behandeld, die ik er nog eens op onderzocht, waren zij evenwel volkomen duidelijk, doch kwamen zeldzaam voor.

Wij vinden dus bijna overal in de cellen een netwerk van neuro-

fibrillen met regelmatige mazen. In volwassen dieren zijn de mazen in de verschillende cellen niet sterk uiteenloopend van grootte. Onderzoekt men echter dezelfde cellen (bijv. de reuzencellen) bij veel kleinere dieren, dan vindt men hier zeer veel fijnere mazen. Men vergelijke bijvoorbeeld fig. 1, van een volwassen dier van 48 mM. lengte, met fig. 3, een analoge cel van een dier van 6 mM. lengte. Bij die kleine dieren, die reeds de metamorphose achter den rug hebben, en bijna geheel zijn georganiseerd als de groote dieren, schijnt zich dus het netwerk der neurofibrillen reeds in zijn definitieve gestalte te hebben gevormd, en bij den verderen groei der cellen slechts in grootte toe te nemen, doch niet samengestelder te worden.

Bij het volwassen dier zijn echter de mazen bij verschillende exemplaren steeds van dezelfde orde.

Vergelijken wij dit beeld met dat, door verschillende schrijvers bij andere dieren beschreven, dan zou ik hier vooral de beschrijving van APATHY voor Hirudineae en Vermes, die van BOCHENEK voor Helix, die van DONAGGIO, CAJAL, MICHOTTE, LEGENDRE en de reeks van auteurs, die met de nieuwere histologische methoden de gangliencellen der hoogere vertebraten hebben bestudeerd, ter vergelijking willen aanvoeren. Tusschen deze beelden neemt dat, wat wij bij Amphioxus zien, juist die plaats in, die het dier in het systeem inneemt. Hoe hooger georganiseerd het dier is, hoe fijner bewerktuigd de gangliencellen zijn, des te fijner wordt het netwerk der neurofibrillen, terwijl het karakter hetzelfde blijft. In fig. 7 teekende ik het beeld van de neurofibrillen in een zintuigcel van Pontobdella, volgens de naverguldingsmethode van APATHY gekleurd, bij dezelfde vergrooting als de overige figuren. Trouwens, de beelden door APATHY zelf verkregen, zijn overbekend. Zij geven altijd hetzelfde. Een zeer grofmazig netwerk om de kern, radiair daaruit voortkomende neurofibrillen, aan de peripherie wederom een grofmazig netwerk. De gangliencellen van Helix geven reeds een veel dichter netwerk van fibrillen te zien (BOCHENEK l. c.) De mazen hiervan zijn echter veel grover dan die welke bij Amphioxus werden gevonden; de mazen in de gangliencellen van dit laatste dier zijn op hun beurt weer grover, dan die welke in goed gelukte praeparaten van de gangliencellen van hoogere vertebraten (bijv. in de voortreffelijke figuren van DONAGGIO) te zien zijn (c.f. BOCHENEK). Hoe hooger het dier georganiseerd is, des te fijner en regelmatiger schijnt het netwerk der neurofibrillen te worden in de gangliencellen.

Met het reticulum van het protoplasma der gangliencellen hebben deze neurofibrillen niets te maken. Fixeert men praeparaten met HERMANN'sche vloeistof en sublimaat en kleurt ze met ijzerhaema-

toxyline volgens HEIDENHAIN, dan verkrijgt met het beeld van een uiterst fijnkorrelig, hier en daar fijn fibrillair protoplasma, met in het centrum van vele cellen eigenaardige differentiaties, die aan de door HEIDENHAIN beschreven pseudochromosomen, en de ringen, in de gangliencellen van hoogere dieren (Teleostei, Rana) beschreven, doen denken. Het zou ons te ver voeren, deze details hier uitvoeriger te beschrijven.

2. Bij één vorm van gangliencellen vinden wij een volkomen van dit beeld afwijkenden vorm, n.l. bij de gangliencellen, die de groote groep, welke dorsaal in het voorste gedeelte van het ruggemerg vlak achter de verwijding van den hersenventrikel ligt, de zoogenaamde oblongata der auteurs, samenstellen. Het is kenmerkend voor de technische moeilijkheden, die bij het onderzoek naar de histologie van het zenuwstelsel van Branchiostoma te overwinnen zijn, dat van het groote aantal onderzoekers, die zich hiermede hebben beziggehouden, slechts JOSEPH [1]) eene beschrijving geeft van de straks nader te bespreken eigenaardige structuur dezer cellen, terwijl HEYMANS en VAN DER STRICHT in hunne uiterst uitvoerige verhandeling over de histologie van het zenuwstelsel van Amphioxus van 1898 slechts in één figuur in twee cellen eene aanduiding er van teekenen, zonder er in den tekst iets over te zeggen. JOSEPH nu beschrijft aan deze cellen een fijn gestreepte staafjeszoom, aan de naar de oppervlakte van het dier gerichte zijde van de cel, en onder die staafjes een fijne korreling van het protoplasma. Juist dezelfde stuctuur vond JOSEPH aan de door HESSE als oogcellen opgevatte, langs het centraalkanaal segmentaal door het geheele ruggemerg heen gerangschikte, cellen. Op grond hiervan schrijft JOSEPH ook aan deze dorsale groep van cellen een gezichtsfunctie, of liever een lichtpercipiëerend vermogen toe.

Hierop valt nu wel iets af te dingen. Den bouw der oogcellen heb ik reeds vroeger uitvoerig beschreven [2]), ik zal derhalve thans daarop niet terugkomen, en slechts vermelden, dat ook in de best gefixeerde preparaten nog altijd een groot onderscheid in structuur tusschen de beide celvormen valt waar te nemen. Ook de kernen, waarin JOSEPH in beide celvormen een van de gewone ganglicncel-kernen afwijkende korrelige structuur vond, vertoonen verschillen, die trouwens overal in de kernen der overige gangliencellen hunne overgangen vinden. Het groote verschil tusschen beide celvormen evenwel ligt, afgezien van het ontbreken van den pigmentbeker bij de dorsale cellen, vooral in den vorm en in de eigenaardige bekleeding der celopper-

[1]) H. JOSEPH: Ueber einige Zellstructuren im Zentralnervensystem von Amphioxus Verh. d. Anatom. Gesellschaft. Jena 1904. pag. 16—26.

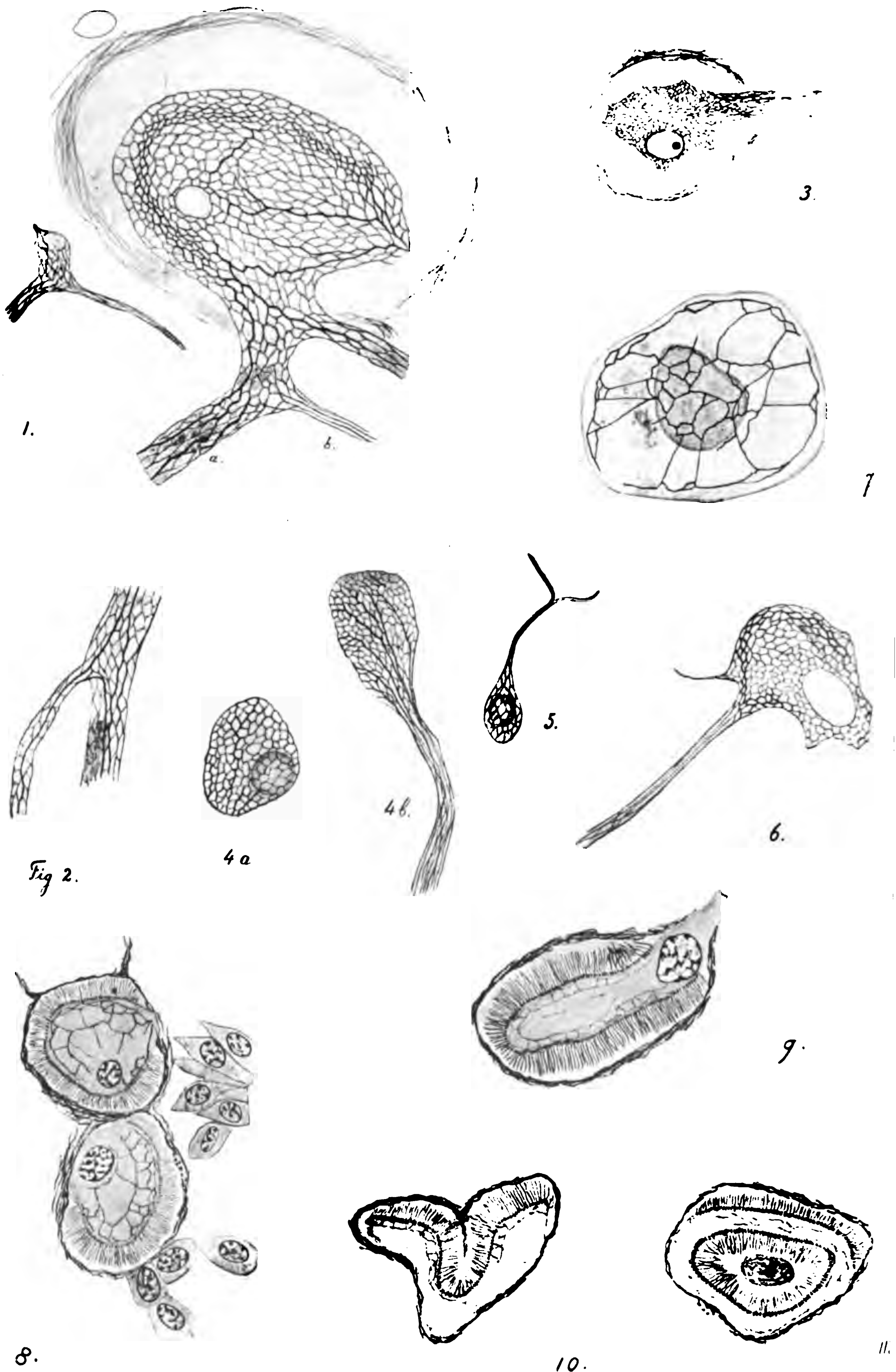
[2]) l. c. 1902 pag. 507.

vlakte. De lichtcellen langs het centraalkanaal vertoonen werkelijk korte staafjes aan de oppervlakte, regelmatig onder den pigmentkap gerangschikt. De groote dorsale cellen vertoonen niet een staafjeszoom, doch hunne oppervlakte schijnt, zooals uit fig. 8—11 blijkt, bezet te zijn met fijne, iets of wat golvend verloopende, vrij lange haren, die ik het best met trilharen zou kunnen vergelijken. De cellen vertoonen een vrij regelmatigen, soms echter grillig ingebochten vorm [1]) (fig. 10, 11), meestal rondachtig, ook wel zeer langgestrekt van gedaante (fig. 9), terwijl dikwijls, als men de cellen uit de dunne doorsneden reconstrueert, de oogenschijnlijk grillige vorm eene scheve doorsnede door een uiterst typische bekervormige cel blijkt te zijn, zooals in fig. 10 in eene mediane doorsnede, in fig. 11 in eene loodrecht op de as van den beker gerichte doorsnede te zien is. Zij zijn omgeven door een uit eigenaardig kluwenvormig met elkaar vervlochten draden bestaand korfje (in de figuren donker geteekend), en vullen de ruimte door dit korfje open gelaten, overal zóó op, dat tusschen de oppervlakte van de cel en het korfje een nagenoeg overal even breede ruimte overblijft, die juist wordt ingenomen door de fijne haartjes op de oppervlakte van de cellen. Daar waar de celoppervlakte geen haartjes draagt, ligt zij ook direct tegen het korfje aan (fig. 8, 10, 11). Het is onjuist, dat, zooals Joseph meent, deze haartjes alleen aan de naar buiten gekeerde zijde van de cel zouden voorkomen; vergelijkt men de beelden van dwars- en lengtesneden (vooral horizontaalcoupes) nauwkeurig met elkaar, dan blijken zij aan alle zijden, behalve daar waar de cellen uitloopers door het korfje heen zenden, met haartjes bezet te kunnen zijn. Ook daar waar het cellichaam, is ingebocht (fig. 10), bekervormig, is dikwijls aan de beide zijden van de inbochting de bekleeding met de haartjes te zien. Deze zijn dan van elkaar gescheiden door de in de inbochting ingegroeide vervlochten draden van het korfje. Heeft men de cel zoo getroffen, dat de richting van de doorsnede loodrecht op de inbochting staat, dan verkrijgt men somtijds het beeld van een ring, aan beide zijden met haartjes bekleed, en in zijne holte een vervlochten kluwen (het doorsneden korfje) omvattend (fig. 11).

In het lichaam van deze cellen is een regelmatig gebouwd net van neurofibrillen te zien, dat zich door veel grootere mazen van de boven beschreven netten in de andere ganglicncellen onderscheidt (men vergelijke fig. 8—10 met fig. 1—6); slechts aan de peripherie,

[1]) Slechts die cellen worden hier beschreven, die in alle opzichten volkomen goed gefixeerd schenen te zijn. Al die cellen, waarbij de onregelmatige vorm door slechte fixatie scheen te zijn veroorzaakt, heb ik buiten beschouwing gelaten.

**J. BOEKE. Over den bouw van de gangliencellen in het centraal zenuwstelsel van Branchiostoma lanceolatum. (1ste mededeeling).**



onder de fijne haartjes, is een dichter netwerk van neurofibrillen te zien. De haartjes zelf zijn als het ware ingeplant op een korrelig of uit fijne staafjes opgebouwde periphere protoplasmalaag, waarvan de fijnere structuur moeilijk te zien is. Alleen daar waar de oppervlakte van de cel met de haartjes is bezet, vertoont zich deze structuur in het oppervlakkige protoplasma.

Uit dit alles schijnt mij nu in de eerste plaats de slotsom getrokken te moeten worden, dat een lichtpercipiëerende functie waarschijnlijk niet door deze cellen wordt uitgeoefend. De grillige vorm, de eigenaardigheden der structuur wijzen hier in geenen deele op. Dat men hier met cellen te doen heeft, die eene speciale functie uitoefenen, schijnt mij daarentegen wel zeker. Men zou kunnen denken aan een statisch orgaan, en beelden als fig. 11 doen ons wel in de eerste plaats aan een dergelijke functie denken. De eigenaardige korfjes om de cellen brengen ons daarbij de PURKINJE'sche cellen der cranioten in de gedachte, de bekleeding binnen deze korfjes met de fijne haartjes schijnen te wijzen op een statische functie. Bij den tegenwoordigen stand van zaken is het echter verstandiger, bij deze algemeene vermoedens te blijven en geene gewaagde hypothesen op te bouwen. JOSEPH schijnt mij in elk geval met de zijne niet de waarheid getroffen te hebben.

*Leiden*, 25 April '07.

VERKLARING DER FIGUREN.

Alle figuren zijn bij eene vergrooting van 1600 met behulp van de camera van ABBE, onder een Apochr. olie-immersie van ZEISS van 1.30 apertuur en een compensatie-oculair No. 8 geteekend.

Fig. 1. Reuzencel met neurofibrillennet van Branchiostoma van 4.8 cM. lengte, daarnaast een kleinere gangliencel (methode BIELSCHOWSKY—POLLACK).

„ 2. Dendrieten van een dergelijke reuzencel, van een dier van 5 cM. lengte.

„ 3. Neurofibrillennetwerk van een reuzencel van een Branchiostoma van 6 mM. lengte.

„ 4 *a* en *b*. Doorsneden door een middelgroote gangliencel uit hetzelfde ruggemerg als fig. 2.

„ 5. Doorsnede van een kleine gangliencel, met neurofibrillennetwerk.

„ 6. Hetzelfde als fig. 4.

„ 7. Doorsnede van een zintuigcel van Pontobdella, volgens de methode van APATHY met goudchloride gekleurd.

„ 8–11. Doorsneden door gangliencellen uit de dorsale groep van cellen (oblongata) van het ruggemerg van volwassen exemplaren van Branchiostoma. In fig. 8 zijn de kernen der aangrenzende cellen (aan den kant van het centraalkanaal) mede in de figuur geteekend, om de overeenstemming in kernstructuur van de verschillende cellen te demonstreeren.

In fig. 10 en 11 zijn twee typische doorsneden door bekervormige cellen van dezelfde dorsale celgroep geteekend. Het in de holte van fig. 11 bevatte lichaam is de voortzetting van het de cel omgevende glia-korfje.

**Natuurkunde.** — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan: „*Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels.* IV."

Vervolg van bladz. 939. Dl. XV.

DE BINODALE LIJN.

Wij zouden kunnen meenen ter bepaling van de binodale lijn den volgenden weg te kunnen inslaan. Voor coëxistentie is noodig, dat behalve de temperatuur nog 3 grootheden gelijk zijn, n.l. $p$, $q$ en $M_1\mu_1$. Teekenen wij nu ook de lijnen, waarop $M_1\mu_1$ gelijk is, dan zouden wij om een punt eener binodale lijn te vinden de punten hebben te zoeken, die aan den eisch beantwoorden, dat de $p$, $q$ en $M_1\mu_1$ lijnen, welke door dat punt gaan, elkander nog in een ander punt van het veld snijden. Dat zoeken zou echter uiterst lastig zijn en tot weinig overzichtelijke gevolgen leiden. Wij zullen dan ook dien weg niet inslaan. Toch wil ik vooraf enkele opmerkingen maken over den loop van die derde groep van lijnen. Het is toch volstrekt niet van belang ontbloot om te weten, in welke phasen van een binair stelsel de molekulaire potentiaal van een der beide bestanddeelen even groot is; wij zullen die derde groep van lijnen „potentiaallijnen" noemen.

DE POTENTIAALLIJNEN.

De waarde van $M_1\mu_1$ is gelijk aan $\psi - v\frac{d\psi}{dv} - x\frac{d\psi}{dx}$; door differentiatie vinden wij:

$$d\,M_1\mu_1 = -\,v\,d\frac{d\psi}{dv} - x\,d\frac{d\psi}{dx}$$

of

$$d\,M_1\mu_1 = v\,dp - x\,dq.$$

Willen wij weten hoe een potentiaallijn loopt, dan zullen wij $\frac{dv}{dx}$ voor zulk een lijn moeten kennen, welke grootheid wij door het teeken $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{Pot}$ zullen voorstellen. Voor de waarde dezer grootheid vinden wij dan de uitdrukking:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{Pot} = -\frac{v\frac{d^2\psi}{dx\,dv} + x\frac{d^2\psi}{dx^2}}{v\frac{d^2\psi}{dv^2} + x\frac{d^2\psi}{dx\,dv}},$$

wat ook geschreven kan worden:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{Pot} = \frac{dv}{dx_p} \cdot \frac{\frac{v}{x} - \frac{dv}{dx_q}}{\frac{v}{x} - \frac{dv}{dx_p}}.$$

Er is dus een meetkundige plaats, in welker punten $\left(\frac{dx}{dv}\right)_{Pot} = \infty$ en een andere in welker punten $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{Pot} = 0$ is. Het eerste grijpt plaats als $\frac{v}{x} = \frac{dv}{dx_p}$ is d. w. z. deze meetkundige plaats is de reeks van punten, waarin lijnen uit den oorsprong getrokken de $p$-lijnen raken. Daarentegen is $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{Pot} = 0$ als $\frac{v}{x} = \frac{dv}{dx_q}$; voor de punten der spinodale lijn, waarin $\frac{dv}{dx_p} = \frac{dv}{dx_q}$ is, is ook $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{Pot}$ aan $\frac{dv}{dx_p}$ gelijk.

De gedaante der meetkundige plaats $v = x\left(\frac{dv}{dx}\right)_p$ is verschillend, al naar gelang de $p$-lijnen den loop hebben, zooals in de linkerstrook der algemeene $p$-figuur het geval is, of zooals in de middenstrook, of de rechterstrook het geval is. Daar de loop der $p$-lijnen door de temperatuur gewijzigd wordt, zal dus oök de waarde van $T$ invloed uitoefenen op deze gedaante.

Stellen wij eerst een linkerstrook bij een waarde van $T$ beneden $T_{k_1}$ en ook beneden $T_{k_2}$. Dan kunnen er aan alle $p$-lijnen van uit den oorsprong raaklijnen getrokken worden. De raakpunten aan den kant der kleine volumes vormen dan een continue reeks van punten, welke aanvangt in het punt, waarin de vloeistoftak der kromme $\frac{dp}{dv} = 0$ de 1ste as snijdt, en zich meer en meer van die kromme verwijdert, naarmate de 2de as genaderd wordt, steeds blijvende bij kleinere volumes, dan die der genoemde kromme. De raakpunten aan den kant der groote volumes vormen eveneens een continue reeks van punten, welke aanvangt in het punt, waarin de damptak der kromme $\frac{dp}{dv} = 0$ de 1ste as snijdt, en zich eveneens meer en meer verwijdert van deze kromme naarmate de 2de as genaderd wordt. Deze reeks van punten heeft steeds grooter volume dan de kromme $\frac{dp}{dv} = 0$. Als een potentiaallijn door zulk een reeks van punten gaat is zij dus gericht evenwijdig aan de $V$-as. De meet-

kundige plaats van de punten, waarin een potentiaallijn evenwijdig aan de $X$-as loopt, en welke gevonden wordt door raaklijnen van uit den oorsprong aan de $q$-lijnen te trekken, is een uit een enkele tak bestaande kromme, welke bij klein volume van uit zeker punt van de 1[ste] as het veld oversteekt naar het punt $v = b$ en $x = 1$. Maar de gedaante dezer kromme is zeer verschillend, afhankelijk van de meer of minder gecompliceerde gedaante der $q$-lijnen. Wij zullen, zonder verdere details na te gaan, alleen opmerken, dat als $q$-lijnen loopen zooals het geval is bij afwezigheid van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, deze kromme geen punt gemeen heeft met de vorige; maar is $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ aanwezig en snijdt zij $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$, dan loopt de kromme, waarop $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{Pot} = 0$ is, om $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ heen en snijdt zij de lijn, waarop $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{Pot} = \infty$ tweemalen. Deze twee snijpunten zijn weer voor den loop der potentiaallijnen gewichtig. Door een van deze twee punten loopt dan weder een strikpotentiaallijn. In dit geval is het strikpunt het rechtsgelegen snijpunt, en het linksgelegen snijpunt fungeert dan weder als dubbelpunt, waaromheen een reeks van potentiaallijnen, in gesloten figuren loopen. Dat in dit geval het rechtsgelegen punt het strikpunt is, hangt daarmede samen, dat alle potentiaallijnen eindigen in het punt $v = b$ en $x = 1$. Op de lijn $v = b$ is $M_1\mu_1$ oneindig groot, en op de tweede as is $M_1\mu_1$ gelijk negatief oneindig. In het punt $v = b$ en $x = 1$ moet de waarde der potentiaal voor den eersten component dus onbepaald zijn. Bij de aankomst in dat punt loopen alle potentiaallijnen rakende aan de lijn $v = b$. In fig. 15 is de loop der potentiaallijnen, voor dit geval van nietmengbaarheid in den vloeistoftoestand, schematisch voorgesteld. De eerste as wordt door de potentiaallijnen van elken graad gesneden of geraakt. Bij $v = \infty$ is $M_1\mu_1 = -\infty$. Neemt $v$ af, dan neemt $M_1\mu_1$ toe, tot in het punt van maximumdruk $\left(\frac{dp}{dv} = 0\right)$ de potentiaal een hoogste waarde bereikt. Bij verdere verkleining van $v$ neemt de potentiaal af, en wel tot het eindpunt van den labielen toestand bereikt wordt, waar $\frac{dp}{dv}$ weder gelijk 0 is. Daar is $M_1\mu_1$ minimaal. Is het punt $v = b$ bereikt, dan is $M_1\mu_1 = \infty$. Bij zeer groot volume is $M_1\mu_1$ approximatief gelijk aan $MRT \log \frac{1-x}{v}$

waarbij ook weggelaten is een functie van $T$, die bij de constructie van het $\psi$-vlak voor bepaalde waarde van $T$ gewoonlijk weggelaten kan worden; uit dezen vorm voor $M_1\mu_1$ ziet men dat de stukken der potentiaallijnen, welke bij groot volume van de 1ste as uitgaan, nagenoeg als rechte lijnen mogen worden beschouwd, die gericht zijn naar het punt $x = 1$ en $v = 0$. Gaat de potentiaallijn uit van het volume $v_1$ dan is de vergelijking van de beginstukken $v = v_1 (1 - x)$. Mocht $v_1 = \infty$ zijn, en dus $M_1\mu_1 = -\infty$ dan is voor elke waarde

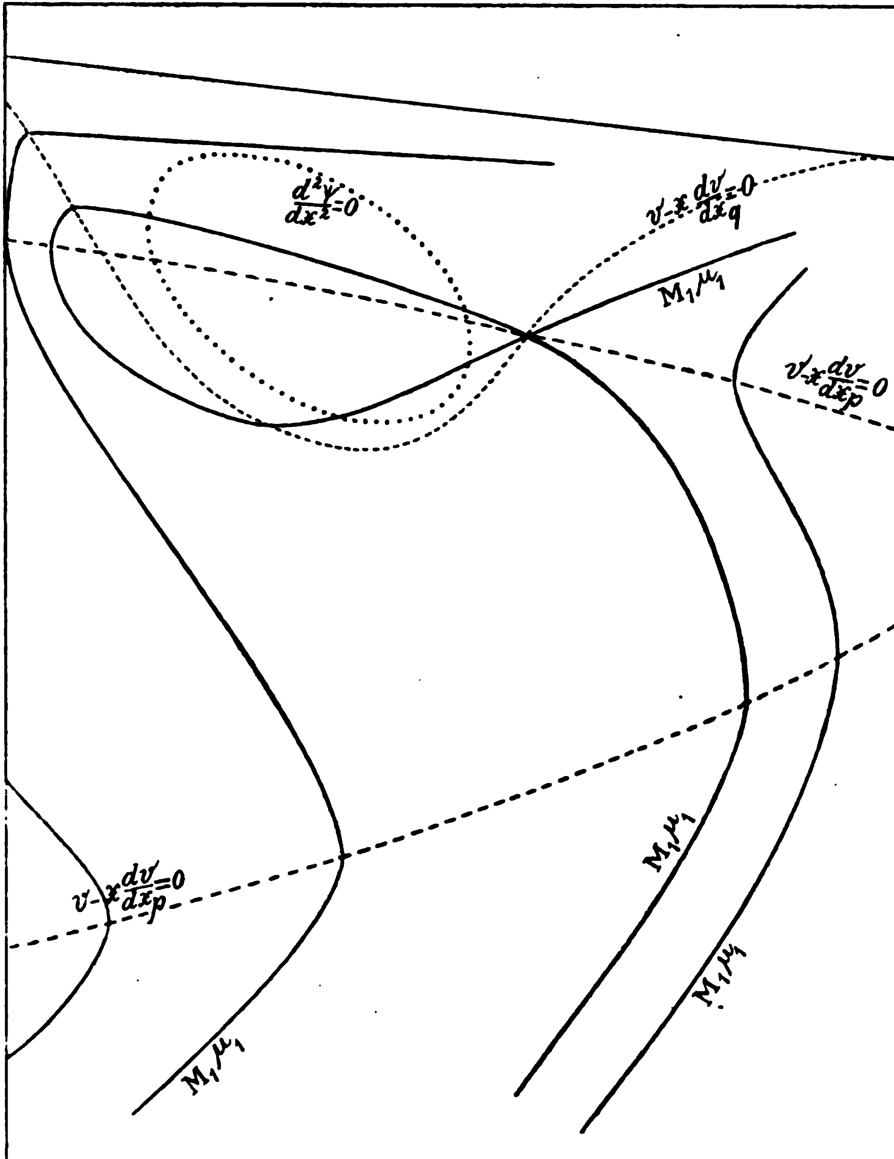



Fig. 15.

van $x$ bij $v = \infty$ de waarde van $M_1 \mu_1$ negatief oneindig, wat zij ook is langs de geheele tweede as. De regel, dat bij zeer groot volume de beginstukken der potentiaallijnen als rechte lijnen mogen worden beschouwd, volgt reeds uit den Dalton'schen regel, dat elk der bestanddeelen in een mengsel van gassen zich gedraagt, alsof het alleen in het volume aanwezig is. Is $v = v_1 (1 - x)$ dan is de densiteit van den eersten component even groot, en zijn de grootheden, die door de densiteit bepaald worden, dezelfde; bijv. druk en de potentiaal. Zijn de omstandigheden zooals in fig. 15 ondersteld is, dan is er natuurlijk ook een meetkundige plaats waar $\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)_{M_1 \mu_1} = 0$ is, welke ook weder een striklijn is die door het strikpunt der potentiaallijnen gaat. Snijdt de meetkundige plaats $v - x \frac{dv}{dx_q} = 0$ de andere $v - x \frac{dv}{dx_p}$ niet, dan hebben al de potentiaallijnen de eenvoudige gedaante welke zij in fig. 15 aan de linkerzijde en aan den rechterkant hebben.

Stellen wij een linkerstrook bij een waarde van $T$ boven $T_{k_2}$, dan ondergaat de meetkundige plaats $v - x \frac{dv}{dx_p} = 0$ een wijziging. Dan zijn de twee takken van $\frac{dp}{dv} = 0$ samengevloeid, en evenzoo zullen de twee takken dezer meetkundige plaats samenvloeien; maar daar zij beide buiten $\frac{dp}{dv} = 0$ liggen, zal het samenvloeiingspunt bij grooter $x$ liggen dan het samenvloeiingspunt der takken van $\frac{dp}{dv} = 0$. Dat samenvloeien moet dan plaats hebben in een buigpunt van een $p$-lijn, gelijk men onmiddellijk inziet als men in een $p$-figuur bij de genoemde omstandigheden de raaklijnen van uit den oorsprong trekt, waarbij ook blijkt dat het raakpunt dan op een $p$-lijn ligt van maximum waarde. Het genoemde samenvloeiingspunt is dus een punt, waarin de raaklijn van een $p$-lijn in haar buigpunt door den oorsprong gaat. Uit de differentiaalvergelijking van $v - x \frac{dv}{dx_p} = 0$, als men $v$ als functie van $x$ en $p$ denkt, volgt dan ook voor deze meetkundige plaats:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{x \frac{d^2 v}{dx^2_p}}{\frac{dv}{dp_x} - x \frac{d^2 v}{dp dx}}.$$

De potentiaallijnen van lagen graad hebben dan de punten, waarin zij vertikaal gericht zijn, verloren en hebben dan een zeer eenvoudige gedaante. Zij loopen niet meer bij het kleiner worden van het volume naar kleinere waarde van $x$ terug.

Kiezen wij in de tweede plaats een strook uit het midden, waar de twee snijpunten van $\frac{dp}{dx} = 0$ en $\frac{dp}{dv} = 0$ aanwezig zijn. Al blijven dan de twee takken van $\frac{dp}{dv} = 0$ geheel gescheiden, dan is dit nog niet het geval met de twee takken van $v - x\frac{dv}{dx_p} = 0$. Het is gemakkelijk in te zien, dat de bovenste tak dan alleen maar boven $\frac{dp}{dv} = 0$ ligt van $x = 0$ af tot in het strikpunt der $p$-lijnen. Bij grooter waarde van $x$ ligt zij er beneden. Evenzoo ligt de benedenste tak van $v - x\frac{dv}{dx_p} = 0$ alleen van $x = 0$ tot $x$ van het dubbelpunt beneden $\frac{dp}{dv} = 0$. Deze benedenste tak gaat door het dubbelpunt, en ligt bij grootere waarde van $x$ boven $\frac{dp}{dv} = 0$. Beide takken vloeien samen zoodra er een $p$-lijn te vinden is, waarbij in het buigpunt de raaklijn door den oorsprong gericht is. Is bij de minimum kritische temperatuur de lijn $\frac{dp}{dv} = 0$ voorzien van een splitsingspunt, dan beperkt de kromme $v - x\frac{dv}{dx_p} = 0$ zich tot het linker gedeelte, en is gesloten bij kleinere waarde van $x$, dan die van het splitsingspunt. Strekt de strook zich echter ver rechts uit, dan kan ook het rechter gedeelte van $\frac{dp}{dv} = 0$ weder een gesloten deel van $v - x\frac{dv}{dx_p} = 0$ bevatten, met een top bij zekere waarde van $x$ en de opening bij $x = 1$. Ook voor geheel aan den rechterkant liggende strooken blijft het altijd gelden, dat $v - x\frac{dv}{dx_p} = 0$ ligt binnen $\frac{dp}{dv} = 0$; zoodat als $\frac{dp}{dv} = 0$ zich niet meer over de geheele breedte uitstrekt, ook $v - x\frac{dv}{dx_p}$ zich niet meer over de geheele breedte kan uitstrekken.

Gaan wij ook in zulk een middenstrook, en meteen ook in een rechterstrook, den loop na van de meetkundige plaats $v - x\frac{dv}{dx_q}$, waar de poten-

tiaallijnen horizontaal gericht zijn, dan zien wij bij het raadplegen van fig. 5 en fig. 6 zoolang de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ niet aanwezig is, of zoo zij aanwezig is voor alle punten buiten deze kromme, dat genoemde meetkundige plaats beperkt blijft tot kleinere volumes dan die der lijn $\frac{dp}{dx_v}=0$. Snijdt $\frac{dp}{dx_v}=0$ de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$, dan gaat de genoemde meetkundige plaats door deze snijpunten. Binnen $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ ligt de lijn $v-x\frac{dv}{dx_q}$ bij grooter volumes dan die van $\frac{dp}{dx_v}=0$. Maar onderlinge snijding van $v-x\frac{dv}{dx_q}=0$ en $v-x\frac{dv}{dx_p}=0$ is dan niet te verwachten. Van een strikpotentiaallijn is dan ook geen sprake. Geheel anders zou de uitkomst geweest zijn, als wij ook den loop van $M_2\,\mu_2$ hadden nagegaan. Maar dit kan overbodig geacht worden, nu wij den loop kennen van de $q$-lijnen, dus van $M_2\,\mu_2 - M_1\,\mu_1$ en van $M_1\,\mu_1$. Hiermede zijn voorzeker de eigenschappen van den loop der potentiaallijnen niet uitgeput, maar daar wij toch voor de bepaling van de binodale lijn gęen gebruik zullen maken van deze derde groep van lijnen, meen ik met de mededeeling van bovenstaande eigenschappen te kunnen volstaan.

Voor de bepaling van den loop der binodale lijn. zullen wij gebruik maken van de vergelijking van pag. 12, n.l.:

$$d\,M_1\,\mu_1 = v\,dp - x\,dq.$$

Maar vooraf een paar opmerkingen. Voor al de bij een theorie van mengsels te behandelen lijnen zijn de isobare en de binodale lijn wel als de belangrijkste te beschouwen, omdat deze het voorwerp van experimenteel onderzoek kunnen zijn. Ofschoon het voor een volledig inzicht noodzakelijk is dat men bij een enkele stof weet, dat beneden zekere temperatuur de isotherme labiele gedeelten bezit en dat men de grenzen van deze labiele gedeelten weet aan te geven, is toch de bepaling van de punten van coëxisteerend evenwicht voor het experiment het gewichtigst. Zoo ook voor een binair stelsel is het wel noodig voor een volledig inzicht dat men het bestaan der labiele phasen kent en de grenzen daarvan, dus de spinodale lijn; maar nog gewichtiger is de kennis van de binodale lijn, en deze te bepalen moet als het einddoel van alle beschouwingen worden aangemerkt, omdat deze het voorwerp van experimenteel onderzoek zijn kan, en de uit onze beschouwingen afgeleide resultaten alleen voor zoover ze betrekking hebben op de binodale lijn aan de ervaring

kunnen worden getoetst. Als hiervoor een uitzondering moet toegelaten worden, dan geldt dit de plooipunten tot welker bestaan besloten kon worden, zonder dat hiervoor een beschouwing van de binodale lijn noodig is. Maar nog verdient het opgemerkt te worden, dat zelfs niet de geheele binodale lijn door het experiment kan verwezenlijkt worden. De binodale lijn kan gedeelten bezitten, welke in het labiel gebied liggen, en andere welke metastabiel zijn. Dat is reeds opgemerkt in de Théorie Moléculaire (Cont. II pag. 14), maar blijkt in ruimere en meer volledige mate door de teekeningen voorkomende in Verslag K. A. v. Wet. Maart en Juni 1905. Tegelijk blijkt daar hoe groot de gecompliceerdheid van de binodale lijn zijn kan, als de spinodale lijn nauwelijks van den gewonen vorm afwijkt. Zoodat, als men de meer of mindere samengesteldheid van een plooi moet beoordeelen naar haar spinodale lijn of naar haar binodale lijn men een zeer verschillend oordeel zal vellen.

Zoo heb ik in de laatst aangehaalde mededeeling, lettende op de eigenschappen der binodale lijn kunnen spreken van een hoofdplooi en van een zijplooi. Evenzoo, alleen lettende op de binodale lijn en haar nodelijnen, kan men spreken van een dwarsplooi en een lengteplooi; terwijl men, lettende op de spinodale lijn, deze beide als één enkele plooi zal moeten beschouwen. Toch is het wenschelijk, om verwarring te voorkomen, dat men eenzelfde terminologie volgt. Op het oogenblik komt het mij het wenschelijkst voor bij de keuze van den naam voornamelijk op de spinodale lijn te letten, daarbij achterwege te laten dat gedeelte, dat ook somtijds aanwezig kan zijn, maar dan het concaaf-concave gedeelte van het $\psi$-vlak insluit. Is op de spinodale lijn geen plooipunt aanwezig of een enkel en dan realiseerbaar, dan zou men zulk een plooi een normale kunnen noemen. Is er bovendien een paar h e t e r o g e n e plooipunten aanwezig, dan zou men van een abnormale, of zooals ik in vorige bladzijden dezer mededeeling deed, van een samengestelde plooi kunnen spreken. Heeft de spinodale lijn bij zekere waarde van $T$ zich gesplitst, wat geschieden kan tengevolge van het zich splitsen der kromme $\frac{dp}{dv} = 0$, dan zijn er twee plooien, waarvan de eene de rechterplooi en de andere de linkerplooi zou kunnen genoemd worden. Heeft zij zich gesplitst tengevolge van het tot stand komen van scheiding tusschen de krommen $\frac{dp}{dv} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, dan zou men de twee plooien kunnen onderscheiden door de namen „dwarsplooi en lengteplooi". Telkens als de scheiding tot twee plooien tot stand komt, ontstaan er dan twee *homogene* plooipunten. Bij den overgang

van een normale plooi tot een samengestelde komt er een paar *heterogene* plooipunten. Wenscht men dan te letten op eigenschappen der binodale lijn dan zou men nog andere namen misschien wenschelijk achten, maar dan doet men m.i. goed uitdrukkelijk te vermelden dat dit geschiedt om de aandacht te vestigen op de bijzondere gedaante der binodale lijn.

De vergelijking $d\,M_1\mu_1 = v\,dp - x\,dq$ vereenvoudigt zich bij een enkele stof tot $d\,M_1\mu_1 = v\,dp$, en kan onder dien vorm geacht worden tot de constructie voor het punt van coëxistentie te voeren. Men kan deze constructie rechtstreeks uitvoeren, als men tot assen kiest een $p$-as en een $M_1\mu_1$-as, in welk geval men een lijn verkrijgt die zich zelve doorsnijdt (Cont. II pag. 4 fig. 1), of men kan tot assen kiezen een $v$-as en een $p$-as en den regel van MAXWELL toepassen. In het laatste geval denkt men $d\,M_1\mu_1 = v\,dp$ geschreven onder den vorm: $d\,M_1\mu_1 = d(pv) - pdv$, waarvan de integraal is

$(M_1\mu_1)_b - (M_1\mu_1)_a = (pv)_b - (pv)_a - \int_a^b pdv$. Voor coëxistentie moet

$(M_1\mu_1)_b = (M_1\mu_1)_a$ zijn en is $p_a = p_b = p_{Coëx}$, zoodat men verkrijgt:

$$p_c(v_b - v_a) = \int_{v_a}^{v_b} p\,dv\,.$$

Bij een binair mengsel verkrijgt men voor de bepaling van coëxistentie, dus voor de bepaling van de punten der binodale lijn, dezelfde eenvoudige betrekking

$$dM_1\mu_1 = vdp$$

als men bij de uitvoering der constructie de reeks van punten volgt waarvoor $dq = 0$ is en dus een $q$-lijn.

Denken wij dat wij den regel van MAXWELL willen toepassen, dan teekenen wij, een $q$-lijn volgende, bij elke waarde van $v$ de waarde van $p$, en zoeken hoeveel malen een rechte lijn evenwijdig aan de $v$-as getrokken kan worden, zoodanig dat $p(v_b - v_a) = \int_a^b pdv$. Kan dit slechts eens geschieden, dan geven de uiteinden van deze rechte lijn de waarde van $v$ aan van de phasen die met elkander coëxisteeren, en de hoogte van deze rechte boven de $v$-as, de waarde van den druk voor dit paar coëxisteerende phasen, en dan snijdt de gekozen $q$-lijn geen andere takken der binodale lijn. Dat kan meermalen geschieden, als de gekozen $q$-lijn 4 malen door de binodale

lijn gaat, of als er op de gekozen $q$-lijn 6 punten der binodale zijn. Om te beoordeelen of dit 0 maal of 1, 2 of meer malen geschieden kan, heeft men in de eerste en voornaamste plaats er op te letten of de gekozen $q$-lijn de spinodale lijn niet of wel snijdt en als zij snijdt hoeveel malen dit geschiedt. Telkens toch als een $q$-lijn de spinodale lijn snijdt, is er voor de punten dezer $q$-lijn of maximumdruk of minimumdruk. In de punten der spinodale lijn raakt een $p$-lijn aan de gekozen $q$-lijn, en door twee punten die ter wederzijde van de spinodale lijn liggen zal eenzelfde $p$-lijn heen gaan, die of grooter of kleiner waarde heeft dan de $p$-lijn welke raakt. Zoo is er in fig. 7 (bladz. 738) op de $q_1$-lijn in het punt 4 maximumdruk en in het punt 2 minimumdruk, maar bij grooter volume dan dat van punt 4 is de druk steeds kleiner dan in 4 en des te kleiner naarmate $v$ grooter is, en in punten dezer zelfde $q$-lijn waarin $v$ kleiner is, is de druk steeds grooter dan in 2, en des te grooter naarmate wij de $q_1$-lijn tot in haar beginpunt toe zouden volgen, waar $p = \infty$ is. Construeeren wij nu $p$ als functie van $v$, dan heeft de $p$-lijn een soortgelijke gedaante als een gewone isotherme. Bij $v = \infty$ is $p = 0$, er is een maximum- en een minimumdruk, en bij $v = b$, is $p = \infty$. De regel van MAXWELL kan dan toegepast worden, maar slechts eenmaal.

Deze $q_1$-lijn zal dus twee punten der binodale lijn bevatten. In fig. 7 zal dit met elke $q$-lijn het geval zijn. Voor de lijn $q = \infty$, of voor de eerste stof, vinden wij de coëxisteerende phasen van die stof, en voor $q = -\infty$ of voor de tweede stof, de coëxisteerende phasen der tweede stof. Teekent men gelijktijdig van zeker punt van het $v,x$-diagram uitgaande de twee $p$-krommen als functie van $v$, nl. de $p$-kromme als men de $q$-lijn, welke door het gekozen punt gaat, volgt, en de $p$-kromme als men bij standvastige waarde van $x$ blijft, dan heeft bij alle waarde van $v$, kleiner dan van het gekozen punt, de 2[de] kromme steeds grooter waarde van $p$ dan de eerste. Zoo is in fig. 7 bij dezelfde waarde van $v$ de druk in een meer links gelegen punt, waarheen de $q$-lijn zich beweegt, kleiner dan voor de standvastige waarde van $x$ het geval is. Laat nu het punt van waar men uitgaat een punt van de binodale lijn zijn, gelegen aan den dampkant. Dan volgt, als wij den regel van MAXWELL toepassen op beide krommen, uit de omstandigheid dat $p$ voor de kromme bij standvastige $x$ steeds grooter is, vooreerst dat de lijn van MAXWELL bij deze $p$-kromme hooger ligt dan bij de $p$-kromme als wij de $q$-lijn volgen, en in de tweede plaats dat aan den dampkant de binodale lijn bij gegeven $x$ steeds bij grootere volumes ligt dan de dampvolumes zouden zijn, wanneer elk mengsel als onsplits-

bare stof beschouwd mocht worden. Evenzoo aan den vloeistofkant bij kleinere volumes. Gelijk de spinodale lijn buiten de lijn $\frac{dp}{dv} = 0$ ligt, zoo ligt de binodale lijn buiten wat coëxisteerende phasen zouden zijn, als elk mengsel zich als enkele stof zou gedragen. Eigenschappen welke ook onmiddellijk volgen uit het $\psi$-oppervlak.

In fig. 7*b* snijden alleen $q$-lijnen van lageren graad de spinodale lijn. De $q$-lijn van den hoogsten graad, welke nog punten met de spinodale lijn gemeen heeft en wel samenvallende punten, is die welke door het plooipunt gaat. Deze $q$-lijn volgende zal maximumdruk en minimumdruk zijn samengevallen, en $p$ als functie van $v$ teekenende, heeft men een lijn, die in het plooipunt een horizontale raaklijn heeft en tegelijk een buigpunt, even als een gewone isotherme in het kritisch punt. Dit is een opmerking, welke altijd geldt voor een plooipunt, ook voor een verborgen plooipunt; maar dan is het bijzondere punt in de $p$-lijn, waar $\left(\frac{dp}{dv}\right)_q$ en $\left(\frac{d^2p}{dv^2}\right)_q$ gelijk 0 is, op den labielen tak gelegen. Een derde mogelijkheid voor de ligging van dat bijzondere punt bestaat er, nl. dat het ligt op wat wij vloeistoftak van de $p$-lijn zouden kunnen noemen, gelijk straks blijken zal.

Denken wij nu het geval van fig. 8, en kiezen wij daar een $q$-lijn, die de spinodale lijn 4 maal snijdt, gelijk het geval is met een der geteekende $q$-lijnen. Volgen wij, beginnende bij groot volume deze $q$-lijn, dan ontmoeten wij bij nog groot volume de spinodale lijn in een punt, waar $p$ een maximumwaarde heeft; in het tweede punt, waar de $q$-lijn het labiele gebied voor de eerste keer verlaat, is minimumdruk. In het derde punt, waarin deze $q$-lijn opnieuw het labiele gebiedt binnentreedt, is weder maximumdruk, en in het vierde punt bij het definitief verlaten van het labiele gebied is er weder minimumdruk. Om nu $p$ als functie van $v$ behoorlijk te teekenen moet men de waarde van $\left(\frac{dp}{dv}\right)_q$ kennen. Nu is:

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)_q = \frac{dp}{dx_v}\left(\frac{dx}{dv}\right)_q + \frac{dp}{dv_x}$$

welke vergelijking kan geschreven worden onder den volgenden vorm:

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)_q = -\frac{\frac{d^2\psi}{dv^2}\frac{d^2\psi}{dx^2} - \left(\frac{d^2\psi}{dxdv}\right)^2}{\frac{d^2\psi}{dx^2}}$$

Uit dezen vorm zien wij dat $\left(\frac{dp}{dv}\right)_q$ alleen dan in het labiele gebied positief is, als $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ positief is. Is $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ negatief, dan is in het labiele gebied $\left(\frac{dp}{dv}\right)_q$ weder negatief, en als de $q$-lijn de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ snijdt is $\left(\frac{dp}{dv}\right)_q = \infty$. In fig. 16 is de gang van $p$ als functie van $v$, als wij deze $q$-lijn volgen, schematisch voorgesteld.

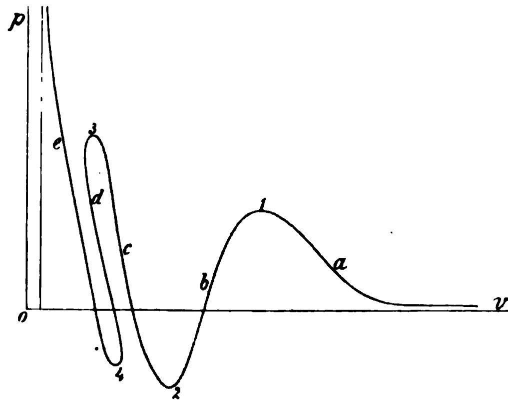



Fig. 16.

Nu hebben wij na te gaan hoeveel punten van de binodale lijn op deze $q$-lijn gelegen zijn. Voor deze discussie zal ik den tak rechts van punt 1 door $a$ voorstellen; de tak tusschen 1 en 2 zij dan de $b$-tak enz. Het aantal malen, dat de regel van MAXWELL nu kan toegepast worden, is gelijk aan het aantal combinaties twee aan twee van 4 grootheden. Zoo kan tak $a$ gecombineerd worden, niet met tak $b$, maar wel met tak $c$, $d$ en $e$. De tak $b$ kan gecombineerd worden met $d$ en $e$. En eindelijk tak $c$ met $e$. Het is daarmede niet bedoeld, dat de toepassing in die 6 gevallen altijd inderdaad uitvoerbaar is. Daarover straks als wij andere $q$-lijnen bespreken. Maar voor de hier gekozen $q$-lijn is het trekken van die 6 MAXWELL'sche lijnen werkelijk mogelijk. En dan moet deze $q$-lijn 12 malen de binodale lijn snijden. Die 12 snijpunten zijn te vinden in fig. 17. In deze figuur heeft de $q$-lijn de gedaante van fig. 8. Zij snijdt de spinodale lijn, welke mede in deze figuur geteekend is, 4 malen. Zij heeft een maximum- en een minimumvolume. Tusschen de punten van grootste en kleinste volume moet de meetkundige plaats $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ gedacht worden.

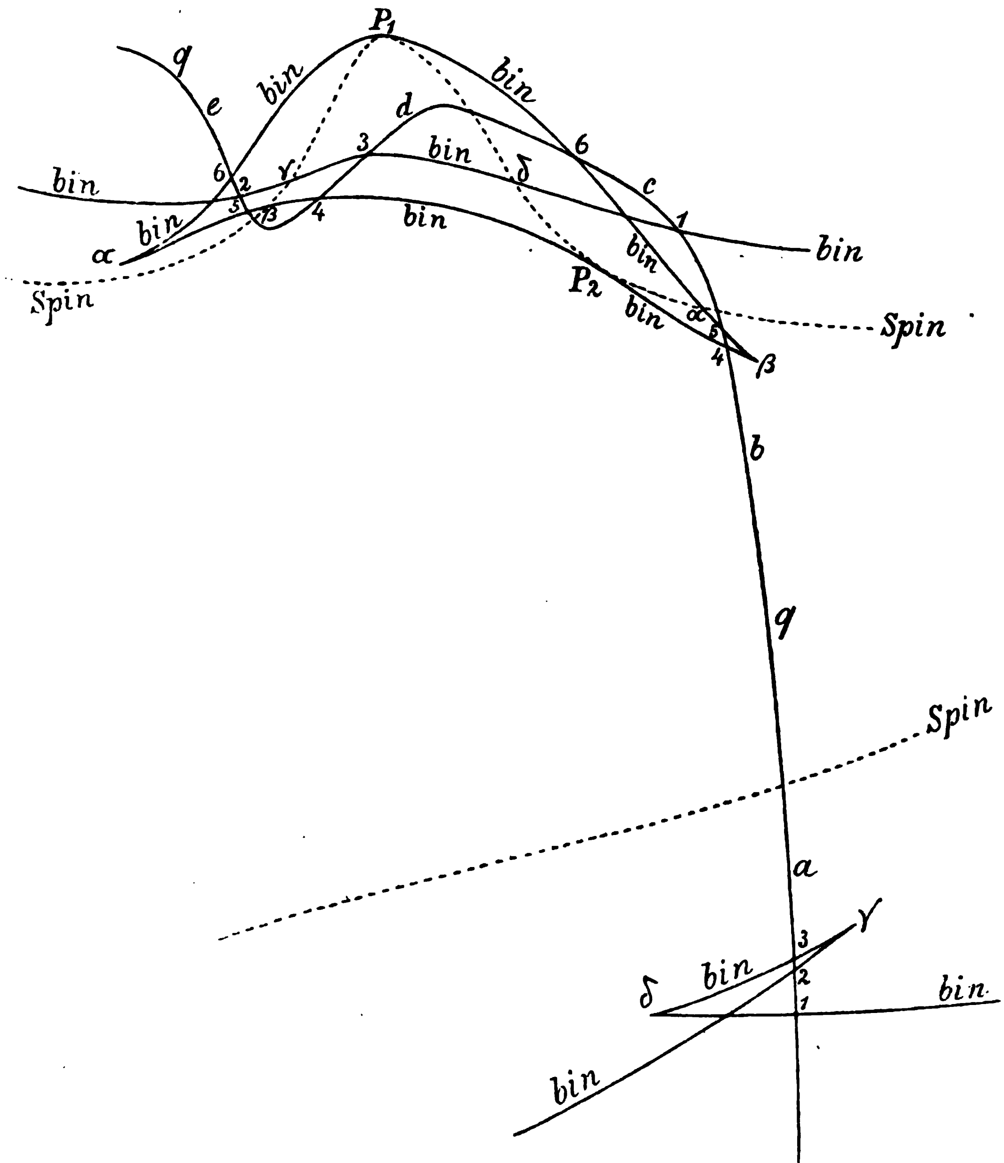



Fig. 17.

Verder is in deze fig. 17 geteekend de binodale lijn, welke omdat zij zulk een ingewikkelde gedaante heeft, herhaalde malen door het teeken *bin* is aangeduid. Men kan deze binodale lijn in twee afzonderlijke gedeeld denken. Ten eerste dat gedeelte, dat wij damp-vloeistof binodale zouden kunnen noemen. Van dat gedeelte heeft de vloeistoftak een regelmatig beloop, maar de damptak heeft de bekende gedaante met twee keerpunten. De nodelijn, welke bij het keerpunt $\gamma$ behoort, heeft haar andere uiteinde in het punt $\gamma$, waar de

vloeistoftak dezer binodale door de spinodale lijn gaat. Evenzoo behooren de twee punten door $\sigma$ aangeduid als uiteinden van een zelfde nodelijn bij elkander. Het overige gedeelte der binodale vormt een in zich zelf gesloten kromme. Voor dat gedeelte der binodale lijn zijn in de eerste plaats van gewicht de twee heterogene plooipunten $P_1$ en $P_2$. De punten rechts en links van $P_1$ liggen in het stabiele gebied, de punten ter wederzijde van $P_2$ in het labiele gebied. Wanneer wij den tak rechts van $P_1$ vervolgen, en door de spinodale lijn gaan in het punt $\alpha$, dan behoort bij dit punt als uiteinde van een nodelijn een ander punt $\alpha$ als ander uiteinde dezer nodelijn, en moet er weder in dat tweede punt $\alpha$ een keerpunt voor de binodale lijn zijn. In dat tweede punt $\alpha$ keert de binodale weder naar grootere waarde van $x$ terug, en ontmoet zij dan de spinodale in het punt door $\beta$ aangeduid, dan behoort daarbij een tweede punt $\beta$, waarop de rechtertak een keerpunt heeft. Van dat punt af heeft het overige gedeelte der binodale lijn slechts punten in het labiele gebied, en de punten gelegen tusschen de twee punten $\beta$ zijn uiteinden van nodelijnen, welke tot elkander naderen en in $P_2$ samenvallen.

Passen wij, om de 12 punten te vinden, waarin deze $q$-lijn de binodale snijdt, den regel van MAXWELL toe op het gedeelte der $p$-figuur met de takken $a$, $b$ en $c$, dan bepalen wij de punten die met 1 zijn aangeduid. Voegen wij ook den tak $d$ toe, dan zou, als wij dezelfde rechte lijn behouden hadden, de gelijkheid tusschen de inhouden boven en beneden de rechte lijn verbroken zijn, en wel in dien zin dat de gezamenlijke som der inhouden boven de rechte lijn te groot zou zijn. Daaruit volgt dat wij de rechte lijn hooger moeten trekken. Voor de punten der binodale, welke door de combinatie van $a$ met $d$ bepaald worden is dus de druk grooter, terwijl zooals de figuur uitwijst de volumes beide kleiner zijn dan van de overeenkomstige punten 1. De door deze combinatie bepaalde punten zijn door 3 aangeduid. Voegen wij nu nog den tak $e$ toe, dan moet de druk weder dalen. Wij bepalen dan de punten door 2 aangeduid. Dat de druk in 2, al is zij gedaald toch nog grooter is dan in de punten 1 zal straks blijken. Door de combinatie van $b$ met $d$, beiden takken in het labiele gebied bepalen wij de punten 4; en na toevoeging van den tak $e$ de punten 5, welke lageren druk bezitten moeten dan de punten 4. Ten slotte blijft over de combinatie van $c$ met $e$. Nu is de $q$-lijn, welke wij gekozen hebben, zoo gelegen, dat de tak $c$ rechts blijft van de punten van driephasendruk. Reeds daaruit volgt, dat als wij in fig. 16 de $p$-lijn goed geconstrueerd hebben, de toepassing van den regel van MAXWELL op de combinatie

$(c, e)$, een grooteren druk leveren moet voor de punten 6 dan voor de punten 1; maar daaruit volgt mede dat de druk voor de punten 2 (combinatie van $a$, $e$) ligt tusschen $p_1$ en $p_6$ — en dus $p_2 > p_1$. Maar niet al deze 12 punten zijn realiseerbaar. Telkens als in de combinatie een labiele tak voorkomt zijn de door die combinatie bepaalde noden niet te verwezenlijken. Dus de punten 3 (combinatie $a, d$), de punten 4 (combinatie $b, d$) en de punten 5 (combinatie $b, e$) zijn onder geenerlei omstandigheden te realiseeren. Zoo vervallen er van de 12 punten reeds 6 als behoorende bij labiele coëxisteerende evenwichten. Van de overige 6 punten vervallen ook nog de punten 2, als men ook de metastabiele toestanden uitsluit. Resumeerende bepalen wij dus de volgende punten door de daarnaast geplaatste combinatie:

| punten | combinatie | |
|---|---|---|
| 1 | $a, c$ | stabiel |
| 2 | $a, e$ | metastabiel |
| 3 | $a, d$ | labiel |
| 4 | $b, d$ | labiel |
| 5 | $b, e$ | labiel |
| 6 | $c, e$ | stabiel |

Om al de punten der binodale lijn te construeeren zou men alle $q$-lijnen op soortgelijke wijzen moeten behandelen. Voor den eersten component ($q = -\infty$) is de $p$-lijn de gewone isotherme, evenzoo voor den tweeden component ($q = +\infty$) de isotherme voor dezen component. Bij het toenemen van de waarde van $q$ moet dus een zoodanige geleidelijke verandering van de $p$-lijn plaatsgrijpen, dat zij van den eersten vorm in den tweeden overgaat. Bij zeer groot volume kunnen deze uiterste vormen geacht worden samen te vallen. Dit is ook met alle tusschenvormen het geval. De wijziging blijft hoofdzakelijk beperkt tot de kleinere volumes, en in het geval van $b_1 = b_2$ zou ook bij de uiterst kleine volumes een dergelijk besluit toelaatbaar zijn. Zoolang de $q$-lijn (zie fig. 4 en fig. 8) nog van zoo lagen graad is, dat zij zelfs nog niet door het benedenste punt van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ gaat, heeft de $p$-lijn nog de gewone gedaante eener isotherme. Eerst dan komt er in den labielen tak een bijzonder punt, als de $q$-lijn aan $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ raakt. Voor dat raakpunt is $\left(\frac{dp}{dv}\right)_q = \infty$, maar links en rechts van dat punt blijft $\left(\frac{dp}{dv}\right)_q$ nog positief. Bij iets hoogeren graad

van $q$ wordt $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ twee maal gesneden, en zijn er in de $p$-lijn twee punten aan te wijzen in den labielen tak waar zij vertikaal gericht is. Tusschen die 2 punten is $\left(\frac{dp}{dv}\right)_q$ negatief. Maar ook dan nog heeft de $p$-lijn slechts 3 takken, en kan dus de regel van MAXWELL slechts eenmaal worden toegepast; dan vinden wij slechts twee punten van de binodale lijn, nl. een punt, aangevende een vloeistofvolume links in de figuur gelegen, en een punt aangevende een dampvolume veel meer naar den rechterkant gelegen, maar toch nog genoeg links blijvende van het strikpunt der dampbinode. De $q$-lijn snijdt dan aan den dampkant de binodale in geen andere punten. Stijgt de waarde van $q$ hooger, dan komt er op den labielen tak der $p$-lijn weder een derde bijzonder punt, en wel als de $q$-lijn begint 4 snijpunten met de spinodale lijn gemeen te hebben. Dit zal het geval zijn als zij door het verborgen plooipunt $P_2$ gaat (zie fig. 17). Dan raakt zij aan de spinodale lijn, maar zoo, dat $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q$ het omgekeerde teeken heeft van $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{spin}$. De regel dat in een plooipunt de $p$-lijn en de $q$-lijn de plooi omhullen is dan ook maar beperkt tot de realiseerbare plooipunten. Zij moet voor verborgen plooipunten juist andersom luiden. Daar heeft dus $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p=\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_q$ het omgekeerde teeken van $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{spin}$.

In dat derde bijzondere punt van den labielen tak van de $p$-kromme

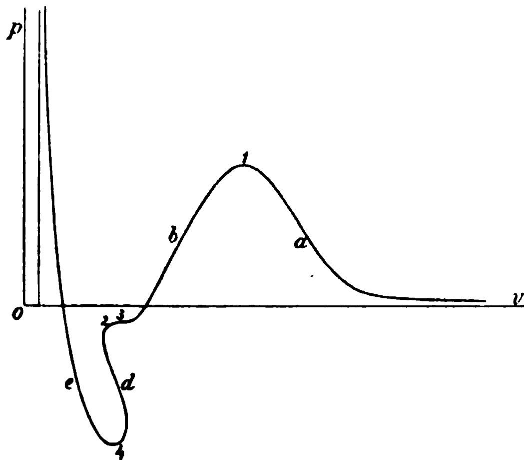



Fig. 18.

s $\left(\frac{dp}{dv}\right)_q = 0$, en ook $\left(\frac{d^2p}{dv^2}\right)_q = 0$, en de $p$-kromme heeft dan de gedaante van fig. 18.

Voor $q$ boven deze waarde wordt de spinodale lijn in 4 punten gesneden. De twee nieuwe snijpunten liggen dan links en rechts van $P_2$ en in den beginne in de nabijheid van dat punt. Dan heeft de $q$-lijn er een gedeelte, dat in het stabiele gebied ligt, bijgekregen, waaruit wij afleiden dat $p$ in het rechtsgelegen snijpunt kleiner is dan in het linksgelegen. Eerst dan heeft de $p$-lijn de gedaante van fig. 16, maar de tak $c$ is dan nog zeer klein, en de druk van punt 3 dezer figuur nog slechts weinig hooger dan van punt 2. Van nu af aan zou er sprake kunnen zijn van de toepassing van den regel van MAXWELL op de 5 takken $a$, $b$, $c$, $d$ en $e$, en dus van de bepaling van de 12 punten der binodale lijn. Maar in het begin zijn niet al deze 12 punten reëel. Zeker uitvoerbaar, en een paar bestaanbare punten voor de binodale lijn gevende, is de toepassing voor de combinatie van den eersten en den laatsten tak, en de aldus bepaalde punten zijn, in tegenstelling met ons besluit, toen wij deze combinatie behandelden bij de $q$-lijn van fig. 17, niet metastabiel maar stabiel. Evenzeer is de toepassing mogelijk voor de combinatie $(b, d)$, en de twee daardoor bepaalde punten liggen in het labiele gebied, en kunnen door de punten 4 van fig. 17 worden voorgesteld mits men deze dichterbij het punt $P_2$ verlegt. Op de overige 4 combinaties kan de regel geen toepassing vinden. Voor de mogelijkheid van toepassing op de combinatie $(a, e)$ wordt vereischt, dat de lengte van tak $c$ zoo groot zij dat de druk van punt 3 (fig. 19) ten minste positief zij;

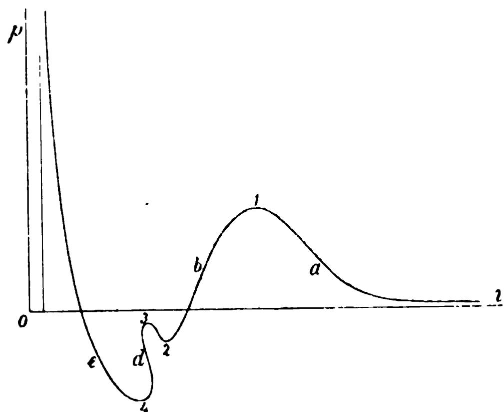



Fig. 19.

en zelfs dat is niet voldoende. Trekt men nl. uit punt 3 een lijn // $v$-as en is dan de inhoud tusschen de takken $b$ en $c$ en deze aan

de $v$-as evenwijdige lijn kleiner dan de inhoud tusschen de takken $a$ en $b$ boven deze evenwijdige lijn, dan zou de MAXWELL'sche lijn hooger moeten liggen en is dus niet mogelijk. A fortiori vervalt dan de combinatie $(a, d)$, welke een nog hoogere waarde van den druk der MAXWELL'sche lijn zou eischen. Om overeenkomstige redenen vervallen de combinaties $(b, e)$ en $(c, e)$. Hieruit volgt dat de $q$-lijn, welke van iets hoogeren graad is, dan die, welke door $P_2$ gaat, aan den linkerkant moet blijven vóór het punt $a$ van fig. 1 en aan den rechterkant links moet blijven van den kam van den damptak der binodale lijn. Gaat men voort met de waarde van $q$ te doen stijgen, dan begint gelijktijdig de mogelijkheid van de combinaties $(a, c)$ en $(a, d)$, en wel als de druk van het punt 3, dat als top van $c$ en $d$ beschouwd kan worden zoo hoog gestegen is, dat de MAXWELL'sche lijn voor de combinatie $(a, c)$ juist door punt 3 zou gaan. Evenzoo begint gelijktijdig de mogelijkheid voor de combinaties $(b, e)$ en $(c, e)$ en wel als de druk van punt 2, dat het laagste punt is van de takken $b$ en $c$, zoo vèr gedaald is, dat de MAXWELL'sche lijn voor de takken $c$ en $e$ juist door het punt 2 zou gaan. Bestaan al deze mogelijkheden, dan zijn de 12 punten op de $q$-lijn aan te wijzen. Welke van deze twee gelijktijdig beginnende mogelijkheden zich bij het stijgen van den graad der $q$-lijn het eerste voordoet, zal wel aan geen algemeenen regel gebonden zijn. Volgt men nu een dusdanige $q$-lijn, beginnend bij klein volume aan den linkerkant van fig. 17, dan ontmoet men eerst het punt 2 op de binodale, die aan den vloeistofkant regelmatig van links naar rechts gaat; dan volgt 6 en 5 nog voor men door de spinodale lijn gaat. Bij het weder stijgen van de $q$-lijn ontmoet men 4 en 3, welke dan meer rechts liggen moeten dan op de $q$-lijn, voor welke fig. 17 geteekend is. Bij het weder dalen van de $q$-lijn ontmoet men eerst het punt 1, daarna 6, later 5 en 4, en eindelijk aan den dampkant in volgorde de punten 3, 1 en 2. Maar van al deze punten zijn slechts de punten 2 stabiel. De punten 1 en 6 zijn metastabiel. De overigen zijn labiel. En bij het verder stijgen van $q$, bereikt men die bepaalde $q$-lijn, welke voor de verschijnselen van coëxistentie als de voornaamste is te beschouwen, en welke, als men driephasenevenwicht heeft, door de 3 coëxisteerende phasen gaat. Men heeft die coëxistentie van 3 phasen, als (zie fig. 16) de MAXWELL'sche lijn voor de combinatie $(a, c)$ in het verlengde ligt van deze lijn voor de combinatie $(c, e)$. Tegelijk is dan ook deze lijn de MAXWELL'sche lijn voor de combinatie $(a, e)$. Dan vallen aan den dampkant de punten 1 en 2 of 2 en 1 samen. Aan den vloeistofkant links vallen de punten 2 en 6 of 6 en 2 samen, en aan den vloeistofkant rechts de punten 1 en 6 of 6 en 1.

De punten 3, 4 en 5 zijn gebleven; daarvan zijn 3 en 4 labiel coëxisteerend evenwicht en 5 is metastabiel. In dit geval van driephasendruk is de tweede component in ruimer mate in den damp aanwezig dan in de beide vloeistoffen, in verband met de omstandigheden welke tot deze figuur aanleiding geven, nl. dat de tweede component grooter waarde van $b$ heeft en lager $T_k$ dan de eerste. In fig. 3 Cont. II, pag. 11 is voor de damp-vloeistofbinodale voor dit geval de gang van den druk geteekend.

Bij voortgaande verhooging van den graad van $q$ moet de $p$-kromme, welke voor de laatst gekozen waarden van $q$ volledig afwijkt van de gedaante van een eenvoudige isotherme, weder zonder sprongen tot zulk een eenvoudige gedaante terugkeeren. Zoo houdt het bestaan van 5 takken op als de $q$-lijn door $P_1$ gaat. De takken $c$, $d$ en $e$ hebben dan met toenemend volume alle drie afnemenden druk. Alleen is er dan op dezen dalenden tak een punt waar $\frac{dp}{dv_q}$ en $\frac{d^2p}{dv^2_q}$ gelijk 0 is. Maar bij nog hoogere waarde van $q$ is ook deze bijzonderheid verdwenen, en naderen wij tot de gewone gedaante eener isotherme. Reeds vooraf, bij de $q$-lijn, welke boven aan $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ raakt, verdween het teruglopen naar grooter volumes in de labiele tak $d$ [1]).

Verhoogen wij de temperatuur tot $T_{k_2}$ dan komt er bij $x=1$ en $v=(v_k)_2$ een nieuw plooipunt $P_2$. Bij verdere verhooging der temperatuur begint het karakter der beide realiseerbare plooipunten $P_1$ en $P_2$ tot elkander te naderen. In fig. 17 behoort de gesloten binodale lijn bij $P_1$. Boven zekere temperatuur, die ik (Verslag Maart 1905) transformatie-temperatuur heb genoemd, gaat deze gesloten binodale lijn over naar $P_2$. Bij deze transformatie-temperatuur zijn in fig. 17 de puntenparen $\beta$ en $\gamma$ op de spinodale lijn samengevallen, en raken dan twee takken der binodale lijn elkander en is $\frac{d^2v}{dx^2}$ voor deze beide takken gelijk. Maar voor verdere bijzonderheden verwijs ik naar de reeds meermalen geciteerde mededeeling. Alleen neme men in acht dat in het hier behandelde geval $T_{k_2} < T_{k_1}$, terwijl in de

[1]) Strikt genomen is de verandering van de $p$-lijn met toenemende waarde van $q$ niet een zich verwijderen van en daarna terugkeeren tot den vorm van een isotherme. Men moet ze als een voortgaande ontwikkeling beschouwen, welke in den zelfden zin blijft plaatsgrijpen. Er behoort bij de laatste $q$-lijn dan ook nog de oneindig groote druk langs de lijn $v=b$. Dit stuk is echter voor de beschrijving der binodale lijn niet noodig, ten minste als het plooipunt $P_1$ aanwezig is.

figuur welke ik vroeger voor deze transformatie gegeven heb ondersteld werd dat $T_{k_2} > T_{k_1}$ is. Lettende op de eigenschappen der binodale lijn kan men dan van een hoofdplooi en van een zijplooi spreken. Bij veel hoogere $T$ zijn $P_3$ en $P_2$ samengevallen, en is de binodale lijn een normale eenvoudige lijn geworden.

(*Wordt vervolgd*).

**Physiologie.** — De Heer ZWAARDEMAKER spreekt over: „*De adsorptie van muskongeur tegen vlakten van verschillend materiaal*".

In 1906 werd door H. WALBAUM het riekend principe van den muskus ontdekt in een keton van de samenstelling $C_{16}H_{30}O$, hetgeen den naam muskon ontving [1]). Door de vriendelijkheid van de firma SCHIMMEL & Co. was ik in de gelegenheid eenige olfactologische onderzoekingen met dit praeparaat te doen, dat op mijn verzoek voor dit doel in myristinezuur werd opgenomen. Het vormde met dit, bij 54° C. smeltbare vetzuur een mengsel, waarin 0.627 °/₀ muskon, dat gemakkelijk tot een olfactometrischen cylinder van 8 mM. lumen kon worden uitgegoten. Expositie van 0.15 cM. van zulk een cylinder aan een voorbijstrijkenden luchtstroom van 100 cub. cM. luchtverplaatsing per sec. verschaft een juist herkenbaren indruk van muskongeur, een zachten, niet voor verdere definitie vatbaren, snel vermoeienden parfum, die ook bij verdere verdunning niet van karakter verandert. De odorimetrische coëfficient van het door ons gebezigde mengsel bedroeg dus 6,7 [2]).

Bij de olfactometrische bepalingen bleek:

1°. dat het vervluchtigd muskon zich sterk hecht aan de glazen wanden, waaraan het voorbij strijkt,

2°. dat een afwrijven van zulk een glaswand met watten in stede van muskongeur een aan muskus herinnerenden geur doet ontstaan;

---

1) H. WALBAUM in SCHIMMEL & Co's Berichte April 1906, p. 99.

2) Onder odorimetrischen coëfficient van een in bepaalden vorm aangeboden reukstof versta ik de reciproque waarde der cylinderlengte in cM., die aan de zoogenaamde „Erkennungsschwelle" beantwoordt (voor olfactometrische cylinders van 8 mM. lumen, d. i. 0,5 $cM^2$. areaal). Men vergelijke hierover Physiol. des Geruchs, Leipzig 1895 p. 185. De beteekenis van dezen coëfficient, die met de reukkracht van een reukstof stijgt en daalt, treedt onmiddellijk in het licht, wanneer men den nauwen samenhang herkent, waarin hij staat tot $b$ in de beroemde formule van FECHNER: $\gamma = k \log \frac{\beta}{b}$ (Psychophysik II, p. 13). Als een bijzonderheid zij vermeld, dat de odorimetrische coëfficient van muskon in paraffinum liquidum $= 0$ is.

deze muskusgeur werd ook opgemerkt aan in de baan gelegd glaswol, watten, veeren of papier, niet echter aan asbest-wol en platinaspons, een en ander bij expositie gedurende $^1/_4$ minuut.

Dit gaf aanleiding tot eenige nadere nasporing, waartoe ik te gereeder overging, daar uit een onderzoek van J. Aitken in 1905 gebleken is, dat het riekend principe van muskus als een gas moet worden beschouwd [1]). Daartoe werd de straks vermelde olfactometrische cylinder, die 0,627 °/₀ muskon in myristinezuur bevat, een lengte van 10 cM. en een wijdte van 0,8 cM. bezit, door middel van een kort koperen verbindingsstuk in continuiteit gebracht met even lange en even wijde buizen van het meest uiteenloopend materiaal, zoodanig, dat deze buizen desgevorderd door omringend water op een vooraf bepaalde temperatuur konden worden gehouden. Het aldus gevormde kanaal zette zich voort in een aërodromometer [2]) d. i. een vertikale glazen buis, waarin een aluminiumschijfje, tusschen twee spiraalveeren is opgehangen en waarin de uitwijking van het schijfje de stroomsnelheid der lucht volgens empirische ijking aangeeft. Op den aërodromometer eindelijk volgde een groote blikken conus, waarin een met electromotor gedreven ventilator een zuiging van het nauwe naar het wijde einde onderhield. Het verband tusschen de verschillende stukken kon in een oogwenk worden verbroken en hersteld.

De lucht door dit stelsel gevoerd passeerde dus achtereenvolgens:

1°. door den olfactometrische cylinder over zijn volle lengte van 10 cM.

2°. door de buis, waarvan men de adsorptie wenscht te leeren kennen.

3°. door den aërodromometer.

In de proeven, waarvan hier verslag wordt gegeven, was de stroomsnelheid der lucht volmaakt gelijkmatig en zoodanig, dat 84 $cM.^3$ lucht per sec. passeerde. Elke expositie duurde nauwkeurig 5 min. Tusschen de proeven werd de olfactometrische cylinder steeds gesloten bewaard, terwijl controle-proeven met een geheel analogen cylinder van zuiver myristinezuur leerden, dat door dezen alleen geen blijvende geuradsorptie tot stand komt.

Adsorptie van geur bleek geheel afwezig bij enkele materialiën (poreus porcelein, kool, eboniet, staal, ijzer), bij andere in geringe mate aanwezig (aluminimum, zilver, zwavel), bij nog andere in min of meer aanzienlijke mate (tin, koper, nikkel, glas, tinhoudend lood,

---

1) J. Aitken. Evaporation of musk and other odorous substances. Proc. Roy. Soc. Vol. 25, p. 894, 1905.

2) H. Zwaardemaker. Arch. f. Anat. u. Physiol. (Physiol Abth.). 1902, p. 417.

lood). Naar den indruk, dien men onmiddellijk na beeindiging der proef ontvangt, kan men de onderzochte stoffen in de volgende reeks van toenemende condensatie rangschikken:

Poreus porcelein*, booglampkool, eboniet*, staal, ijzer, aluminium*, zilver*, zwavel*, tin, koper, nikkel, glas, tinhoudend lood, lood.

N.B. De met een sterretje aangeduide stoffen zijn bij kamertemperatuur niet geheel reukloos.

De aanvangstermen van bovenstaande reeks hebben, na 5 min. doorstrooming van de met muskon bezwangerde lucht, geen adsorptiegeur hoegenaamd en zij verkrijgen het ook niet door verwarming. De eindtermen, met name tin, koper, nikkel, glas en lood, hebben in duidelijke mate een adsorptiegeur, die in de eerste minuten tot uren een onmiskenbaar muskonkarakter draagt. Op den duur heeft echter een verandering plaats, die bestaat in:

1°. een wijziging der geurqualiteit, zoodat deze ten slotte op muskus gaat gelijken. Dit geldt voor tin, koper, nikkel, glas, verglaasd porcelein, tinhoudend lood, lood.

2°. een toename van de geurkracht van den adsorptiegeur, zoodanig dat, voor lood althans, een maximum ongeveer na 3 × 24 uur wordt bereikt.

3°. een latere afname van de geurkracht, zoodat de buizen ten slotte allen adsorptiegeur verliezen.

Vrij van allen aangenomen geur worden de buizen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Voor | poreus porcelein | in | 0 dagen |
| „ | kool | „ | 0 „ |
| „ | staal | „ | 0 „ |
| „ | ijzer | „ | enkele minuten |
| „ | zwavel | „ | minder dan 24 uur |
| „ | aluminimum | „ | „ „ 24 „ |
| „ | glas | „ | „ „ 24 „ |
| „ | zilver | „ | „ „ 2 dagen |
| „ | koper | „ | „ „ 4 „ |
| „ | tin | „ | „ „ 4 „ |
| „ | nikkel | „ | „ „ 4 tot 9 dagen |
| „ | tinhoudend lood | „ | „ „ 6 dagen |
| „ | lood | „ | „ „ 11 à 12 dagen |

Deze cijfers hebben intusschen slechts approximatieve waarde, daar de temperatuur van het vertrek in de afgeloopen voorjaarsmaanden in hooge mate wisselend is geweest.

Nagegaan heb ik nu in de eerste plaats of de adsorptie van den

muskongeur ook als een elektrisch verschijnsel moet worden opgevat. Het muskongas tegen een gevoeligen elektrometer geleid, bleek daaraan wel is waar geen lading af te staan, maar de mogelijkheid is niet uitgesloten, dat de methode voor dit doel te ongevoelig is geweest. Daarom werden in het straks beschreven apparaat genummerde vernikkeld koperen buizen geladen opgesteld tegenover een geïsoleerde axiaal geplaatste stalen stang van 3 m.M. dikte, zoodat een luchtcondensator ontstond met 2,5 m.M. afstand tusschen de cylindrisch gebogen, geladene vlakten. De onevene nummers worden +, de evene — geladen van uit de gelijkstroom-straatleiding van 220 Volt. Aldus werd telkens 1 minuut geëxposeerd terwijl het met muskon bezwangerde dielectrum op de gewone wijze met een snelheid van 84 cub. c.M. luchtverplaatsing per sec. in strooming werd gehouden. De cylinders bleken na afloop ongeveer in dezelfde mate muskongeur te hebben aangenomen, later op dezelfde wijze muskusgeur te verwerven en deze alle in ongeveer denzelfden tijd te verliezen. De vergelijkingen tusschen de buizen onderling geschiedden statistisch door 3 olfactologisch geoefende waarnemers, onafhankelijk van elkaar.[1])

Nagegaan is vervolgens of de temperatuur van beteekenis is, allereerst op de adsorptie, daarna op den overgang van muskongeur in muskusgeur. Hiertoe werden buizen van tinhoudend lood gedurende 10 minuten geëxposeerd bij 0°, bij 13° en bij 100°.

| | | | onmiddellijke indruk | reukloosheid in: |
|---|---|---|---|---|
| expositie | bij | 0° | sterke muskongeur | 5 dagen |
| „ | „ | 13° | duidelijke muskongeur | 2 „ |
| „ | „ | 100° | geen muskongeur | 1 dag |

Voorts werden genummerde vernikkeld koperen buizen elk gedurende 2 min. aan den gewonen, over muskon-myristinezuur geleiden luchtstroom blootgesteld. De oneven nummers werden in de ijskast, de evenen bij kamertemperatuur aan zich zelf overgelaten, elk opgenomen in een wijdmondsch glazen stopfleschje. Na 24 uur blijkt statistisch geen noemenswaardig verschil voorhanden te zijn. Alle cylinders, onverschillig oneven of even genummerd, blijken muskusgeur aangenomen te hebben in duidelijke, zij het ook niet sterke mate. De temperatuurcoëfficient van het verschijnsel van overgang

[1]) Een dezer waarnemers heeft een gewone reukscherpte voor muskongeur, maar kan den overgang van muskongeur in muskusgeur niet met zekerheid constateeren. Hij heeft echter ook in andere opzichten sterk afwijkende eigenaardigheden van zijn reukstelsel, die weldra uitvoerig beschreven zullen worden.

van muskon in muskus kan dus, voor de oppervlakte-werking door nikkel uitgeoefend nooit groot zijn.

Eindelijk zij vermeld, dat capillair glazen buizen van 1 mM.² areaal na gedurende 5 minuten doorstroomens van met muskon bezwangerde lucht geen voor mij waarneembare wijziging der oppervlakte-spanning tegenover water hebben aangeboden (gemeten uit de opstijghoogte) en dat herhaling der overige experimenten met voorverwarmde buizen en door chloorcalcium en watten gedroogde lucht geen afwijkende uitkomsten hebben opgeleverd.

Een theorie dezer verschijnselen te geven is voor het oogenblik nog ondoenlijk. Als voorloopige voorstelling zou men zich het geadsorbeerde muskon kunnen denken als opgelost in het laagje verdichten waterdamp en lucht, dat alle voorwerpen bedekt, terwijl men verder zou kunnen aannemen, dat de verandering van muskon in muskus alleen dan met merkbare snelheid plaats heeft, wanneer de oppervlakte-werking van het metaal, van het glas of van het verglaasd porcelein een bijzonder groote dichtheid van het opgeloste muskon in onmiddellijk contact met het bepaalde oppervlak tot stand brengt. In dezen gedachtengang passen evenwichtsproeven, bij 0°, 10°, enz., met gedroogde lucht, die in gang zijn, maar nog niet zijn afgesloten.

**Sterrenkunde.** — De Heer J. C. KAPTEYN biedt eene mededeeling aan van den Heer W. DE SITTER: *„Over periodieke banen van den Hestia-typus"*.

(Mede aangeboden door den Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN).

Het probleem, waarvan hier enkele particuliere soluties zullen besproken worden, is het volgende. Twee materieele punten $S$ en $J$, met de massas 1 en $\mu$ bewegen zich met eenparige hoeksnelheid $n' = 1$ in cirkels in het zelfde vlak om hun gemeenschappelijk zwaartepunt. De constante afstand $SJ$ wordt als eenheid aangenomen. Een materieel punt $P$ met oneindig kleine massa beweegt zich in hetzelfde vlak onder den invloed van de aantrekking van $S$ en $J$ volgens de wet van NEWTON. Dit is het probleem dat door DARWIN zoo uitvoerig behandeld is in het 21ste deel der Acta Mathematica. De particuliere soluties, die in het volgende beschouwd worden, zijn die waarvoor de baan van $P$ periodiek is, en voor Lim. $\mu = 0$ nadert tot een ellips met kleine excentriciteit, om $S$ als brandpunt beschreven, met een middelbare beweging $n$, die weinig van 3 verschilt. Is deze limiet, d. i. de ongestoorde baan, een cirkel, dan is de solutie volgens POINCARÉ's nomenclatuur van de eerste soort, en

hare periode is $T=\frac{2\pi}{n-1}$. Is de excentriciteit van de ongestoorde baan van nul verschillend, dan is de solutie van de tweede soort, en de periode nadert bij afnemende $\mu$ tot de limiet Lim. $T' = 2\pi$. De soluties van de tweede soort zijn tevens van het tweede geslacht ten opzichte van die van de eerste soort.

De soluties van de eerste soort zijn de banen die door DARWIN's „Planet A" beschreven worden. Deze banen vertoonen binnen het door ons beschouwde gebied een overgang van stabiliteit tot instabiliteit, die POINCARÉ aanleiding heeft gegeven tot een onderzoek, dat is vervat in de §§ 383 en 384 van zijne „Methodes Nouvelles" (Deel III, pag. 355—361). De daar afgeleide resultaten worden in het volgende langs een anderen, en naar het mij toeschijnt eenvoudiger, weg teruggevonden.

Een voorbeeld van eene solutie van de tweede soort is eveneens in DARWIN's werk te vinden. Ik bedoel de baan door hem geteekend op pag. 181 en die hij noemt $x_0 = -.337$. Hoewel POINCARÉ de noodzakelijkheid van het bestaan van dergelijke soluties aantoont, schijnt het hem ontgaan te zijn dat DARWIN er werkelijk een geconstrueerd heeft.

Deze soluties en hunne stabiliteit wensch ik te beschouwen van het standpunt van de algemeene theorie, die door POINCARÉ in het eerste en derde deel der „Méthodes Nouvelles" is ontwikkeld. De volgende eigenschappen, die daar bewezen worden, gelden algemeen voor elk probleem, dat tot twee vrijheidsgraden is te reduceeren, één variabelen parameter bevat, en voor elke waarde van dien parameter een eindig aantal periodieke soluties toelaat. Natuurlijk is de geldigheid beperkt tot een zeker gebied van de verschillende in het probleem optredende variabele grootheden, waarvan wij de grenzen evenwel niet zullen behoeven te overschrijden.

Een periodieke solutie is volkomen bepaald door de waarde van den parameter en die van één integratie-constante of „element". De periodieke soluties komen voor in families, die geordend zijn naar opklimmende of afdalende waarden van den parameter. Deze families kunnen worden afgebeeld door curven $\Phi(\varkappa, \beta) = 0$, waar $\varkappa$ de parameter van het probleem is en $\beta$ het bepalende element.

De stabiliteit of instabiliteit wordt bepaald door eene grootheid $\alpha$, door POINCARÉ karakteristieke exponent genoemd. Is $T$ de periode, dan zijn waarden van $\alpha$, wier verschil een veelvoud van $\frac{2\pi i}{T}$ bedraagt, als identiek te beschouwen. De volgende gevallen kunnen voorkomen:

$aT$ zuiver imaginair . . . . . . . de solutie is *stabiel*
$aT$ reëel . . . . . . . . . . . de solutie is *even instabiel*
$aT$ complex met imaginair deel $= \pi i$: de solutie is *oneven instabiel*[1]).

Een solutie met de periode $T$ kan ook opgevat worden als hebbende de periode $T' = 2\,T$. Is zij oneven instabiel ten opzichte van de periode $T$ dan is zij even instabiel ten opzichte van de periode $T'$.

In elke familie varieeren de exponent $a$ en de periode $T$ continu met den parameter $\varkappa$. Het product $aT$ en het differentiaalquotient $\frac{d\Phi}{d\varkappa}$ worden tegelijk $= 0$. Voor waarden van $\varkappa$ waarvoor dit plaats heeft, heeft de curve $\Phi = 0$ een veelvoudig punt, of raakt aan een lijn $\varkappa =$ const. De familie vertakt zich, of wat op hetzelfde neerkomt, twee families hebben een lid gemeen. Is $(\varkappa_0\, \beta_0)$ het beeldpunt van dit gemeenschappelijk lid, dan gelden de volgende regels.

Het aantal takken der curve $\Phi = 0$ voor $\varkappa > \varkappa_0$ is een even getal grooter of kleiner dan het aantal takken voor $\varkappa < \varkappa_0$.

De takken die van het punt $(\varkappa_0\, \beta_0)$ uitgaan naar de richting der toenemende $\varkappa$ zijn beurtelings stabiel en even instabiel[2]). Hetzelfde geldt van de takken waarvoor $\varkappa$ afneemt. De beide takken, die het stuk van de lijn $\varkappa = \varkappa_0$ insluiten waarvoor $\beta < \beta_0$ is, zijn beide stabiel of beide instabiel, en hetzelfde geldt voor de beide takken die het andere stuk van de lijn $\varkappa = \varkappa_0$ insluiten. Is de periode van een der takken $T$ en van een andere $T'$, zijn $T_0$ en $T'_0$ de waarden dier perioden in het punt $(\varkappa_0\, \beta_0)$, dan moeten dus $T_0$ en $T'_0$ onderling meetbaar zijn. Is $T''_0$ hun kleinste gemeene veelvoud, dan is voor alle takken $a_0 T''_0 = 0$. Is dus b.v. $T'_0 = 2\,T_0$, dan is de instabiliteit even ten opzichte van de periode $T'$, en derhalve oneven ten opzichte van de periode $T$.

Ter verduidelijking mogen enkele eenvoudige gevallen opgenoemd worden.

1. De curve $\Phi = 0$ raakt de lijn $\varkappa = \varkappa_0$. Bij deze waarde van den parameter ontstaan twee families, waarvan de eene stabiel, de andere even instabiel is.

2. De curve heeft een dubbelpunt. Twee families „kruisen elkaar", met uitwisseling der stabiliteit.

3. De curve bestaat uit een tak die de lijn $\varkappa = \varkappa_0$ raakt, én een tak die dezen eersten in het raakpunt snijdt. De beide voor deze

---

[1]) De namen even en oneven instabiliteit zijn van DARWIN afkomstig. POINCARÉ spreekt van instabiliteit der eerste en der tweede klasse.

[2]) Ter afkorting spreek ik over stabiele en instabiele takken, bedoelende takken waarvan alle punten stabiele, resp. instabiele, banen voorstellen.

waarde van den parameter onstaande families zijn beide stabiel of beide instabiel, de derde familie, die zoowel voor $\varkappa > \varkappa_0$ als voor $\varkappa < \varkappa_0$ bestaat, wisselt van stabiliteit.

In het volgende komen alleen de gevallen 2 en 3 ter sprake.

Bij het bewijs van deze algemeene regels wordt verondersteld dat het probleem zoodanig is dat het tot een van de tweede orde kan gereduceerd worden, zoodat er slechts twee karakteristieke exponenten ($+\alpha$ en $-\alpha$) zijn. De keuze van den parameter is gebonden aan de wijze waarop die reductie uitgevoerd wordt, of wordt gedacht uitgevoerd te zijn. DARWIN reduceert het probleem met behulp van den integraal van JACOBI. Zijn parameter is derhalve de constante $C$ van dien integraal. Deze constante $C$ is eene functie van de beide elementen $a$ en $e$. Het eerste kan ook vervangen worden door de middelbare beweging $n$, of door de periode $T = \frac{2\pi}{n-1}$. Wordt nu het probleem met behulp van den integraal van JACOBI gereduceerd, dan wordt een dier beide elementen, b.v. $T$, geëlimineerd. Deze treedt dus niet meer op als willekeurige integratie-constante, maar is geheel bepaald door $C$ en $e$. Omgekeerd is $C$ geheel bepaald door $T$ en $e$. Daar nu uit de berekeningen van DARWIN blijkt dat $T$ steeds toeneemt bij afnemende $C$, is het voor ons doel geheel onverschillig of $C$ dan wel $T$ als parameter beschouwd wordt. Terwille van de duidelijkheid gebruik ik in het volgende $T' = 2\,T$ als parameter. Deze overgang van $C$ op $T'$ laat zich ook opvatten als een vereenvoudiging van de uitdrukkingswijze. In plaats van te spreken over „de solutie die behoort bij die waarde van $C$ waarvoor de solutie van de eerste soort de periode $^1/_2\,T'$ heeft", spreek ik over „de solutie behoorende bij de waarde $T'$".

DARWIN neemt voor $\mu$ de constante waarde $\mu = 0.1$. Kiest men nu een element $\xi$, dan kan men zich de curven $\Phi\,(T', \xi)$ geconstrueerd denken. Denkt men zich dan ditzelfde gedaan voor andere waarden van $\mu$, en neemt men $\mu$, $T'$ en $\xi$ als rechthoekige coordinaten, dan vormen al die curven een oppervlak, waarvan elk punt een periodieke solutie representeert.

Neemt men daarentegen voor $T'$ een constante waarde $T'_1$ aan, en beschouwt men $\mu$ als den variabelen parameter; dan heeft men een ander probleem, dat eveneens families van periodieke soluties toelaat, die voorgesteld worden door curven $\psi\,(\mu, \xi) = 0$. Deze curven brengen bij variatie van $T'_1$ weder hetzelfde oppervlak voort. Dit oppervlak wordt in het volgende geconstrueerd, en zijn doorsnede met het vlak $\mu = 0.1$ geeft dan alle periodieke soluties van het probleem van DARWIN.

Als element kies ik $\xi = e_0 \cos \tilde{\omega}_0$, waar $e_0$ de excentriciteit en $\tilde{\omega}_0$ de

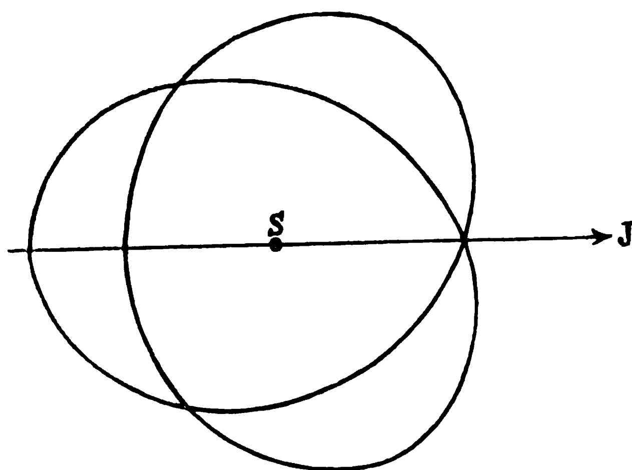
lengte van het perihelium zijn van de ongestoorde baan waartoe de baan van $P$ nadert als $\mu$ tot de limiet 0 nadert. De lengte $\tilde{\omega}_0$ wordt geteld van af een *vaste* as, die bij het begin der periode samenvalt met de lijn $SJ$. De baan van $P$ kan alleen periodiek zijn als $\tilde{\omega}_0$ een der beide waarden 0 of $\pi$ heeft. Bovendien moet bij het begin der periode $P$ zich op de lijn $SJ$ of haar verlengde bevinden.

Voor soluties van de eerste soort is $\xi = 0$. Deze soluties kunnen alle perioden hebben, derhalve maakt het geheele vlak $\xi = 0$ deel uit van ons oppervlak. De lijn $\xi = 0$ in het vlak $\mu = 0.1$ stelt de familie $A$ van Darwin voor. Deze gaat voor een waarde van $T' = 2T$ die ligt tusschen 330° en 354°, d.i. tusschen $1.83\,\pi$ en $1.97\,\pi$, over van stabiliteit tot oneven instabiliteit. Er moet dus daar kruising plaats hebben met een andere familie, die de periode $T'$ heeft, dus met een familie van de tweede soort. Als wij, om de gedachten te bepalen, aannemen dat de overgang plaats heeft voor $T' = 1.9\,\pi$, dan weten wij van den tak van $\Phi = 0$, die deze familie van de de tweede soort voorstelt, dat zij voor $T' < 1.9\,\pi$ even instabiel, en voor $T' > 1.9\,\pi$ stabiel moet zijn.

Nu zijn er slechts vier periodieke soluties van de tweede soort mogelijk, met de volgende posities van $P$ bij het begin der periode:

$B$ : $P$ in oppositie in aphelium ($\tilde{\omega}_0 = 0,\ \xi = e_0$)
$B'$ : „ „ „ „ perihelium ($\tilde{\omega}_0 = \pi,\ \xi = -e_0$)
$C$ : „ „ conjunctie „ perihelium ($\tilde{\omega}_0 = 0,\ \xi = e_0$)
$C'$ : „ „ „ „ aphelium ($\tilde{\omega}_0 = \pi,\ \xi = -e_0$)

Ten opzichte van draaiende assen, waarvan de $x$-as voortdurend samenvalt met de lijn $SJ$, zijn de banen $B$ en $B'$ identiek, en



Baan van familie $B$ of $B'$

Fig. 1.

evenzoo $C$ en $C'$. De banen $B$ en $B'$ zijn van den vorm voorgesteld in Fig. 1, de banen $C$ en $C'$ zijn van denzelfden vorm, maar 180° omgedraaid, dus met het dubbelpunt van $J$ afgekeerd.

De families $B$ en $B'$ zijn stabiel, $C$ en $C'$ zijn instabiel. Dit blijkt gemakkelijk uit de beschouwing van de vergelijking die den exponent $\alpha$ bepaalt. Deze vergelijking is (vgl. Poincaré Acta Math. XIII, pag. 134):

$$n_1^2 \alpha^2 = \frac{d^2 \psi}{d\tilde{\omega}_2^2} (n_1^2 C_{22} - 2 n_1 n_2 C_{12} + n_2^2 C_{11})$$

Neemt men nu b.v. de variabelen die Poincaré gebruikt l. c. pag. 120 en 171, dan vindt men gemakkelijk

$$n_1 = -1 \qquad n_2 = 3 \qquad C_{11} = C_{12} = 0 \qquad C_{22} = -3 x_2^{-4}.$$

Verwaarloost men verder in $\psi$ (d. i. de gemiddelde waarde van de storingsfunctie over een periode), de termen die een hoogere macht van $e$ dan de tweede bevatten, dan vindt men gemakkelijk

$$\psi = \mu K e^2 \cos \varepsilon \qquad \varepsilon = \tilde{\omega}_2 + 3 \tilde{\omega}_1$$

waar $\varepsilon$ de middelbare lengte van $P$ is bij het begin der periode, en $K$ een positieve constante.

Men heeft dus

$$\alpha^2 = 3 \mu K e^2 x_2^{-4} \cos \varepsilon,$$

waaruit onmiddellijk blijkt dat (bij positieve $\mu$) $\alpha^2$ negatief is, dus de baan stabiel, wanneer er bij het begin der periode oppositie is.

Voor positieve $\mu$ is dus $BB'$ stabiel en $CC'$ instabiel, voor negatieve $\mu$ is het omgekeerd.[1]) Het is duidelijk dat voor $\xi = 0$ $B$ met $B'$ en $C$ met $C'$ samenvalt. De tak, die de lijn $\xi = 0$ snijdt in het punt $T' = 1.9\,\pi$ representeert dus òf de familie $BB'$ òf $CC'$. In het eerste geval is hij stabiel en moet dus van af het snijpunt aan beide kanten naar rechts afbuigen, in het andere geval is hij instabiel en moet het stabiele deel der lijn $\xi = 0$ insluiten.

Nu heeft Darwin voor $C = 39.0$, d. i. $T' = 1.97\,\pi$ werkelijk een baan geconstrueerd, die den vorm vertoont van fig. 1, n.l. de reeds geciteerde baan $x_0 = -.337$. Deze behoort dus tot de familie $B$, maar evenzeer tot $B'$. De tak van $\Phi = 0$ die door het punt $T' = 1.9\,\pi$ gaat representeert derhalve de familie $BB'$, en het gedeelte van de doorsnee van ons oppervlak met het vlak $\mu = 0.1$ dat ter linkerzijde van de lijn $T' = 2\,\pi$ gelegen is, is hiermede volledig geconstrueerd. Deze doorsnede is voorgesteld in Fig. 2. Stabiele families zijn daar, en in de volgende figuren, voorgesteld door zware voluitgetrokken

[1]) De beteekenis van negatieve $\mu$ is dat de van $J$ uitgaande kracht afstootend is, terwijl de van $S$ uitgaande aantrekkend blijft.

lijnen, oneven instabiele door gebroken lijnen, en even instabiele door gestippelde lijnen.

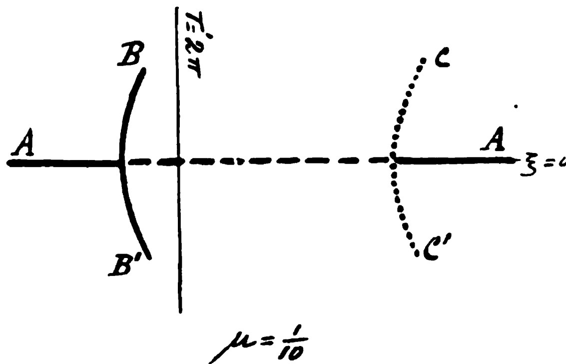


Fig. 2.

Beschouwen wij thans de doorsnee van ons oppervlak met het vlak $\mu = 0$. We weten dan dat er stabiele periodieke soluties zijn van de eerste soort met willekeurige periode, en van de tweede soort met de periode $T' = 2\pi$ en willekeurige excentriciteit. De doorsnee bestaat derhalve uit de lijn $\xi = 0$ en het stuk van de lijn $T' = 2\pi$ dat besloten is tusschen de punten $\xi = +1$ en $\xi = -1$. Ik wensch mij echter te bepalen tot kleine waarden van $\xi$. Deze doorsnede is voorgesteld in Fig. 3.

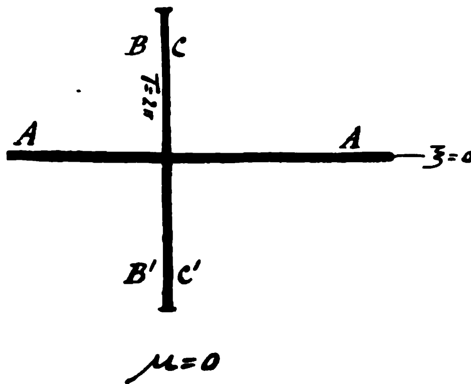


Fig. 3.

Beschouw nu de doorsnee met een vlak $T' = T_1'$, waar $1.9\,\pi < T_1' < 2\,\pi$, en de curven $\psi(\mu, \xi) = 0$ in dit vlak. De lijn $\xi = 0$ maakt deel uit van deze curve. Het onderste deel dezer lijn is stabiel, het bovenste is oneven instabiel. In het punt, waar de overgang plaats heeft, wordt de lijn $\xi = 0$ gesneden door den tak van $\psi = 0$, die de familie $BB'$ representeert. Daar deze stabiel is moet die tak aan beide kanten van het snijpunt opwaarts buigen, zooals in fig. 4*a* voorgesteld is.

Beschouwen wij eindelijk de doorsnede van ons oppervlak met een vlak evenwijdig aan $\xi = 0$ en op zeer kleinen afstand daarvan. De curven $\chi(\mu, T')$ in dit vlak representeeren uitsluitend soluties van de tweede soort. Men kan zich deze ontstaan denken door variatie van $\mu$ uit de ongestoorde solutie van de tweede soort, dus als soluties

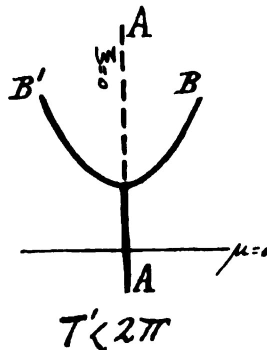



Fig. 4a.

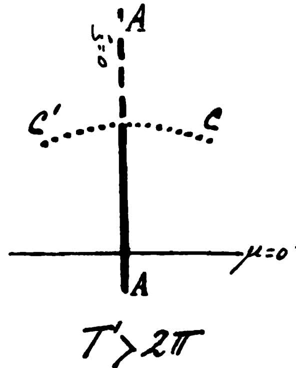



Fig. 4b.

van een probleem dat $\mu$ tot parameter heeft, waarbij $\xi$ niet variabel is, en waarbij dus $T'$ (of $C$) als element optreedt. Deze soluties zijn door SCHWARZSCHILD bestudeerd (Astr. Nachr. 3506). De solutie voor $\mu = 0$ heeft de periode $2\pi$. Voor niet te groote waarden van $\mu$ bestaan er voor elke waarde van $\xi$ twee soluties, en wel $B$ en $C$ voor positieve $\xi$, $B'$ en $C'$ voor negatieve $\xi$. De curve $\chi = 0$ bestaat derhalve uit twee takken, die elkaar snijden in het punt $\mu = 0$, $T' = 2\pi$, en daar van stabiliteit wisselen. Daar nu reeds gebleken is dat de stabiele tak $B$ voor positieve $\mu$ aan den kant der kleine $T'$ ligt, moet de instabiele tak $C$ aan den kant der groote $T'$ liggen. De curven zijn voorgesteld in Fig. 5.

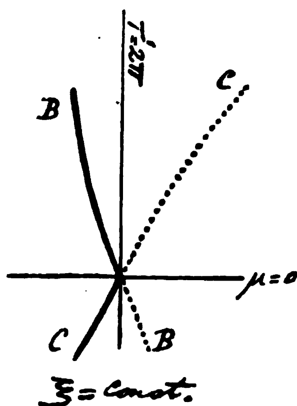



Fig. 5.

Ons oppervlak bestaat derhalve uit het vlak $\xi = 0$ en uit twee bladen, die elkaar snijden in de lijn $\mu = 0$, $T' = 2\pi$, en zich dan naar links en rechts van het vlak $T' = 2\pi$ verwijderen. De punten van het linksche blad representeeren de stabiele familie $BB'$, die van het rechtsche blad de instabiele familie $CC'$. Dit laatste zal derhalve het vlak $\mu = 0.1$ snijden in een kromme die aan beide zijden van haar snijpunt met de lijn $\xi = 0$ naar rechts ombuigt, zoodat zij het stabiele deel dier lijn insluit. Dit is in Fig. 2 aangegeven. Ook de vorm van de doorsnee met een vlak $T' = T_2' > 2\pi$, zooals die in fig. 4b is weergegeven, is zonder meer duidelijk. Of dit rechtsche blad het vlak $\mu = 0.1$ nog bereiken zal, is niet uit te maken. Als er een snijpunt is, moet dit liggen bij een waarde van $T'$ die grooter is dan $414.°3 = 2.23\pi$, daar voor deze waarde de familie $A$ nog steeds oneven instabiel is. Dat het andere blad dit vlak inderdaad snijdt blijkt uit het bestaan der door DARWIN

geconstrueerde baan van de familie $BB'$ (en trouwens ook al uit de stabiliteitswisseling der familie $A$).

Hiermede zijn alle resultaten gevonden, die door POINCARÉ in de reeds geciteerde paragraphen zijner „Méthodes Nouvelles" zijn afgeleid. Natuurlijk moet ook POINCARÉ de vraag of zijne resultaten nog blijven gelden voor $\mu = 0.1$ onbeantwoord laten.

Het is niet onbelangrijk de soluties $B$ en $C$ te beschouwen van het standpunt van de storingstheorie. Deze kan ons natuurlijk niets leeren omtrent hunne stabiliteit, doch wel iets omtrent den vorm van de curven $\psi(\mu, T')$ voor kleine waarden van $\mu$ en $\xi$. De periode van de ongestoorde periodieke solutie is $2\pi$. Door de storingen wordt deze veranderd tot $T' = 2\pi + \tau$. De condities dat de gestoorde baan periodiek zal zijn, zijn

$$\int_0^{T'} \frac{d\tilde{\omega}}{dt}\, dt = \tau \qquad\qquad \int_0^{T'} \frac{d\lambda}{dt}\, dt = 6\pi + \tau,$$

waar $\lambda$ de middelbare lengte van $P$ is. Voor de berekening van de integralen moet gebruik gemaakt worden van de gestoorde middelbare beweging $n = 3 + \sigma$. De eerste leden der beide conditie-vergelijkingen zijn dus functies van $\sigma$ en $\tau$, waaruit deze beide grootheden bepaald kunnen worden.

Verwaarloost men in deze conditie-vergelijkingen het quadraat en de hoogere machten van $e$, dan worden ze

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \frac{na}{4}(2\pi + \tau)\,\mu\,[B^{(1)} \pm \{21\,A^{(3)} + 10\,A_1^{(3)} + 2\,A_2^{(3)}\}] \\ 6\pi + \tau &= (3 + \sigma)(2\pi + \tau) - na\,(2\pi + \tau)\,\mu\,A_1^{(0)} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

waar het onderste teeken in de eerste vergelijking betrekking heeft op de familie $BB'$, het bovenste teeken op $CC''$. Daar de som in de $\{\ \}$ grooter is dan $B^{(1)}$ is voor de eerste familie $\tau$ negatief, voor de tweede positief, in overeenstemming met wat boven gevonden is. Verder blijkt uit de eerste vergelijking dat de absolute waarde van het differentiaal-quotient $\frac{d\tau}{d\mu}$ voor de eerste familie met toename van $\mu$ afneemt, voor de tweede toeneemt. Hieruit volgt de kromming van de curven $\psi(\mu, T') = 0$ in den zin zooals in fig. 5 is aangegeven.

Bij de numerische uitwerking der formules (1) moet niet vergeten worden dat deze slechts als benaderingen mogen opgevat worden. De oplossing door successieve benadering is gemakkelijk uit te voeren met behulp van de tafels van RUNKLE, waarbij het argument voor de bepaling der verschillende functies $A_p^{(i)}$ wordt berekend door

$$n = 3 + \sigma \qquad n^2 a^3 = f = \frac{10}{11}$$

Ik vind aldus voor de twee families:

$$B: \quad \frac{\tau}{2\pi} = -0.085 \qquad T' = 1.83\,\pi$$

$$C: \quad \frac{\tau}{2\pi} = +0.29 \qquad T' = 2.58\,\pi$$

Deze perioden $T'$ zijn die van de banen der beide families, waarvoor $\xi = 0$, en die dus samenvallen met een lid der familie A, waarvan de periode is $T = \frac{1}{2}\,T'$. Uit de berekeningen van DARWIN blijkt dat de waarde van $T'$ waarvoor de samenvalling van de familie $A$ en $B$ plaats grijpt moet liggen tusschen 1.836 $\pi$ en 1,97 $\pi$, terwijl de samenvalling van $A$ en $C$ buiten het door DARWIN onderzochte gebied valt, en dus moet plaats hebben voor een waarde van $T'$ die grooter is dan 2.23 $\pi$.

**Natuurkunde.** — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N°. 98 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden, H. KAMERLINGH ONNES en G. H. FABIUS: *Herhaling van de proeven van* DE HEEN *en* TEICHNER *omtrent den kritischen toestand.*

(Aangeboden in de vergadering van 26 April 1907).

§ 1. *Inleiding.* Herhaaldelijk zijn proeven verricht, uit welke het besluit getrokken werd, dat eene stof boven hare kritische temperatuur bij denzelfden druk en dezelfde temperatuur verschillende dichtheden kan aannemen, die zij volgens sommigen [1]) uren lang kan behouden. Dat dit in werkelijkheid niet het geval is, en de gevonden verschillen aan bijmengselen of aan verschillen in druk of temperatuur bij de vergeleken phasen moeten worden toegeschreven is reeds gebleken

---

[1]) TRAUBE Ztschr. f. phys. Chem. 58 p. 477. 1907, verg. ook MATHIAS, Le point critique des corps purs p. 250.

Wanneer bij verandering van dichtheid dissociaties of volumeveranderingen der moleculen zelve optraden, die duidelijk langeren tijd vereischten dan het bereiken van temperatuur evenwicht door warmtegeleiding en convectie, zoo zou men, wanneer eene phase na eene dichtheidsverandering te hebben ondergaan op standvastig volume gehouden werd eene toename van den druk moeten vinden, zoowel voor vloeistof- en dampphasen als voor phasen boven de kritische temperatuur; thermodynamisch volgt daaruit dat de dichtheid van vloeistof in evenwicht met damp dan ook een functie van den tijd zou moeten zijn.

Over dichtheidsverschillen door valsche evenwichten zie TRAVERS en USHER.

toen KUENEN (Med. n°. 11 Zitting Versl. Mei en Juni 1894) GALITZINES proeven (Wied. Ann. 50. 1893) herhaalde en slechts onbeduidende restverschillen vond. Later, toen DE HEEN (Bull. Ac. Belg. 3e S. t. XXXI '96) weder tot de bedoelde dichtheidsverschillen langs anderen weg gekomen was, is door herhaling van zijne proeven te Leiden (Med. N°. 68 Ztg. Versl. Mrt. en April 1901) aangetoond, dat die dichtheidsverschillen bij zuiver $CO_2$ en bij inachtneming der temperatuurverschillen eveneens bijna geheel verdwijnen. Aan de meening, dat die verschillen toch wel bestaan, zijn echter in de laatste jaren voornamelijk de proeven van TEICHNER [1]) (Drudes Ann. 13, 1904) opnieuw voedsel komen geven.

Wij hebben nu in de eerste plaats de proef van DE HEEN nog eens op verschillende wijzen herhaald. Reeds bij de vroegere herhaling (1901) waren ter bepaling van het verschil in temperatuur van de beide door een kraan gescheiden metalen reservoirs van den toestel, die overigens uit den aard der zaak zooveel mogelijk met die van DE HEEN overeenkwam, thermo-elementen aangebracht. Een van deze was echter bij de proeven beschadigd. Terwijl kon worden vastgesteld, dat de dichtheidsverschillen ook zonder temperatuurscorrectie, waarschijnlijk ten gevolge van de grootere zuiverheid van het $CO_2$, vrij wat kleiner werden dan de door DE HEEN gevondene, kon het juiste bedrag van het na temperatuur-correctie overblijvend verschil niet worden bepaald. Om die metingen door betere te vervangen is toen een nieuwe, wederom verbeterde, doch overigens nog altijd zooveel mogelijk bij dien van DE HEEN zich aansluitende toestel met thermoelementen gebouwd, met welke wij de in § 3 medegedeelde waarnemingen verricht hebben. Deze bevestigen dat de door DE HEEN uit zijn proeven afgeleide dichtheidsverschillen bij een zuivere stof als temperatuur en druk gelijk zijn niet bestaan. [2])

---

[1]) In de buis van TEICHNER worden door GILBERT-FARADAY'sche zwevertjes dezelfde dichtheidsverschillen aangetoond, als GALITZINE en WILIP Congr. Intern. de Physique I 668, 1900 hadden gevonden. Wat van de proeven van TEICHNER geldt is dus ook van toepassing op die van GALITZINE en WILIP.

[2]) Wanneer er dus al processen als in § 1 noot 1 bedoeld bestaan, zoo loopen deze in zoo korten tijd af, dat het niet mogelijk is ze aan te toonen met methoden, die vereischen, dat het druk- en temperatuur-evenwicht wordt afgewacht. Tot nog toe is verder niets gevonden, dat er op wijst, dat het instellen van het temperatuur-evenwicht een merkbaren tijd vertraagd wordt door met den tijd tot een bepaalde grenswaarde aangroeiende energieveranderingen.

In Med. N°. 68 werd betoogd, dat bijmengselen en temperatuurverschillen tot systematische storingen als bij DE HEEN's proeven leiden. Beide geven tot storingen van hetzelfde karakter aanleiding. Bij de behandeling van den invloed der temperatuurverschillen is aldaar de belangrijke verhandeling van VILLARD Ann. d. Ch. et

Verder hebben wij de proef van TEICHNER herhaald [1]) met meer voorzorgen dan door dien waarnemer zijn genomen. In het bijzonder werd in de buis van TEICHNER boven en beneden, als bij den gewijzigden toestel van DE HEEN, een thermoelement (platina-platina-iridium om de waarborgen die de glazen toestel voor behoud van de zuiverheid van de stof aanbiedt niet op te offeren) aangebracht om de temperatuurverschillen in de buis te kunnen volgen.[2]) Door de proef met $CO_2$ te verrichten kon een hooge graad van zuiverheid worden bereikt en kwamen wij in een gebied, waar de temperatuur tot op een zeer klein bedrag standvastig kan worden gehouden.

Wanneer men diffusie tusschen de phasen boven en beneden wil tegengaan, staat de gewijzigde buis van TEICHNER (zoolang ten minste niet een capillaire insnoering daarin aangebracht wordt [3]) achter bij den gewijzigden toestel van DE HEEN. Ook heeft zij wanneer men snel het evenwicht van temperatuur wil bereiken de slechte warmtegeleiding van het glas tegen, maar zij heeft het groote voordeel, dat men de dichtheidsveranderingen tegelijk met de andere verschijnselen bij den kritischen toestand kan gade slaan. Wat die verschijnselen betreft verschenen belangrijke verhandelingen van TRAVERS en USHER (Ztschr, f. phys. Chem. 57, p. 365, 1906) en YOUNG (ibid p. 262) nadat wij de proeven in § 7 reeds verricht hadden. Onze waarnemingen stemmen in hoofdzaak overeen met de door TRAVERS en USHER en door YOUNG gegeven beschrijvingen en vullen deze aan met de opgave van de verandering der dichtheden.

Na hetgeen de herhaling van de proeven van DE HEEN ons weder omtrent de beweerde dichtheidsverschillen bij denzelfden druk en

---

d. Phys (7) 10. 1897 over 't hoofd gezien. Dat de uitkomsten van TEICHNER aan kleine bijmengselen kunnen worden toegeschreven is tot in bijzonderheden gebleken uit de berekeningen van VERSCHAFFELT Med. Suppl. n°. 10 (Dec. 1904).

Op den invloed van bijmengselen op verschijnselen in de nabijheid van het kritisch punt wijst ook YOUNG. Journ. Chem. Phys. 4 (1906) p. 475. Hieraan kan toegevoegd worden dat door KEESOM, Meded. No. 88, Zittingsversl. Nov. '03 p. 621, het oploopen van den druk gedurende de condensatie bij gelijkblijvende temperatuur niet slechts werd beschouwd als een bewijs voor de aanwezigheid van bijmengselen, doch dat dit hem verder diende om tot een oordeel over de hoeveelheid bijmengsel te geraken.

[1]) Dit werd reeds vermeld Med. Suppl. No. 10 Ztg. Versl. Dec. 1904 § 1. Eene herhaling werd laatstelijk nog zeer aanbevolen door TRAUBE.

[2]) In een CAGNIARD LATOUR'sche buis werden door VILLARD thermometertjes ingesmolten. Onze buis kan evengoed een VILLARD'sche buis met zwevertjes als een TEICHNER'sche buis met thermo-elementen genoemd worden.

[3]) Een dergelijk toestelletje desnoods nog voorzien met een magnetisch bewogen klepje, zou bij het onderzoek der dichtheidsveranderingen met de temperatuur diensten kunnen bewijzen.

dezelfde temperatuur boven de kritische temperatuur had geleerd, is onze herhaling van de proeven van TEICHNER meer een eerste bijdrage tot de studie van de dichtheidsveranderingen met de temperatuur langs dezen weg, dan eene weerlegging van de uit de proeven van TEICHNER gemaakte gevolgtrekkingen geworden. Wij hebben echter door onze proeven voldoende kunnen aantoonen, dat die gevolgtrekkingen ten onrechte zijn gemaakt.

§ 2. *Herhaling van een der proeven van* DE HEEN. Terwijl wat de keuze der te herhalen proef (wegens het systematisch karakter der afwijkingen behoeft slechts éene te worden herhaald) op Med. n°. 68 verwezen kan worden en bij een andere gelegenheid een uitvoerige beschrijving van den gebruikten toestel en de verschillende bewerkingen gegeven zal worden, meenen wij ons hier omtrent de inrichting der proeven tot het volgende te kunnen bepalen.

1°. Het zuivere koolzuur werd door distillatie bereid. De bijmengselen zijn te stellen op niet meer dan 0,00027 (zie KEESOM Med. N°. 88 II, § 2 Ztg. Versl. Sept 1903 en V, § 10 Oct. 1903). Het komt in den toestel alleen in aanraking met metaal glas en kurk (pakkingen hiervan gaven na gedurende een week telkens te zijn aangezet een volkomen sluiting).

2°. De toestel, de geleidingen en verdere hulpinrichtingen waaronder ook twee metalen fleschjes met het gezuiverde $CO_2$, staan alle met een kwikluchtpomp in verbinding. Het eene der fleschjes met zuiver $CO_2$ dient voor omspoelen. Uit het tweede wordt de gewenschte hoeveelheid door distillatie in den toestel overgebracht.

3°. De dichtheid in elk reservoir wordt bepaald door het koolzuur daaruit over te laten stroomen in een op standvastige temperatuur gehouden groot reservoir met kwikmanometer. Bij de volumenometrische berekeningen werden de correcties aangebracht volgens de empirische toestandsvergelijking V. s. 1 van Med. n°. 74 (Arch. Neerl. S II T. VI 1901). Fouten in de dichtheid door lekken uit de reservoirs op hoogen druk zijn uitgesloten. Door afzonderlijke contrôleproeven werd uitgemaakt, dat de totale hoeveelheid $CO_2$ in den toestel gedurende de proeven onveranderd bleef.

4°. De toestel werd op gelijkmatige standvastige temperatuur gehouden met behulp van stroomend water, een xylolregulateur (zie Meded. 70 III § 3 Zitt. Versl. Mei 1901) en een kleproerder (zie Meded. 83 III § 4 Zitt. Versl. Dec. 1902). Tegen warmtegeleiding van buiten naar deelen van den toestel zijn voldoende voorzorgen genomen.

§ 3. *Dichtheidsverschillen bij de herhaling van de proef van* DE HEEN *gevonden na correctie van het verschil in temperatuur der reservoirs.*

DE HEEN brengt de beide reservoirs (zie § 2 aanhef) van 28°

op nagenoeg 35° en opent gedurende de verwarming de tusschenkraan 6 maal 4 seconden; vervolgens als de temperatuur op nagenoeg 35° standvastig gevonden is herhaalt hij het openen nog 6 maal gedurend 4 seconden. Hij neemt aan dat dan in beide reservoirs temperatuur en druk dezelfde zijn.

Bij herhaling van de proef (overspatten uit het eene reservoir in het andere zorgvuldig vermijdende) vonden wij door aflezing der thermoelementen (nikkel-ijzer) bevestigd, wat in Med. N°. 68 werd opgemerkt, n.l, dat telkens wanneer de tusschenkraan tot drukvereffening geopend wordt, tusschen beide reservoirs een temperatuursverschil ontstaat, en dat het bij het afsluiten van de kraan aan het einde van de proef een temperatuurverschil overblijft, dat in rekening moet worden gebracht.

Ten einde er over te oordeelen in hoeverre het temperatuur- en drukevenwicht bereikt is, hebben wij in de eerste plaats 3 bepalingen verricht waarbij de tusschenkraan respectievelijk telkens 2, 4 en 6 seconden (onze kraan liet waarschijnlijk betrekkelijk minder door dan die van DE HEEN) geopend werd. De uitkomsten zijn in de volgende Tabel opgegeven: $v$ heeft op het boven- $l$ op het benedenreservoir betrekking, zoo geeft $\varrho_l$ de dichtheid in het benedenreservoir aan; het aantal malen dat de kraan gedurende de verwarming (over 15 minuten verdeeld) en daarna bij standvastige temperatuur (over een half uur verdeeld) geopend werd is afzonderlijk opgegeven; $\varrho'_l$ is $\varrho_l$ gecorrigeerd voor $t_v - t_l$.

SERIE I.

| Instelling van het evenwicht door het openen van de kraan. | $\varrho_v$ | $\varrho_l$ | $\varrho_l/\varrho_v$ | $t_v$ | $t_v - t_l$ | Voor temperatuurverschil gecorrigeerd | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | $\varrho'_l$ | $\varrho'_l/\varrho_v$ |
| 6 maal 2 + 6 maal 2 sec. | 0.418 | 0.506 | 1.21 | 34°.25 | 0°.27 | 0.456 | 1.09 |
| 6 maal 4 + 6 maal 4 sec, | 0.424 | 0.495 | 1.17 | 34.40 | 0.22 | 0.454 | 1.08 |
| 6 maal 6 + 6 maal 6 sec. | 0.427 | 0.489 | 1.15 | 34.20 | 0.16 | 0.456 | 1.07 |
| 6 maal 6 + 6 maal 6 sec. | 0.437 | 0.501 | 1.15 | 34.30 | 0.20 | 0.466 | 1.07 |

De temperatuurcorrecties zijn ontleend aan de in Med. N°. 68 uit AMAGAT's bepalingen afgeleide grafische voorstelling. De onzekerheid, die omtrent den juisten loop der isothermen in de nabijheid van den kritischen toestand nog bestaat, is natuurlijk op deze correcties overgegaan.

Het vrij snelle verloop der verwarming van 28° op 35° verhindert

verder, dat de geheele toestel reeds de temperatuur van het waterbad heeft aangenomen, zoodat ook de waargenomen temperatuurverschillen zelve niet geheel zeker zijn.

Bij de volgende serie bepalingen werd op dezelfde wijze gehandeld tot de 12[e] opening (de 6[e] bij standvastige temperatuur). Deze werd 3 uur uitgesteld. Bij het openen van de tusschenkraan bleek het verloop der uitslagen van den galvanometer hetzelfde als bij de vorige serie, alleen waren de overblijvende temperatuurcorrecties iets kleiner dan in de 1[e] serie, wat wij hieraan toeschrijven, dat alle deelen van den toestel den tijd gehad hebben de temperatuur van het waterbad aan te nemen. Van een verhooging van druk in het benedenreservoir, die gevonden had moeten zijn, wanneer bijv. in dit benedenreservoir gedurende deze 3 uren molekulen gedissocieerd waren, (zie § 1 noot 3) en die tot eene grooteren galvanometeruitslag bij de laatste opening van de tusschenkraan had moeten aanleiding geven, is niets gebleken. Gevonden werd :

SERIE II.

| Instelling van het evenwicht door het openen van de kraan. | $p_v$ | $p_l$ | $p_e/p_v$ | $t_v$ | $t_v-t_l$ | Voor temperatuurverschil gecorrigeerd. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | $p'_l$ | $p'_l/p_v$ |
| 6 + 5 + 1 maal 2 sec. | 0.430 | 0.497 | 1.16 | 34°.55 | 0°.20 | 0.466 | 1.08 |
| 6 + 5 + 1 maal 4 sec. | 0.440 | 0.489 | 1.11 | 34.85 | 0.16 | 0.456 | 1.04 |
| 6 + 5 + 1 maal 6 sec. | 0.439 | 0.485 | 1.10 | 34.40 | 0.15 | 0.452 | 1.03 |

Bij een volgende bepaling werd op grond van wat de vorige over het bereiken van temperatuur en drukevenwicht hadden geleerd de kraan 12 maal 12 secunden geopend, terwijl ten slotte nog twee bepalingen gedaan werden bij welke de kraan 12 maal 4 seconden en ten slotte nog eens 5 minuten geopend werd. Gevonden werd

SERIE III.

| Instelling van het evenwicht door het openen van de kraan | $p_v$ | $p_l$ | $p_l/p_v$ | $t_v$ | $t_v-t_l$ | Voor temperatuurverschil gecorrigeerd | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | $p'_l$ | $p_l/p_v$ |
| 6 + 6 maal 12 seconden | 0.446 | 0.488 | 1.09 | 34.70 | 0°.20 | 0.456 | 1.02 |
| 6 + 6 maal 12 sec. } | 0.427 | 0.445 | 1.04 | 34.05 | 0.06 | 0.432 | 1.01 |
| ten slotte 5 minuten } | 0.462 | 0.478 | 1.03 | 34.00 | 0.06 | 0.467 | 1.01 |

Hieruit volgt, dat naarmate het druk- en temperatuur-evenwicht beter verkregen is, de dichtheid der phasen meer en meer gelijk wordt en dat ten slotte na het aanbrengen der temperatuurcorrectie slechts zeer kleine verschillen overblijven.

De door DE HEEN gevonden *veel grootere* afwijkingen ($\varrho_l/\varrho_v = 1.19$ zie Med. No. 68) zijn dus aan bijmengselen of temperatuursverschillen toe te schrijven [1] [2]).

§ 4. *Voorbeeld van dichtheidsverschillen als de door* DE HEEN *gevondene, tengevolge van eene kleine verontreiniging van het* $CO_2$.

Zeer overtuigend wordt de groote invloed van kleine hoeveelheden bijmengsel aangetoond door de volgende ervaring.

Bij eene met herhaling van proef 2 Serie I eindigende groep van bepalingen werden gevonden:

| Instellen van het evenwicht door openen van de kraan | $\varrho_v$ | $\varrho_l$ | $\varrho_l/\varrho_v$ |
|---|---|---|---|
| 6 + 6 maal 6 sec. | 0 392 | 0 531 | 1 35 |

Het bleek dat in het metalen fleschje, waarin het zuivere koolzuur bewaard werd, tengevolge van een verzuim in de reiniging na eene herstelling in de werkplaats een spoor olie was achtergebleven, waarmede het koolzuur bezwangerd was geworden. Nadat wij meenden den geheelen toestel met doorblazen voldoende gereinigd te hebben werd — wat tevens naast Serie I en II een oordeel geeft over het benaderen van het drukevenwicht door het herhaald openen van de kraan — gevonden:

| Instelling van het evenwicht door openen van de kraan. | $\varrho_v$ | $\varrho_l$ | $\varrho_l/\varrho_v$ |
|---|---|---|---|
| Alleen 6 maal 4 sec. gedurende het stijgen van de temperatuur. | 0.385 | 0.555 | |
| 6 + 3 maal 4 sec. | 0.399 | 0.521 | 1.30 |
| 6 + 6 maal 4 sec. | 0.417 | 0.505 | 1.21 |

[1]) Dat gedurende het openen van de kraan, om met DE HEEN te spreken, geen belangrijke uitwisseling van liquidogene en gasogene moleculen tusschen het boven- en benedenreservoir kan hebben plaats gevonden blijkt daaruit, dat bij vulling van het boven reservoir met lucht en van het beneden-reservoir met lucht met 31 pCt. $CO_2$, instellen van het evenwicht buiten de gesloten kraan om, en daarna opening van de kraan gedurende 5 minuten in het boven-reservoir slechts 0.33 pCt. $CO_2$ was overgegaan.

[2]) Beide geven systematische fouten van hetzelfde karakter (verg. § 1 noot 2 boven).

en bij herhaling van de laatste bepaling na nog langer voortgezet doorblazen

6 + 6 maal 4 sec. | 0.426 | 0.496 | 1.19

De laatste waarneming stemt weder vrij wel overeen met Serie I No. 2, van welke zij eene herhaling is, ook worden dezelfde galvanometer uitslagen gevonden. Zij voert tot dezelfde $\varrho_l/\varrho_v$.

Het blijkt wel hoe misleidend een kleine verontreiniging zijn kan en dat in Med. No. 68 de leerpakkingen terecht een principieele fout van den toestel van DE HEEN zijn genoemd (verg. sub 1° § 2 boven).

§ 5 *Correctie voor de zwaartekracht en voor kleine bijmengselen bij de proef van* DE HEEN. *Slotsom.*

Om de correctie, die voor de zwaartekracht aan $\varrho'_l/\varrho_v$ moet worden aangebracht, te kunnen berekenen moet men de dichtheid als functie van de hoogte in een zuil van zuiver $CO_2$ kennen. Die functie is bij de onzekerheid omtrent het juist beloop der isothermen bij den kritischen toestand niet juist bekend [1]). GOUY heeft de toestandsvergelijking van SARRAU aan zijne berekening er van ten grondslag gelegd. Wij zijn uitgegaan van de toestandsvergelijking V. s. 1 van Med. N°. 74. Voor de correctie bij 34° en 8 c.M. hoogte verschil wordt slechts 0,0002 gevonden, zoodat zij verwaarloosd mag worden. Wat de correctie voor de bijmengselen bij het $CO_2$ betreft, zij wordt, wanneer wij als in § 2 aangegeven deze op 0,00027 stellen, volgens de berekeningen van VERSCHAFFELT Med. Suppl. N°. 10 bij 34°.5 1 °/₀ à 1,5 °/₀. Neemt men de onzekerheid van die correctie in aanmerking, zoo moet men, waar de grens van nauwkeurigheid van onze proeven ook niet op meer dan 1 °/₀ gesteld mag worden tot de slotsom komen, dat de dichtheidverschillen, die DE HEEN uit zijne proeven afleidt, indien voldoende voor druk- en temperatuurevenwicht gezorgd wordt in zuiver $CO^2$ niet bestaan.

§ 6. *Herhaling van de proef van* TEICHNER. Eene uitvoerige beschrijving van den toestel en de bewerkingen zal bij een andere gelegenheid gegeven worden. Hier meenen wij ons tot het volgende te kunnen bepalen:

1°. Herhaling met $CO_2$ werd wegens de grootere waarborgen van zuiverheid ook door TEICHNER wenschelijk geoordeeld.

2°. Het gelukte in de buis van TEICHNER boven en beneden een platina-iridium thermo-element (gebruikt met een pantsergalvanometer van DUBOIS) in te smelten, zoodat de buis toch tegen een druk van 150 atmosfeer bestand bleef. Intusschen werd nog niet bereikt, dat

1) Tot de kennis van dit beloop kunnen waarnemingen als in § 3 en § 7 verricht juist bijdragen.

de thermoelementen vrij van storende electromotorische krachten waren en de door ons gewenschte nauwkeurigheid van 0°,01 gaven. De contactplaatsen bevonden zich op $^1/_4$ en $^3/_4$ van de hoogte van het buisje. Een derde thermo-element om de temperatuur in de buis met die in het bad te vergelijken zou wenschelijk zijn.

3°. Daar de kritische dichtheid van $CO_2$, 0.469 [1]) geringer is dan die van $CCl_4$, met welke stof TEICHNER werkte, was het veel moeilijker de noodige zwevertjes (glasbolletjes) van 0.365, 0.390 en 0.405 te verkrijgen. Wij hebben ze evenals het insmelten der thermo-elementen aan de kunstvaardigheid van den Heer O. KESSELRING, chef der glasblazerswerkplaats van het laboratorium, te danken. Met behulp van de formule van CLEBSCH werd gevonden, dat de volume vermindering der bolletjes bij de hoogste drukken slechts van $^1/_{600}$ tot $^1/_{400}$ kan bedragen.

4°. Aan het zuiveren van het $CO_2$ werd nog grooter zorg besteed dan bij de herhaling van de proef van DE HEEN. Uit een metalen fleschje met $CO_2$ als bij de laatste gebruikt, wordt nog eens $^1/_3$ afgeblazen, en eerst daarna $^1/_3$ in een tweede overgedistilleerd, waaruit men onder weging zooveel laat ontsnappen, dat een afgepaste hoeveelheid er in overblijft. Dit tweede fleschje wordt door glazen buizen met het proefbuisje, een kwikmanometer een kwikluchtpomp en een hulpfleschje (eveneens van metaal) met zuiver $CO_2$ voor het omspoelen der leidingen verbonden, waarna men de afgepaste hoeveelheid die het bevat, in het proefbuisje geheel overdistilleert terwijl dit laatste in vloeibare lucht gedompeld wordt; ten slotte wordt het proefbuisje, nog altijd in vloeibare lucht gedompeld, aan de kwikluchtpomp verbonden en afgesmolten. Door wegen wordt gecontroleerd dat de gewenschte hoeveelheid in het proefbuisje is overgegaan.

5°. Een verwarming, die niet tot convectiestroomen binnen het buisje aanleiding geeft, wordt ook door TEICHNER en TRAUBE, om dooreenmenging van wat zich boven en beneden bevindt te vermijden, van groot gewicht geacht. YOUNG's weerlegging van zijne proeven (te vinden bij TEICHNER l.c.) wordt door TEICHNER niet aanvaard, omdat bij YOUNG's toestel convectiestroomen niet zoo goed vermeden worden als bij dien van hemzelf. De door ons gebruikte thermostaat voldoet echter weder aan veel hoogere eischen dan die van TEICHNER. Het vloeistofbad, waarin het buisje gedompeld wordt, bevindt zich in een niet verzilverd met een slecht geleidend deksel hermetisch gesloten dubbelwandig vacuumglas met kleproerder en inrichting

---

[1]) Door KEESOM Med. N°. 88 Zittingsverslag Oct. 1903 p. 553 afgeleid met behulp van den regel van den rechtlijnigen diameter uit zijne waarnemingen.

om van boven af electrisch verwarmd te worden, dat zelf weder ondergedompeld is in een eveneens met kleproerder voorzien bad met dubbele glazen wanden, waarvan met uitzondering van twee vensters de tusschenruimte opgevuld en de buitenwand omhuld is met watten, en dat evenals het bad, waarin de gewijzigde toestel van DE HEEN (§ 2) geplaatst was, door stroomend water met behulp van een xylolregulateur (§ 2) op standvastige temperatuur (tot op 0°,02) gehouden wordt. De temperatuur van het bad waarin het proefbuisje zich bevindt, kan op deze wijze tot op 0°,002 constant worden gehouden. De verwarming geschiedt naar de aanwijzing van in het binnen- en in het buitenbad aangebrachte in 50e graden verdeelde thermometers, en wordt zoo geregeld, dat elke aanleiding tot convectiestroomen zooveel mogelijk wordt weggenomen.

6°. Bij de manipulaties bleef het buisje steeds binnen doelmatige omhulsels ter bescherming van den waarnemer.

§ 7. *Waarnemingen.* De bolletjes komen overeen met de dichtheden 0.365, 0.390. 0.405, 0.421, 0.443, 0.450, 0.466, 0.483 en 0.510.

De stand der bolletjes en die van den meniscus (in 't volgende aangegeven door het afgelezen getal van de deelstreep tusschen [ ]) werd afgelezen op een op het buisje geëtst millimeterschaaltje, midden op het buisje bevindt zich de deelstreep 30 het nulpunt is 20 mM. boven den bodem.

Bij de eerste proef werd zeer langzaam verwarmd; aanvankelijk werd ook het binnenbad (electrisch) verwarmd, $t_b$ heeft op het buiten-, $t_i$ op het binnenbad betrekking. Na 3 uur werd opgemerkt, dat van het benedenste thermoelement kleine gasbelletjes opstijgen, vermoedelijk veroorzaakt door warmtegeleiding langs de draden doordat $t_b$ teveel opgeloopen is. Waargenomen werd:

29 Juni 1906.

| tijd | $t_b$ | $t_i$ | men. | |
|---|---|---|---|---|
| 11u | 27°.8 | 27°.15 | [31] | |
| 11 30 | | 27.92 | | |
| 12 20 | | 30.00 | | |
| 12 25 | 30.4 | 30.39 | | het opstijgen der gasbelletjes is geëindigd, de bolletjes beginnen neiging tot scheiding te vertoonen |
| 12 30 | | 30.69 | | 0.365 verheft zich |
| 12 33 | | 30.83 | | 0.365 bij 33 |
| 13 36 | | 30.88 | [33] | 0.510 gaat langzaam zakken tot 25 |
| | | 30.94 | | 0.510 bij 5 |
| | | 30.99 | | 0.510 op bodem |

de afzonderlijke (electrische) verwarming van het binnenbad wordt gestaakt,

12 40 31.00 31.00 0.365 bij 36
0.483 begint te dalen
12 44 31.00 [34] 0.365 tusschen 38 en 39
0.483 „ 21 en 22
zeer langzaam stijgt $t_i$ terwijl $t_b$ steeds iets hooger werd gehouden tot 2h.50
12 48 0.483 tusschen 10 en 11
0.365 gaat met versnelde beweging naar den top
0.483 blijft zeer langzaam dalen
12 52 [34.5] 0.483 is op den bodem aangekomen
alle behalve 0,510, 0.483 en 0.365 in meniscus
1 [35] 0.390 gaat zich verheffen
1 3 0.390 tusschen 37 en 38 met 0.405 naast zich iets lager
1 10 0.390 tusschen 38 en 39 met 0.421 schuin er onder
1 15 [35] 0.421 gaat zich verheffen overigens als 1u10′

Schuin van boven door het buisje naar beneden ziende wordt een licht grijze nevel waargenomen, die in de helft onder den meniscus dichter is. Recht door het buisje ziende bij doorvallend licht vertoont het geheel een licht bruine kleur die onder den meniscus iets donkerder is.

De bolletjes blijven zich langzaam uit elkaar bewegen, hierbij valt op te merken, dat het opstijgen sneller gaat dan het dalen, terwijl bij de stijgende bolletjes de snelheid grooter wordt naarmate zij hooger komen, ditzelfde doch in iets mindere mate bij de dalende.

2h 15 31.032 de meniscus is allengs flauwer geworden en niet goed meer waar te nemen, slechts is nog een geringe insnoering van de lichtlijn bij 35 waar te nemen.

2 20 31.036 0.421 tusschen 42 en 43
0.443 „ 36 en 37
0.450 „ 34 en 35
0.466 „ 32 en 33

2 50 31.22 op deze temperatuur wordt het buitenbad verder gehouden

2 50 31.050 de stijging van de temperatuur van het binnenbad is nu uiterst regelmatig

4 30 31.096 0.443 midden op 53
0.450 tusschen 32 en 33
0.466 „ 24 en 25

De nevel in de buis is nu overal even dicht en wordt langzamerhand minder, het uit elkaar gaan der drie nog zinkende bolletjes gaat langzaam en regelmatig door

8 7 31.210 0.466 ligt juist op den bodem
0.450 zweeft tusschen 36 en 37; heeft zich in $2^h 15'$ 4 mm verheven en vertoont dus neiging naar boven te gaan.

8 10 De afkoeling geschiedt door het buitenbad op lagere temperatuur te brengen

8 30 31.133 0.466 gaat zich van bodem verheffen
0.450 op zelfde plaats

8 35 Door het geheele buisje vertoont zich een blauwachtige nevel

8 40 Deze nevel wordt dikker

8 50 Bij [15] ontstaat een dikke melkachtig witte nevel, die zich naar boven en beneden snel uitzet

30.984 Bij [10] ontstaat de meniscus. Van de bovencontactplaats der thermoelementen vallen druppeltjes naar beneden, van de beneden-contactplaats stijgen kleinere gasbellen op. (De afkoeling gaat te snel). De meniscus rijst, terwijl er 3 bolletjes van boven snel in vallen en 1 van onderen er naar opstijgt.

De temperatuurverschillen binnen in het buisje werden tusschen 0°.02 en 0°.03 gevonden, waren echter dikwijls door storingen niet waar te nemen. Bij de waarneming van $8^u 7$ waren zij niet meer dan 0°.01.

5 Juli 1906.

Bij de tweede proef werd iets sneller verwarmd. In $1^u 10$ werd het binnenbad gebracht op

$9^u 10$ 29°.99 De splitsing der bolletjes is nu natuurlijk nog niet zoover gevorderd als bij de eerste waarneming, terwijl de uitslagen van den galvanometer grooter waren. Het buisje bleef nu meer bij de temperatuur van het waterbad achter.

9 40′ 31.60 [36] De meniscus is hier nog flauw te onderscheiden, terwijl een lichte nevel door de geheele buis zichtbaar is. Onder den meniscus vertoont zich een iets donkerder band van lichtbruine kleur.

De stand der bolletjes is nu
0.365 in top
0.390 tusschen 43 en 44
0.405 „ 42 en 43
0.421 midden 41
0.443 „ 40
0.450 „ 39
0.466 tusschen 37 en 38
0.483 en 0.510 op den bodem

31.7 Zeer snel gaan nu 0.390 en 0.405 in top gevolgd door 0.421.

Op de plaats van den meniscus is nog slechts een kleine insnoering en lichtbruine nevelband waar te nemen.

10 45 31.900 De temperatuur wordt hierop constant gehouden tot 11$^{u}$37 met niet meer afwijking dan 0°.004 en vervolgens van

11 37 31.888 tot 2$^{u}$15 met niet meer afwijking dan 0°.002

2 15 De nevel is nu geheel verdwenen en de bolletjes zijn alle uit elkaar.

0.510, 0.483, 0.466 op bodem
0.450 en verdere in top, geen der bolletjes zweeft meer in 't buisje; het bolletje 0.450 ging het laatst in top terwijl 0.466 reeds eenigen tijd op den bodem was.

Een temperatuurverschil is niet meer te bespeuren.

De afkoeling geschiedde aanvankelijk langzamer.

3$^{u}$ 31.550 Een lichte nevel wordt waargenomen

3 45 31.040 de nevel is duidelijk dikker geworden.

5 10 30.985 [5]. Bij dezen stand ontstaat de meniscus uit een melkachtige wolk in het onderste deel van het buisje. De daling in temperatuur gaat verder te snel.

5 25 30.950 14 Drie bolletjes drijven in den meniscus.

Eene storing in de regeling van de temperatuur van het buitenbad maakte een einde aan de proef.

11 Juli 1906.

Een derde proef gaf bij langzame verwarming geen verschil met de eerste. De temperatuur werd nog meer in de nabijheid van de kritische gehouden en de verwarming ging nog langzamer. De meniscus daalde nu en de bruine kleur onder den meniscus was bijzonder duidelijk, vlak onder den meniscus was ze het donkerst en vloeide vervolgens langzaam

naar beneden uit. Na eene over $10^1/_{10}$ uren uitgestrekte langzame verwarming verdween de meniscus bij

6u 30°.986 De stand der bolletjes was nu
0.443 tusschen 34 en 35
0.450 midden 27
0.466 tusschen 25 en 26.

Door een geringe stoornis in de regeling van het buitenbad daalde $t_i$ tot

6 45 30.984 [25] verschijnt de meniscus, daarbij komt in den stand van het hoogste bolletje geen verandering, de beide andere 0.450 en 0.466 drijven in den meniscus.

9 15 31.010 meniscus verdween iets lager, de bruine kleur in de onderste helft is veel intensiever, ten slotte trok deze zich samen tot een donkerbruin bandje van ± 1 mM. breedte vlak onder den meniscus. Allengs werd dit lichter en kort na den meniscus verdween het ook
0.443 tusschen 41 en 42
0.450 . . . . . 23 en 24
0.466 midden 22.

De temperatuur boven in het buisje was 0°.01 hooger dan beneden.

§ 8. *Gevolgtrekkingen en opmerkingen.* Eene uitvoerige discussie der waarnemingen in verband met andere eigenaardigheden van het isothermennet in de nabijheid van den kritischen toestand (verg. Med. n°. 74 en Med. n°. 88 IV § 5 Ztv. Oct. 1903 en Med. Suppl. n°. 10) en wat die omtrent den nevel betreft in verband met de waarnemingen van GOUY, TRAVERS en USHER en YOUNG [1]), moet tot later worden uitgesteld. Intusschen liggen eenige gevolgtrekkingen voor de hand.

Naarmate de temperatuur langzamer stijgt en het evenwicht in het buisje beter bereikt wordt kan men meer naderen tot gelijkheid van dichtheid van de damp- en de vloeistofphase. Wij meenen tot een geringer gemeten verschil in dichtheid te zijn gekomen dan een der waarnemers voor ons.

Bij de derde proef liet de kritische temperatuur zich insluiten

[1]) Dit sluit in de discussie van het nevelstadium van VON WESENDONCK, dat den overgang zou vormen bij den kritischen toestand en dat zich in alle geval slechts over een klein deel van het gebied van dichtheid en temperatuur, waar een nevel gezien wordt, kan uitstrekken.

tusschen 30°.984 en 30°.986 [1]). Dat bij 30°.984 nog slechts een klein verschil in dichtheid tusschen vloeistof en damp bestond blijkt als volgt: Bij het optreden van den meniscus vonden wij 0.443 voor de dichtheid van den damp op de hoogte 35. Wij schatten volgens de correctie van § 5 (onzeker) de dichtheid ter hoogte van den meniscus (25) dus 0.452; bolletje 0.450 drijft echter op den meniscus. De dichtheid op den bodem is $< 0.483$ (hoogte (zie § 7 aanhef) 5 cM. onder 30) wij schatten derhalve de vloeistofdichtheid ter hoogte van den meniscus 0.468; bolletje 0.466 drijft. Damp en vloeistof verschillen dus zeker minder dan $^1/_{10}$ en waarschijnlijk niet meer dan $^1/_{20}$ in dichtheid. Bij de eerste proef was gevonden $\varrho_v > 0.421$, $\varrho_l < 0.483$ waaruit met de geschatte correctie van de zwaartekracht volgt $\varrho_v > 0.430$, $\varrho_l < 0.468$ een verschil van minder dan $^1/_{10}$ is dus onder deze minder gunstige omstandigheden waarschijnlijk verwezenlijkt. Deze uitkomsten omtrent het meer en meer tot elkaar naderen van de dichtheid van vloeistof en damp, die geheel beantwoorden aan de opvattingen van ANDREWS-VAN DER WAALS, ontnemen alle beteekenis aan de veel grootere verschillen van phases bij dezelfde temperatuur en druk boven de kritische temperatuur, die TEICHNER uit zijne proeven afleidt [2]).

Voor de kritische dichtheid leiden wij uit de damp en vloeistofdichtheid in de derde proef af 0.460, wat overeenkomt met het gemiddelde dat uit proef 1 bij $2^h15$ zou volgen, 0.450, en 0.470, afgeleid uit proef 3 wegens het verschijnen van den meniscus bij 25. (Verg. verder § 6 noot 1).

Dichtheidsverschillen gelijk TEICHNER vindt, merken wij bij de tweede proef ook op op het oogenblik dat de meniscus bij betrekkelijk

---

1) De temperatuuraflezingen zijn herleid tot die op een thermometer, die tot op 0°,01 nauwkeurig door de Phys. Tech. Reichsanstalt met een luchtthermometer gecontroleerd is. Onze uitkomst stemt overeen met die van KEESOM, 30°,98 (Med. N°. 88 zie boven), met denzelfden thermometer verricht. Bovendien zijn behalve en na de bepalingen van de kritische temperatuur van $CO_2$ aangehaald in LANDOLT—BÖRNSTEIN—MEYERHOFFERS Phys. Chem. Tabellen nog te vermelden: VERSCHAFFELT Zitt. Versl. Juni '96 (31°,0), VON WESENDONCK Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 5 p. 238 (30°.95), BRINKMAN Diss. Amsterdam 1904 (31°,12).

2) Wel is waar zou men aan kunnen nemen, dat het evenwicht van vloeistof en damp met zoo gering dichtheidsverschil als wij waarnamen eerst na zoolangen tijd bereikt wordt, als aan het verkrijgen van evenwicht van temperatuur bij deze proef was besteed, en dat er aanvankelijk toestanden met grooter verschil van dichtheid van vloeistof en damp (verg. noot 1 § 1) bij dezelfde temperatuur optreden, die onder gelijktijdige verandering van den coëxistentiedruk (verg. noot 1 § 1) langzamerhand in dezen eindtoestand overgaan. Maar het uitblijven van latere drukstijging bij de herhaling van DE HEEN's proef (zie § 3) heeft ons geleerd, dat dichtheids-nawerkingen reeds na zeer korten tijd niet meer voorkomen.

snel stijgende temperatuur verdwijnt. Zij zijn echter, nadat het buisje 3 uur boven de kritische temperatuur op dezelfde temperatuur is gehouden en de temperatuur in het buisje 0°,9 boven de kritische temperatuur tot op minder dan 0°,01 gelijkmatig is geworden, teruggebracht tot minder dan 0,466 — 0,450, of minder dan 3,5 °/₀, d. i. na correctie van de zwaartekracht < 3,3 °/₀ over 10 cM. Van eene „Entmischung" door afkoeling bij nadering van de kritische temperatuur, zooals TRAUBE l. c. p. 477 vermeldt, is niets opgemerkt.

Het resteerend verschil bij de eerste proef 0°,23 boven de kritische temperatuur na 6 uur verwarmen boven de kritische temperatuur volgt uit het zweven van bolletje 0.450 5.6 cM. boven 0,466. Dit verschil is dus niet meer dan 3,5 °/₀ en gecorrigeerd voor de zwaartekracht 2,9 °/₀.

Uit de berekeningen van VERSCHAFFELT volgt dat bij 0°,23 boven de kritische temperatuur 0,0001 molecuul bijmengsel ongeveer 12 °/₀ dichtheidsverschil kan veroorzaken. Temperatuurverschillen en bijmengselen welke de overblijvende verschillen verklaren kunnen, zijn ook bij de door ons genomen voorzorgen nauwelijks te vermijden.

TEICHNER nam waar, dat na het verdwijnen van den meniscus op de plaats waar deze zich het laatst bevond een overgangszone bestaat, waarheen zich de dichtheidsverschillen concentreeren, terwijl daarbuiten de veranderingen slechts onbeduidend zijn. Bij onze waarnemingen bleek juist het tegendeel en gingen de veranderingen in dichtheid bij verhooging van temperatuur regelmatig voort, slechts werd de beweging der bolletjes iets versneld naarmate zij meer de top van de buis naderen om de laatste 1 à 2 cM. zeer snel te doorloopen. In minder sterke mate doch op dezelfde wijze geschiedt dit met de bolletjes, die daalden. Waarschijnlijk hangen deze verschijnselen samen met verwarming en afkoeling van phasen door samendrukking en uitzetting.

**Natuurkunde.** — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Supplement N°. 15 bij de mededeelingen uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: Dr. H. KAMERLINGH ONNES en Dr. W. H. KEESOM: *„Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van* VAN DER WAALS. XV. *Geval dat de eene component een aantrekkingloos gas is met moleculen die uitgebreidheid hebben. Beperkte mengbaarheid van twee gassen."* (Tweede vervolg).

§ 8. *Over de temperaturen en de drukken op de gas-gasplooi.* Om tot een voorloopig oordeel te geraken omtrent de experimenteele voorwaarden, die vervuld moeten zijn opdat beperkte mengbaarheid in den gastoestand zou kunnen waargenomen worden, en daaruit

te kunnen afleiden welke stoffenparen hiervoor geschikt geacht moeten worden, is het gewenscht voor eenige gevallen na te gaan, welke temperaturen en drukken op de gas-gasplooi [1]) optreden. In het geval van een aantrekkinglooze [2]) of bijna aantrekkinglooze ($m < m_1$, zie § 7) component (§ 2, Febr. '07) zal de gas-gasplooi optreden vóor alle temperaturen tusschen de kritische temperatuur van de minst vluchtige component en de kritische temperatuur van volledige mengbaarheid [3]). De drukken zullen dan daarvoor zijn grooter dan de kritische druk van de minst vluchtige component. Indien de onderstellingen genoemd in § 2 hiervoor zouden mogen toegepast worden, en de waarden van $a_M$ en $b_M$ voor He aan Meded. N°. 96*c*, Jan. '07, p. 655 noot 2 ontleend zouden mogen worden, zoodat $a_{MHe} = {}^1/_{175}\, a_{MH_2} = 0.0000024$ en $b_{MHe} = {}^1/_2\, b_{MH_2} = 0.00044$, zou dit geval verwezenlijkt worden voor mengsels van He en water [4]). Men zou dan vinden $T_{km} = 1.056\ T_{k_1}$, zoodat de gas-gasplooi zou optreden over een temperatuurgebied van 36° boven 365° C. en bij drukken boven 195 à 200 atm.

In het geval dat de moleculen der minst vluchtige component wel is waar zwak op elkander werken, doch toch nog eene zoodanige

---

[1]) Ten onrechte meent o. i. VAN LAAR (Zittingsversl. April '07 p. 940 noot 2) dat in het geval van een driephasen-evenwicht, zooals bv. bij het stelsel water-aether, onze terminologie betreffende de onderscheiding van gas en vloeistof niet zou overeenkomen met de door VAN DER WAALS gebezigde. Volgens het omtrent deze onderscheiding in § 4 gezegde zal men bij een driephasen-evenwicht van een stelsel van het type water-aether de waterrijke dichtere phase als behoorende tot den vloeistoftak der connode vloeistof, evenzoo de (aetherrijke) minst dichte phase gasphase *moeten* noemen; of men de aetherrijke dichtere phase vloeistof of gas zal moeten noemen, wordt door het beginsel der continuiteit van de phase langs de connode niet bepaald; houdt men rekening met de gereduceerde temperaturen, waarbij die phase optreedt, dan zal men voor het stelsel aether-water ook de laatstgenoemde phase in overeenstemming met het in § 4 gezegde vloeistof noemen.

[2]) De tweede tak der plooipuntslijn in Fig. 1 § 2 (Zittingsversl. Feb. '09, p. 755), over welke VAN LAAR spreekt in Zittingsversl. April '07, p. 941 boven, is aldaar ($a_{22} = 0$) tot een punt $x = 1$, $v = b_{22}$ samengetrokken. Wel komt in het geval van onze § 7 (Plaat II, Zittingsversl. Maart '07) een tweede tak der plooipuntslijn voor, doch uitdrukkelijk is daar vermeld (p. 851 onder en 853 onder) dat wij van de behandeling der spinodalen bij de lagere temperaturen, waarbij deze tak der plooipuntslijn zijn invloed doet gelden, afzagen, hierbij o.a met het oog op deze temperaturen verwijzende naar de verhandelingen van VAN LAAR.

[3]) Dit begrip werd, als in § 1 werd vermeld, door VAN DER WAALS ingevoerd, die ook de formules ter berekening van die temperatuur gaf (VAN LAAR noemt haar „derde kritische temperatuur").

[4]) De $a_M$ en $b_M$ voor water zijn ontleend aan LANDOLT-BÖRNSTEIN-MEYERHOFFER's Physik. Chem. Tabellen.

aantrekking uitoefenen, dat in het spinodalennet een dubbelplooipunt[1]) optreedt (§ 7), geven de druk in dit plooipunt en de temperatuur daarvan in verband met de kritische temperatuur van volledige mengbaarheid belangrijke aanwijzingen omtrent de drukken en temperaturen op de gas-gasplooi.

In tabel II zijn voor eenige heliummengsels die gegevens, berekend voor het geval dat de in § 2 genoemde onderstellingen zouden mogen worden toegepast, medegedeeld. $T_{km}$ is daartoe berekend volgens VAN DER WAALS Contin. II, p. 43 (vergelijk § 6), $T_{dpl}$ volgens de formule medegedeeld in § 7, $p_{dpl}$ uit de toestandsvergelijking met de zooeven genoemde $T_{dpl}$ en de eveneens in § 7 in formule voorgestelde $v_{dpl}$[2]).

TABEL II.

| Stoffenpaar | $T_{km}/T_{k_1}$ | $T_{dpl}/T_{k_1}$ | $T_{dpl}/T_{kx}$ | $p_{dpl}/p_{k_1}$ |
|---|---|---|---|---|
| Waterstof-helium | 0.933 | 0.915 | 4.44 | 41.6 |
| Zuurstof-helium | 0.962 | 0.957 | 8.64 | 61.3 |
| Argon-helium | 0.970 | 0.962 | 7.90 | 64.5 |
| Neon-helium | 1.007 | 0.961 | 3.72 | 18.8 |
| NO-helium | 1.031 | 0.931 | 3.76 | 13.1 |
| $NH_3$-helium | 1.009 | 0.969 | 6.20 | 25.2 |
| $H_2S$-helium | 0.972 | 0.970 | 13.79 | 171 |
| $CO_2$-helium | 0.9540 | 0.9536 | 15.89 | 1045 |

[1]) Het optreden van een dubbelplooipunt dicht bij $K_m$ werd reeds door VAN LAAR (Zittingsversl. Mei 1905 p. 23) opgemerkt. De voorwaarden voor het optreden ervan werden door hem echter niet juist omschreven (vergelijk § 9 II). Wij meenden met het oog op dit laatste, op dit resultaat van VAN LAAR voldoende de aandacht te vestigen door den lezer naar de verhandelingen van VAN LAAR (zie p. 853 noot 1) te verwijzen. Het bij hooge temperaturen afsnoeren van eene lengteplooi die met de open zijde naar $v = b$ gekeerd het $\psi$-vlak verlaat, volgt onmiddelijk (zie Zitt.versl. April 1907 p. 938 noot) uit de algemeene beschouwingen en berekeningen van VAN DER WAALS Cont. II § 19 sqq. en de teekening van VAN DER WAALS in Zitt.versl. Nov. 1894 p. 133, wanneer het geval *a*) zie § 9. I, een geval dat VAN LAAR in zijn beschouwingen niet heeft opgenomen, niet optreedt.

[2]) Hoewel we de ontwikkelingen, die ons voerden tot de expliciete uitdrukkingen voor het dubbelplooipunt, medegedeeld Zittingsversl. Maart '07 p. 854, oorspronkelijk niet van genoegzaam belang achtten, is er, nu VAN LAAR (zie Zittingsverslag April '07 p. 946) het afleiden van dergelijke uitdrukkingen onmogelijk acht, aanleiding deze bij eene volgende gelegenheid mede te deelen.

De in deze tabel opgenomen gereduceerde temperatuur van het dubbelplooipunt $T_{dpl}/T_{kx}$, geeft een oordeel daarover in hoeverre de phasen in de nabijheid daarvan zich als samengedrukte gasphasen gedragen. De waarden van $a$ en $b$ van de verschillende componenten zijn ontleend aan KOHNSTAMM, LANDOLT-BÖRNSTEIN-MEYERHOFFER's Physik. Chemische Tabellen; voor die van helium zie men boven; voor neon hebben we gebruik gemaakt van de verhouding van het brekend vermogen [1]) tot dat van helium volgens de bepalingen van RAMSAY en TRAVERS [2]), en van de schatting omtrent de kritische temperatuur door TRAVERS, SENTER en JAQUEROD [3]).

Uit tabel II blijkt, dat wanneer de gas-gasplooi kan optreden, het temperatuurgebied binnen hetwelk dit het geval is (tusschen $T_{km}$ en $T_{dpl}$), bij de genoemde onderstellingen voor de meeste dier stoffenparen klein, voor enkele zelfs zeer beperkt is.

Voor de drukken op de gasplooi zullen in het algemeen hoogere waarden dan $p_{dpl}$ verwacht moeten worden. Uit tabel II blijkt dus, dat deze drukken, indien de verhoudingen niet zeer gunstig zijn, zeer hoog worden.

Een zeer gunstige invloed zou uitgeoefend worden op de omstandigheden van temperatuur en druk, waarbij beperkte mengbaarheid in den gastoestand zou kunnen waargenomen worden, indien mocht

---

[1]) HAPPEL, Habilitationsschrift Tübingen 1906, p. 30, vond dat het brekend vermogen voor argon, krypton en xenon waarden voor $b$ zou opleveren, die van de $b$'s afgeleid uit de kritische gegevens zeer belangrijk afwijken Wanneer men voor deze gassen volgens het beginsel der overeenstemmende toestanden (vergl. HAPPEL l. c. p. 31, noot 1) de verhoudingen der brekende vermogens vergelijkt met die hunner kritische volumina (ontleend aan $p_k$ en $T_k$), dan zijn de afwijkingen veel minder belangrijk. Deze een-atomige gassen vormen dus, wat deze eigenschap betreft, een groep, evenals dat het geval is met de twee-atomige en met een groot getal meer-atomige stoffen (GUYE, Journ. de phys. (2) 9 (1890) p. 312).

[2]) RAMSAY en TRAVERS, Phil. Trans. A197 (1900) p. 81. Intusschen moet opgemerkt worden, dat men bij vergelijking van deze verhouding voor helium en argon volgens RAMSAY en TRAVERS met de verhouding van $b_{He}$ volgens onze schatting en $b_A$ volgens $p_k$ en $T_k$ eene belangrijke afwijking (vergel. noot 1) zou vinden. Mede met het oog hierop zijn de gegevens betreffende mengsels van helium en neon zeer onzeker.

[3]) TRAVERS, SENTER en JAQUEROD, Phil. Trans. A 200 (1902) p. 177. Hunne beschouwingen omtrent een verband tusschen atoomgewicht en kritische temperatuur leiden echter voor de kritische temperatuur van helium tot een onwaarschijnlijk resultaat.

De isotherm-bepalingen van neon door RAMSAY en TRAVERS, l.c., hebben ons evenmin als die voor helium voor de bepaling van $a$ en $b$ kunnen dienen (verschillende bijzonderheden in het door deze geleerden in plaat 2 l. c. aangegeven beloop der isothermen der eenatomige gassen schijnen ons niet waarschijnlijk toe).

blijken, dat voor mengsels van helium met een ander gas $a_{12M}$ kleiner is dan door $\sqrt{a_{11M}\,a_{22M}}$ wordt aangegeven [1]).

§ 9. *De opmerkingen van den Heer* VAN LAAR, Zittingsverslag April '07, p. 939—952, als zouden wij enkele onzer resultaten als nieuw hebben medegedeeld, terwijl zij reeds vroeger door hem zouden zijn afgeleid en gepubliceerd, dwingen ons tot de volgende uiteenzettingen om de onjuistheid van deze beweringen aan te toonen.

I. Wat een deel van deze opmerkingen betreft, deze worden het best weerlegd door in het kort aan den door ons gevolgden gedachtengang te herinneren.

Toen wij de vergelijkingen door VAN DER WAALS omtrent de spinodale [2]) neergelegd in Contin. II, § 19 sqq., overgebracht op het $\psi$-vlak voor de gewichtseenheid, toepasten op het geval dat een der componenten een aantrekkingloos gas [3]) is met uitgebreide moleculen, kwamen wij bij de in § 2 genoemde onderstellingen [4]) tot *eene plooi, die van de zijde der kleine volumina uitgaat, bij zekere temperatuur met de lijn* $x=0$ *tot aanraking komt en bij lagere temperatuur van* $v=b$ *naar de zijde* $x=0$ *scheef oversteekt* (§ 2, Zittingsverslag Febr. '07, p. 755). Vergelijking van deze uitkomst met de verhandelingen van VAN LAAR gaf ons daarna aanleiding aan te halen (p. 754 noot 1), dat deze de projectie der plooipuntslijn op het $v$, $x$-vlak voor het geval van een aantrekking-

[1]) Zittingsversl. Maart '07, p. 852, noot 1 en VAN DER WAALS, Zittingsversl. April '07, p. 920.

[2]) De vergelijking voor de spinodale van het moleculaire $\psi$-vlak (verg. VAN LAAR Zittingsversl. April '07 p. 942) werd door VAN DER WAALS gegeven in Contin II. p. 45, verg. (1), in een vorm die na substitutie van $\frac{da}{dx}$, $\frac{db}{dx}$ en $\frac{d^2a}{dx^2}$ onmiddellijk overgaat in de door VAN LAAR gebruikte. (Zie VAN LAAR, Zittingsversl. Mei 1905, p. 14). De door ons p. 756 opgeschreven vergelijking had betrekking op en was afgeleid uit de vergelijking voor het $\psi$-vlak van de gewichtseenheid (Zittingsversl. Dec. '06, p. 516). Overigens verschillen we van de door VAN LAAR herhaaldelijk (o. a. Zittingsversl. Mei '05 p. 15) uitgesproken meening, als zoude het moeilijker of omslachtiger zijn de verg. van de spinodale en evenzoo die van de plooipuntslijn uit de $\psi$-functie dan haar uit de $\zeta$-functie af te leiden.

[3]) Dit onderzoek werd aangekondigd in Meded. no. 96*b*, Dec. '06 p. 507.

[4]) Wanneer ook bij en in de onmiddelijke nabijheid van $v=b$ niet $\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}=0$, gelijk wij onderstelden, zou mogen gesteld worden (vergel. VAN DER WAALS Contin. II p. 42). zal, gelijk VAN DER WAALS l.c. en Zittingsversl. April '07 p. 938 opmerkt, de spinodale steeds naar de zijde $v=b$ gesloten zijn. Alsdan zal, althans voor kleine $\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$, te verwachten zijn, dat de hier bedoelde plooi bij een maximum plooipuntstemperatuur voor het eerst optreedt, en overigens zich naar de groote $v$'s uitbreidt op dezelfde wijze als de hier beschreven plooi.

loos gas reeds behandelde, zonder echter den vorm van de spinodale en de plooi voor dit geval nader te onderzoeken. Nu VAN LAAR, Zittingsverslag April '07, p. 940 zegt: „het geval, dat een plooi *uitgaat van* $C_0$ [1]) *naar* $C_2$ [2]), of ook tevens van $C_2$ naar $C_0$ (wanneer er een minimumtemperatuur in de plooipuntslijn is), is . . . reeds vroeger door mij in alle bijzonderheden beschreven en berekend", hebben wij nogmaals zijne verhandelingen doorgezien.

Het ware wenschelijk geweest, dat de Heer VAN LAAR de plaats had aangegeven waar wij die beschrijving van de in § 2 behandelde [3]) en door VAN LAAR met de (door ons) gecursiveerde woorden aangeduide plooi bij hem hadden moeten zoeken; wij hebben die beschrijving, zelfs bij deze hernieuwde aandachtige beschouwing in zijne vroegere verhandelingen, niet kunnen vinden [4]).

Dat het door ons beschreven beloop der plooi optreedt bij temperaturen boven de kritische van de minst vluchtige component gaf ons aanleiding tot de beschouwingen over beperkte mengbaarheid in den gastoestand medegedeeld in § 3 sqq.

Wij onderzochten daarna, steeds gebruik makende van de bovengenoemde vergelijkingen van VAN DER WAALS, of ook bij $a_{22} > 0$, voor waarden gelijk die bij mengsels van helium te verwachten zijn, eene dergelijke plooi kan optreden. In § 7 (Zittingsverslag Maart '07 p. 851) zagen wij, dat bij het beloop der plooipuntslijn van $K_1$ naar $K_m$ (door VAN LAAR type I genoemd) 3 gevallen zijn te onderscheiden: *a*) dat bij dalende temperatuur het plooipunt van $K_m$ op het $\psi$-vlak komt en regelmatig naar $K_1$ voortgaat; *b*) dat zich op de plooipuntslijn bij dalende temperatuur een van af $K_m$ en een van af $K_1$ komend plooipunt tot een dubbelplooipunt vereenigen; *c*) dat het plooipunt van af $K_1$ op het $\psi$-vlak komt en regelmatig

---

1) Bij ons $K_m$.

2) Bij ons $K_1$.

3) De mogelijkheid van het optreden van eene lengteplooi bij temperaturen boven de kritische van beide componenten was reeds ondersteld door VAN DER WAALS in zijn behandeling van den invloed van de lengteplooi op kritische verschijnselen (Zittingsversl. Nov. '94, p. 133), gelijk door ons in de Engelsche vertaling, Proc. March. '07, p. 786, werd opgemerkt.

4) Integendeel lezen wij nog in zijne verhandeling Zittingsversl. Sept. 1906 p. 233 (vergelijk VAN LAAR, Zittingsversl Mei 1905, p. 23 onder): „In vroegere Verhandelingen is aangetoond, dat zoowel bij type I in de lijn $C_0C_2$, als bij type II in de lijn $C_0A$ in de nabijheid van $C_0$ een minimum-plooipunts temperatuur optreedt, en dat er dus *van uit* $C_0$ bij een bepaalde temperatuur $T_0$ (de plooipunts-temperatuur in $C_0$) bij temperatuursverlaging een *afzonderlijke plooi* begint uit te gaan, welke zich later (bij de minimale plooipunts-temperatuur) in een homogeen dubbelpunt met de hoofdplooi (of de nevenplooi daarvan) zal vereenigen".

(zonder dubbelplooipunt met minimumplooipuntstemperatuur) naar $K_m$ voortgaat. De voorwaarden voor het optreden dezer gevallen werden door ons aangegeven met behulp van de verg. (2) en (3) aldaar. Daaruit bleek dat bij zeer zwakke aantrekking het geval *a*) optreedt, bij meerdere aantrekking het geval *b*), terwijl bij nog grootere aantrekking geval *c*) optreedt (steeds verondersteld zijnde, dat het systeem behoort tot type I).

Wij hebben noch het geval *a*) (gelijk wij boven reeds opmerkten), noch het geval *c*) bij VAN LAAR gevonden. Wel vonden wij bij hem het geval *b*), voornamelijk wat betreft de behandeling van hetgeen geschiedt bij lagere temperaturen, wanneer driephasen-evenwichten optreden. Voor deze behandeling verwezen we naar VAN LAAR (zie Zittingsverslag Maart '07 p. 853).

Door dit beloop *b*) als voor type I algemeen geldig te verklaren (verg. p. 64 noot 4; men zie ook VAN LAAR p. 942 boven), blijkt o. i. dat VAN LAAR de gevallen *a*) en *c*) niet alleen onvermeld gelaten, doch bepaaldelijk over het hoofd gezien heeft. [1])

II. Nog eene opmerking blijft te behandelen. In § 7 stelden wij als de *twee* criteria voor het optreden van het geval *b*) bij het beloop der plooipuntslijn van $K_1$ naar $K_m$ (zie boven), in welk geval eene minimumplooipuntstemperatuur optreedt ($b_{22M} < b_{11M}$ ondersteld), op:

$$\sqrt{a_{22M}/a_{11M}} > \frac{1}{3}\left\{-1 + \sqrt{1 + 3\, b_{22M}/b_{11M}}\right\}$$

en

$$\sqrt{a_{22M}\, a_{11M}} < -(1 - b_{22M}/b_{11M}) + \sqrt{1 - b_{22M}/b_{11M} + (b_{22M}/b_{11M})^2}.$$

De Heer VAN LAAR wijst aan (Zittingsversl. April '07, p. 951), dat de eerstgenoemde voorwaarde overeenkomt met eene voorwaarde voor het optreden van eene minimumplooipuntstemperatuur, door hem Zittingsversl. Dec. '05, p. 585 (en VERSCHAFFELT Zittingsversl. Jan. '06 p. 693) afgeleid. Ten onrechte meent echter o. i. de Heer VAN LAAR,

---

[1]) Men zou het beloop der spinodalen in geval *b*), zoo dit ook wordt uitgestrekt tot waarden van $x > 1$ en $< 0$ en van $v < b$, als een meer algemeen geval kunnen beschouwen, waaruit de gevallen *a*) en *c*) althans qualitatief en wanneer wij ons voor deze beperken tot het voor de behandeling van mengsels van belang zijnde gebied van het $\psi$-vlak ($1 > x > 0$ en $v < b$), zouden kunnen worden verkregen door het uitsnijden van eene door $x = 0$ en $x = 1$ en door eene passende lijn $v = b$ begrensde strook, op de wijze als VAN DER WAALS Zittingsversl. Feb. '07, p. 686 sqq. het beloop der isobaren behandelt (vergel. § 7 p. 852 van deze mededeeling). Wij hebben geen enkele aanduiding gevonden dat VAN LAAR's beschrijving van geval *b*) op deze wijze moet opgevat worden; men zou b.v. uit den p. 64 noot 4 aangehaalden zin eer tot het tegendeel besluiten.

In ieder geval zijn de onderscheidingen, die physisch van belang zijn, niet gemaakt.

dat de door hem opgestelde *éene* voorwaarde in alle gevallen voldoende is om over het optreden van eene minimumplooipuntstemperatuur te beslissen. Evenmin kunnen zijne beschouwingen van Dec. 1905 eene aanwijzing geven om tot het optreden van eene minimumplooipuntstemperatuur in den tak $K_1 K_m$ der plooipuntslijn te besluiten. Immers VAN LAAR gaat daar uit van de waarde van $dT_{xpl}/dx$ bij de kritische temperatuur van de meest vluchtige component, door ons $T_{k_2}$ genoemd. De voorwaarde dat bij $T_{k_2}$, de *laagste* der kritische temperaturen van de componenten, $dT_{xpl}/dx < 0$, geeft aan dat, *indien de plooipuntslijn van $K_2$ naar $K_1$ oversteekt,* in deze eene minimum temperatuur moet optreden.[1]) VAN LAAR beschouwt nu, Zittingsversl. April '07 p. 948, de waarde van $dT_{xpl}/dx$ bij de minst vluchtige component (bij $K_1$). Het is o. i. duidelijk, dat de voorwaarde $dT_{xpl}/dx < 0$, welke samenvalt met de eerste der bovengenoemde ongelijkheden (vergel. p. 853, laatste zin van de eerste alinea), bij de *hoogste* kritische temperatuur geene aanwijzing geeft om tot het optreden van eene minimumplooipuntstemperatuur te besluiten. Dat inderdaad, indien bij $K_1$ $dT_{xpl}/dx < 0$, *eene* der voorwaarden voor het optreden eener minimum-plooipuntstemperatuur in den tak $K_1 K_m$ der plooipuntslijn vervuld is, heeft VAN LAAR o. i. slechts aangetoond door zijne, eerst in April tegelijk met zijne opmerkingen gegeven, beschouwingen omtrent de ligging van het dubbel-plooipunt, welke beschouwingen overeenkomen met die, welke ons eene maand te voren hadden geleid tot het opschrijven der genoemde beide voorwaarden.

Voor de Boekerij wordt aangeboden door den Heer ZWAARDEMAKER de dissertatie van den Heer P. WOLTERSON: „*Quantitatieve betrekking tusschen vagusprikkeling en hartswerking*".

De vergadering wordt gesloten.

---

[1]) Alleen indien de plooipuntslijn van $K_1$ naar $K_2$ oversteekt, is deze voorwaarde voldoende om tot het optreden van de minimum plooipuntstemperatuur te besluiten (vergel. VAN LAAR p. 951); immers indien de van uit $K_2$ uitgaande tak der plooipuntslijn zich naar het punt $A$ van VAN LAAR ($x = 1$, $v = b_{22}$ in onze notatie) ombuigt, zal men van eene minimum plooipunts-temperatuur in den zin dien men hieraan gewoon is te hechten, niet spreken.

Eene dergelijke overweging was aanleiding tot onze opmerking in noot 1, p. 851, welke opmerking wij ook na de tegenspraak van VAN LAAR p. 951 onder, moeten staande houden. (Verkeerdelijk meent VAN LAAR noot 1 aldaar, dat in plaats van: „maximum-temp." „minimum-temp." zou moeten gelezen worden, wat ook onmiddellijk uit vergelijking met den aangehaalden tekst van VERSCHAFFELT had kunnen blijken).

---

**(Juni 5, 1907).**

# KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

## VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 29 Juni 1907.

*Voorzitter:* de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
*Secretaris:* de Heer J. D. VAN DER WAALS.

## INHOUD.



Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn :

1°. Bericht van de Heeren SCHOUTE, HOOGEWERFF en BURCK, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen;

2°. Brieven van de Heeren W. BURCK te Leiden, W. C. RÖNTGEN te München, J. P. PAWLAW te St. Petersburg en EDM. B. WILSON te New-York, waarbij zij onder dankzegging voor de hun verleende onderscheiding hunne benoeming, respectievelijk tot gewoon en tot buitenlandsch lid aannemen;

3°. Brief van de Universiteit te Upsala, waarbij dank gezegd wordt voor de ontvangen gelukwenschen bij gelegenheid van het feest ter herdenking van den 200sten geboortedag van CAR. LINNAEUS.

4°. Brief van het Institut de France ter begeleiding van een medaille geslagen ter herinnering aan de 1ste algemeene vergadering der Internationale Associatie der Akademiën.

De Voorzitter brengt verslag uit over het behandelde op de te Weenen gehouden algemeene vergadering der Internationale Associatie der Akademiën. Dit Verslag zal worden opgenomen in het Jaarboek voor 1907.

De Heer MOLL brengt een kort verslag uit over zijne reis naar Stockholm en Upsala, waar hij de Akademie vertegenwoordigde bij de plechtigheden, gehouden ter eere van den 200sten geboortedag van Linnaeus. De vanwege de Akademie aan de Akademie van Wetenschappen te Stockholm en aan de Universiteit te Upsala gerichte adressen werden door hem overgebracht, maar niet voorgelezen, daar de tijd hiertoe ontbrak, en van iedere natie slechts door één vertegenwoordiger, ook namens de overigen het woord kon worden gevoerd. Te Stockholm, in de plechtige zitting der Akademie, werd hij hiertoe aangewezen.

De ontvangst in Zweden was zeer hartelijk en getuigde van de meest onbekrompen gastvrijheid, terwijl blijkbaar de komst der Nederlandsche afgevaardigden op bijzonderen prijs werd gesteld.

**Physiologie.** — De Heer WINKLER doet eene mededeeling: „*Over den centralen loop van den nervus octavus en zijn invloed op de beweging bij het konijn*" en biedt daarover een verhandeling aan ter uitgave in de Werken der Akademie.

**Aardkunde** — De Heer A. WICHMANN biedt eene mededeeling aan: *„Over ertsgangen in de provincie Limburg”*.

(Medegedeeld in de vergadering van 30 Maart 1907).

In het voorjaar van 1856 werd door den oud-kolonel van het Nederlandsch-Indische leger P. VAN SWIETEN, te 'sGravenhage, eene „Bergwerkvereeniging voor Nederland” opgericht, [1]) die de concessie voor het mijnveld Marie in het zuidelijkste gedeelte van de provincie Limburg verkreeg, [2]) met het doel steenkolen op te sporen. Nadat de eerste boringen te Epen en te Simpelveld zonder resultaat waren gebleven, kwam het gehucht Bommerig [3]) (gemeente Wittem) aan de beurt, alwaar op 11 October 1856 een 0,80 M. dikke ertsgang, in 56,20 M. diepte, ontdekt werd, die in hoofdzaak uit kwarts en loodglans was samengesteld. Hoewel men reeds dadelijk vermoedde, dat die gang in verband stond met die, welke in het zzw. gelegen Bleiberg (België) ontgonnen werd, was men toch, wegens de groote kosten aan het afgraven van een schacht verbonden, huiverig tot eene exploitatie over te gaan. De genoemde maatschappij zette daarna hare nasporingen in andere gedeelten van het mijnveld met onvoldoend resultaat voort, totdat zij, na uitputting der beschikbare fondsen, ontbonden moest worden.

Het is sedert geruimen tijd bekend, dat de devonische en carbonische lagen in de omstreken van Aken, met eene hoofdstrekking van het NO. naar het ZW., door nagenoeg loodrecht daarop staande verschuivingsspleten doortrokken worden, die voor de ertsvorming van groot belang bleken geweest te zijn. [4]) Die ertsmassa's werden spaarzaam in de devonische vormingen, het meest in die behoorende tot den kolenkalk en slechts eenmaal — zooals men meende — in die van het productieve carboon, nl. te Bleiberg gevonden. Op de meest belangrijke spleet — door UIJLENBROEK de „Geuldal-spleet” genoemd —

[1]) Nieuwe Rotterdamsche Courant, Donderdag 22 Mei 1856, N°. 140. De akte van oprichting is van 11 Juni 1856 (Nederlandsche Staatscourant, Donderdag, 10 Juli 1856 N°. 162).

[2]) ruim 1 K.M. ten NO. van Epen en 2 K.M. ten Z. van Mechelen gelegen.

[3]) Nieuwe Rotterdamsche Courant, Donderdag, 16 October 1856; N°. 286. P. VAN SWIETEN. Rapport sur les opérations de la Société de l'union minérale pour la Néerlande de 1856 à 1857. Annales des Travaux publ. de Belgique XVI. Bruxelles 1857—58 p. 266—267 Pl. V.

[4]) C. DANTZ. Der Kohlenkalk in der Umgebung von Aachen. Zeitschr. d. D. geolog. Gesellsch. XLV. 1893 p. 599—683, Taf. 26. W. SCHULZ. Führer des Berg- und Hütten-Ingenieurs durch die Umgegend von Aachen. Aachen 1886, p. 37—41 m. Karte. G. D. UYLENBROCK. Le sud-est du Limbourg néerlandais. Annales de la Soc. géolog. de Belgique XXXII. Liége 1904—05. M. pag 151—104., Pl. V.

G. DEWALQUE. Essai de carte tectonique l. c. Pl. IV.

liggen de mijnen Fossey bij Hergenraed (Rijnpruisen), Moresnet (onzijdig gebied) en Bleiberg (België). Met uitzondering van de contactbeddingen, die galmei bevatten, zijn de ertsen loodglans, als doorgaans de oudste vorming, zinkblende en pyriet. De voor ruim 50 jaren te Bommerig opgespoorde gang in het onderste gedeelte van het productieve carboon, toont aan, dat de ertsen van het ZO. naar het NW. hoe langer, hoe meer de jongere lagen opzoeken [1]) en dat de strekking van de Geuldal-spleet van Bleiberg af meer naar het NNW. begint af te wijken.

Sedert jaren werden tal van boringen in een meer noordelijk gedeelte van Limburg verricht, die tot den aanleg en de ontginning van eenige kolenmijnen hebben geleid. In December 1905 vond de heer L. Rutten te Utrecht op de halde van de mijn „Carl" [2]) eenige stukken erts, die hij aan het Mineralogisch-Geologisch Instituut te Utrecht ten geschenke gaf. Verdere door hem in het werk gestelde nasporingen brachten aan het licht, dat die ertsen afkomstig waren van een gang, die onder het afgraven van den schacht op 278 M. diepte ontmoet werd, waarvan men echter achterwege had gelaten de helling en strekking te bepalen. Het gelukte echter in het bezit te komen van een aantal stukken, die in handen van particulieren zich bevonden. De gang heeft slechts eene dikte van 20 c.M. Op de kleihoudende salbanden heeft zich pyriet afgezet, terwijl de eigenlijke gangmassa uit kalkspaat bestaat, die in holten in den vorm van kristallen ontwikkeld is, waarop nu en dan ook pyrietkristallen gevonden worden. Naast deze gang werden, eveneens op spleten van den kolenzandsteen van de mijn „Carl", ertsen gevonden en wel naast pyriet ook zinkblende, koperkies en loodglans. Buitendien worden er altijd gevonden kalkspaatkristallen en veelal dolomiet.

In de Oranje-Nassau-mijn nabij Heerlen schijnen eveneens soortgelijke vormingen op te treden, althans vinden zich hier op spleten kalkspaatkristallen, die met pyriet bedekt zijn. Eigenaardig is hier de regelmatige vergroeiing, doordien de kleine kubi van pyriet zich op de polen ophoopen en daarna zich op de stompe ribben der skalenoëders voortzetten en hier langzamerhand verdwijnen.

Ten slotte moge er nog aan herinnerd worden, dat terwijl in het gebied van Stolberg de gangen van loodglans, pyriet, zinkblende en kalkspaat nog meestal aan den kolenkalk gebonden zijn, de gelijksoortige mineralen in het meer westelijk gelegen Worm-revier op spleten van den kolenzandsteen, dus in een jonger horizont optreden, hetgeen zich in het gebied van Heerlen herhaalt.

---

1) Bij Eupen treden zij nog in de devonische vormingen op.

2) Gelegen $1^1/_2$ K.M. ten Oosten van Heerlen.

**Physiologie.** — De Heer HAMBURGER doet, mede namens den Heer E. HEKMA, een mededeeling over: „*Phagocytose*".

## I. *Inleiding en methode van onderzoek.*

De onderzoekingen, waarvan hier een korte mededeeling volgt, [1]) vormen een voortzetting van die, welke voor een geruim aantal jaren door een onzer zijn begonnen [2]) en die ten doel hadden den invloed te leeren kennen, dien oplossingen van verschillende concentratie op roode bloedlichaampjes en andere cellen uitoefenen. Deze studie bepaalde zich in hoofdzaak tot chemische en volumetrische veranderingen, die de cellen onder den invloed van wijziging van hun medium ondergingen en de beteekenis daarvan voor verschillende functies van het organisme. Doch de *invloed dier agentia op het leven der cel zelf* werd tot nu toe niet aan een systematisch onderzoek onderworpen, ofschoon het plan daartoe reeds beraamd was en ook de methode reeds bruikbaar gebleken. [3]) Zonder twijfel is zulk een onderzoek van belang te achten. Vooreerst, omdat de bedoelde chemische en volumetrische onderzoekingen daardoor meer waarde krijgen en dan, omdat in den grond der zaak de verschijnselen, die men waarneemt, bij inwerking van voor het leven gevaarlooze oplossingen in den grond der zaak reacties zijn, waardoor het ten slotte moet gelukken dieper in den chemischen bouw van den levenden celinhoud door te dringen. De roode bloedlichaampjes, welke voor verreweg de meeste van die chemische en volumetrische onderzoekingen werden gebruikt, zijn echter voor de studie van den invloed van agentia op het leven ongeschikt, omdat zij ons geen zekere levenscriteriën aanbieden, nog veel minder hun levensfuncties laten doseeren.

Wij hebben daarom onzen blik gericht op een ander object en hebben daarvoor gekozen de phagocyten. Vooreerst heeft men hier te doen met eenvoudige geïsoleerde cellen, waarvan men naast de chemische wisselwerking met hun natuurlijk medium, het leven zelfs quantitatief op den voet kan volgen. Verder verdienen deze cellen nog als zoodanig onze belangstelling, aangezien de phagocytose in het leven een gewichtige rol speelt. Men denke slechts aan hare door METCHNIKOFF aan het licht gebrachte en met bewonderenswaardige scherpzinnigheid en energie verdedigde beteekenis in den strijd van

---

1) Uitvoeriger in „Biochemische Zeitschrift".

2) HAMBURGER, Zittingsverslag der Koninkl. Akad. v. Wetensch. 29 December 1883.

3) HAMBURGER, Het gedrag van witte bloedlichaampjes tegenover cyaankalium, Bijdrage tot de kennis der celpermeabiliteit. Feestbundel voor Rosenstein, 1902.

het lichaam tegen microben, om niet te spreken van de rol, die zij volgens denzelfden onderzoeker in het gezonde organisme spelen. Het kan dus slechts van belang zijn, de levensvoorwaarden van die cellen nader te leeren kennen; en dat aan die kennis nog bijna alles ontbreekt, daarover heeft METCHNIKOFF nog het vorige jaar geklaagd, toen hij voor de Amsterdamsche studenten een voordracht hield over „Réactions phagocytaires". [1])

De methode van onderzoek bestond daarin, dat wij witte bloedlichaampjes van het paard na overbrengen in verschillende media, met kool in aanraking brachten en dan bepaalden welk procentgehalte van de leucocyten koolpartikeltjes had opgenomen. *Dit procentgehalte was de maat voor den graad der phagocytose en leverde een uitdrukking voor den invloed van verschillende agentia op die levensfunctie.*

Men gaat hierbij uit van het beginsel, dat het phagocytair vermogen der verschillende der in een suspensie aanwezige phagocyten een verschillende grootte bezit; zoodat, hoe nadeeliger de invloed van het agens is, des te geringer het aantal der phagocyten moet zijn, dat kool heeft kunnen opnemen.

Wij kozen hier een indifferente stof en geen bacteriën, omdat in het laatste geval de zaak te gecompliceerd zou worden. Men denke slechts aan het in den laatsten tijd vastgestelde feit, dat de meeste bacteriën, om door phagocyten te kunnen worden opgenomen, een voorbereiding moeten ondergaan. [2]) Hieruit volgt, dat behalve het agens als zoodanig, ook de graad van voorbereiding van invloed zal moeten zijn op den omvang der phagocytose. Daarbij komt, dat de bacteriën vergiften kunnen afscheiden, die de phagocytose benadeelen; wederom dus een factor.

---

[1]) „Nous ne sommes qu'au début. Lorsqu'on connaîtra mieux *la physiologie des phagocytes* (wij cursiveeren) on cherchera des méthodes pour augmenter l'activité de ces éléments dans la lutte contre les microbes et on cherchera d'autres pour préserver contre l'attaque des phagocytes les cellules nobles de notre corps. En poursuivant ce but, il faudra tenir compte de ce que les phagocytes sont non seulement les destructeurs des microbes, mais qu'ils sont capables aussi de s'encorporer des poisons solubles et de les rendre inoffensifs. Leur rôle n'en devient que plus important."

[2]) WRIGHT and DOUGLAS, Proceed. of the Royal Society **72**, 1903, p. 357 en latere verhandelingen, onder WRIGHT bewerkt. Verder HEKTOEN and RÜDIGER, Journ. of Infect. diseases **2**, 1905, p. 128 en andere verhandelingen onder HEKTOEN bewerkt.

Dat als indifferente stof kool werd genomen en niet de gebruikelijke karmijnkorreltjes, had zijn grond daarin, dat opneming van kool veel gemakkelijker en met meer zekerheid is te constateeren. Om dezelfde reden werd dan ook reeds vroeger bij de onderzoekingen over den invloed van koolzuur [1]) en over den invloed van cyaankalium [2]) op de phagocytose, aan kool de voorkeur gegeven.

De door ons gebruikte leucocyten waren evenals toen afkomstig van paardebloed [3]). Zij werden daaruit verkregen door het in een gesloten flesch met glasscherven te defibrineeren, dan door neteldoek te coleeren en het daarna korten tijd aan zich zelf over te laten. De roode bloedlichaampjes bezinken dan, terwijl het serum, dat daarboven achterblijft, alle leucocyten bevat. Verwijdert men nu die troebele vloeistof, dan heeft men dus een suspensie van leucocyten in serum. Deze suspensie kan men rijker aan leucocyten maken door haar te centrifugeeren, een groot deel van het heldere serum weg te nemen, en de op den bodem liggende leucocyten in het overgebleven serum te verdeelen.

Nadere bijzonderheden omtrent deze methode, zoo ook over de wijze, waarop de kool wordt toebereid, deze met de leucocyten wordt in aanraking gebracht en hoe het procentgehalte van de koolhoudende cellen wordt bepaald, leze men in ons meer uitvoerig artikel in het Biochemische Zeitschrift [4]).

## II. *Invloed van watertoevoeging op de phagocytose.*

In de eerste plaats werd bestudeerd, welken invloed toevoeging van water uitoefent op de phagocytose.

Tot dit doel werden gelijke hoeveelheden der leucocyten suspensie vermengd met serum, dat vooraf met bekende hoeveelheden water was verdund. De volgende tabel bevat de resultaten van een der proevenreeksen. Zij zal zonder nadere uitlegging duidelijk zijn.

---

1) HAMBURGER. VIRCHOW's Archiv, **156**, 1899. S. 329. Osmot. Druck u. Ionenlehre. 1. S. 416.

2) HAMBURGER. Het gedrag van witte bloedlichaampjes tegenover Cyaankalium in ROSENSTEIN's Feestbundel. 1902.

3) Het geregeld verkrijgen van paardebloed leverde in Groningen bezwaar op. De Heer K. HOEFNAGEL, Directeur van het Abattoir te Utrecht, had de groote welwillendheid, daaraan op afdoende wijze tegemoet te komen, waarvoor wij hem ook hier onzen oprechten dank betuigen.

4) Vergel. ook HAMBURGER, Osmot. Druck u. Ionenlehre, Bd. 1. S. 401.

TABEL I.

Invloed van concentratie-vermindering van het serum.

| Serum verdund met | Aantal onderzochte witte bloedlichaampjes | Aantal witte bloedlichaampjes dat kool heeft opgenomen | Procentisch aantal koolhoudende witte bloedlichaampjes | Afneming van het phagocytair vermogen |
|---|---|---|---|---|
| 0% water | 886 | 331 | 37 | |
| 20 „ | 754 | 246 | 32 | 13.5% |
| 50 „ | 732 | 154 | 21 | 43 2 „ |
| 100 „ | 636 | 81 | 12½ | 66.2 „ |
| 140 „ | 530 | 0 | 0 | |
| 200 „ | 546 | 0 | 0 | |

Uit deze tabel blijkt, dat in serum, waaraan geen water is toegevoegd, van de onderzochte 886 leucocyten 331 kool hebben opgenomen, dat is dus 37 %.

Wij willen hier de opmerking maken, dat eigenlijk in het circuleerende bloed en ook in het gedefibrineerde het procentisch aantal phagocyten veel geringer is. Door een kunstgreep echter is er bij onze proeven voor gezorgd, dat de onderzochte leucocyten veel phagocyten bevatten. Die kunstgreep berust op het beginsel, dat onder de leucocyten de phagocyten de grootste bezinkingssnelheid bezitten. Na deze opmerking zal men zich dus niet hebben te verwonderen, dat in andere proevenreeksen het procentisch aantal koolhoudende phagocyten in normaal serum telkens een ander is.

Reeds door toevoeging van 20 % water aan serum neemt het phagocytair vermogen 13½ % af. Berekent men, hoe groot de daling zou zijn indien 5 % water ware toegevoegd, dan zou, in de onderstelling, dat er evenredigheid bestaat, de daling van het phagocytair vermogen bedragen hebben $\frac{5}{20} \times 13.5\ \% = 3.4\ \%$. M. a. w., *wanneer het bloedvocht een vermindering van osmotische concentratie van 5 % ondergaat, een vermindering, die bij een gezond individu dagelijks kan voorkomen* [1]), *dan daalt daardoor het phagocytair vermogen ongeveer* 3.4 %.

Naast die groote gevoeligheid der phagocyten voor de vermeerdering van hun watergehalte staat, gelijk de tabel leert, het feit,

[1]) Vergel. o. a. Koeppe. Pflüger's Archiv. **62**, 1896. S. 567. Koeppe vindt in een zijner proeven een daling beneden de gemiddelde osmotische drukking van ruim 10 %.

dat er aan den anderen kant toch nog tal van phagocyten zijn, die zelfs een verdunning van hun serum met 100 °/₀ water verdragen, een verdunning, die blijkens vroegere experimenten, een zwelling der cellen van veel meer dan 30 volume-procent moet teweeg brengen [1]).

Wij willen ons thans de vraag stellen: *is die daling der phagocytose van blijvenden aard?*

Om die vraag te beantwoorden werden de witte bloedlichaampjes, nadat ze aan den invloed der verdunde sera waren onderworpen geweest, in het oorspronkelijk onverdund serum teruggebracht, om dan opnieuw op hun koolopnemend vermogen te worden onderzocht.

TABEL II.

Na inwerking van verdund serum worden de phagocyten teruggebracht in normaal serum.

| Serum verdund met | Onderzocht aantal witte bloedlichaampjes | Aantal witte bloedlichaampjes die kool hebben opgenomen | Procentisch aantal koolhoudende witte bloedlichaampjes in normaal cerum |
|---|---|---|---|
| 0% water | 500 | 105 | 21 |
| 20 „ | 500 | 99 | 19.8 |
| 50 „ | 500 | 107 | 21.4 |
| 70 „ | 500 | 96 | 19.2 |
| 100 „ | 500 | 78 | 15.6 |
| 200 „ | 500 | 61 | 12.2 |

Uit deze tabel volgt, dat phagocyten, die vertoefd hebben in serum, dat met 20 °/₀ of 50 °/₀ water verdund was, verdunningen, die blijkens de vorige proevenreeks het phagocytair vermogen resp. 13.5 °/₀ en 43.2 °/₀ deden dalen, na terugbrengen in normaal serum *het oorspronkelijk phagocytair vermogen weer geheel hebben teruggekregen.*

Toevoeging van 100 °/₀ water aan het serum, brengt een *blijvende* benadeeling van een deel der phagocyten teweeg; door toevoeging van 200 °/₀ water is die blijvende benadeeling nog aanzienlijker. Toch frappeert het, hoe, terwijl in serum verdund met 200 °/₀ water,

[1]) Hamburger. Archiv. f. (Anat. u.) Physiol. 1898. S. 317.

geen enkele phagocyt meer kool kon opnemen, zich na overbrengen in het oorspronkelijk serum toch nog meer dan 50% der phagocyten herstellen.

*Het meerendeel der phagocyten kan dus een zeer aanzienlijke hoeveelheid water verdragen, zonder daardoor het phagocytair vermogen voor goed te verliezen.*

Men vraagt zich af, waarvan het afhangt of een phagocyt het phagocytair vermogen weer terug zal krijgen. Niet onmogelijk, zelfs waarschijnlijk is het, dat hier evenals bij de roode bloedlichaampjes, het verlies van celinhoud den doorslag geeft. Men herinnert zich, dat ook onder de roode bloedlichaampjes er altijd eenige zijn die inhoud verliezen, wanneer het serum met 70 % water vermengd is; [1]) (dat zijn de minst resistente). Bedraagt de hoeveelheid water 100 %, dan is het aantal gedestrueerde erythrocyten grooter. Vervangt men nu het met 100 % water vermengde serum door het onverdunde, dan herstellen zich de roode bloedlichaampjes, *die geen rooden inhoud hebben verloren, geheel*; van bolletjes worden zij weder platte biconcave schijfjes, die zich zelfs weer bij wijze van geldrollen aan elkander leggen.

Doch alleen doen dit bloedcellen, die geen kleurstof hebben verloren. Die wél inhoud verloren, kunnen zich niet weer herstellen. Nu is het ons inderdaad bij mikroskopisch onderzoek gebleken, dat er onder de phagocyten eenige zijn, die door serum + 70 % water, inhoud verliezen. Men ziet dan een gekorrelde massa er naast liggen. Bij inwerking van serum + 100 % water, blijkt het aantal leucocyten, die gekorrelden inhoud hebben uitgestooten, nog grooter. Het ligt voor de hand, dat na overbrenging in normaal serum zulke cellen wel niet meer in staat zijn, kool op te nemen. Met zekerheid uit te maken is dit echter bezwaarlijk, want bij dit overbrengen wordt de daar.naast liggende gekorrelde inhoud allicht verspreid en men heeft geen criterium meer of men een phagocyt voor zich heeft, die inhoud heeft verloren. Intusschen is het bij de groote analogie, die bestaat tusschen roode en witte bloedlichaampjes, zoowel ten aanzien van permeabiliteit als ten aanzien van osmotischen druk van den inhoud en zelfs van het procentisch volume van den waterigen inhoud [2]) zeker niet gewaagd aan te nemen, dat dezelfde vloeistof, die bij de roode bloedlichaampjes een kleurstof uittreden bij de minst resistente veroorzaakt, ook een onherstelbare opheffing van het phagocytair vermogen teweegbrengt.

Het is opmerkelijk, dat de *maximum*-resistentie bij de phagocyten verder gaat dan bij de erythrocyten. Bij verdunning van het serum met 200% water namelijk gaan de erythrocyten van het paard *alle* te gronde, van de phagocyten nog niet de helft.

## III. *Invloed van wateronttrekking op de phagocytose.*

Op gelijke wijze als toevoeging van water werd de onttrekking van water bestudeerd. Tot dit doel werden in serum verschillende

---

1) Hamburger. Zittingsverslag der Kon. Akad. v. Wetensch., 26 Maart 1885.

2) Osmot. Druck u. Jonenlehre I, S. 401—435.

hoeveelheden keukenzout opgelost, nl. 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 °/₀ en meer. De volgende tabel leert, welken invloed deze toevoeging op de phagocytose had.

TABEL III.

Invloed van concentratie-verhooging van het serum.

| In het Serum is opgelost | Met de vloeistof van de voorgaande kolom komen overeen | Procentisch aantal koolhoudende leucocyten | Afneming van het phagocytair vermogen |
|---|---|---|---|
| 0 °/₀ NaCl | NaCl 0.9°/₀ | $\frac{208}{832} \times 100 = 26$ °/₀ | |
| 0.1 „ | „ 1 | $\frac{184}{874} \times 100 = 21.5$ | 17.3°/₀ |
| 0.2 „ | „ 1.1 | $\frac{184}{1005} \times 100 = 18.3$ | 29.6 |
| 0.3 „ | „ 1.2 | $\frac{76}{941} \times 100 = 8$ | 69.2 |
| 0.4 „ | „ 1.3 | $\frac{43}{793} \times 100 = 5.4$ | 79.2 |

*Men ziet, dat de schadelijke invloed zeer aanzienlijk is, veel aanzienlijker dan door vermindering van de osmotische concentratie.* Immers daar zagen wij dat verdunning van serum met 20 °/₀ water, een daling van het phagocytair vermogen van 13.5 °/₀ veroorzaakte; hier, dat door vermeerdering der osmotische concentratie met slechts 10 °/₀, een daling van het phagocytair vermogen van 17.3 °/₀ wordt teweeggebracht. Die invloed zal reeds gevoeld worden binnen de physiologische grenzen, waartusschen de osmotische drukking van het bloedvocht zich in het normale individu pleegt te bewegen. Immers, dagelijks kan het gebeuren, dat bij een normaal individu de osmotische drukking van het bloedvocht nog enkele uren na den maaltijd met die van 0.1 °/₀ keukenzout verhoogd is [1]).

Men kan zich hier, evenals wij dit deden bij de onderzoekingen over vermindering van osmotische drukking, de vraag stellen, of

[1]) KOEPPE, l. c.

D. SCHOUTE. Het physisch-chemisch onderzoek van menschenlijk bloed in de kliniek. Diss. Groningen 1903.

Verg. ook Osmot. Druck u. Ionenlehre B. I S. 540 ff.; B. II S. 279 en 310 ff.

*de vermindering van phagocytair vermogen weer hersteld kan worden* door terugbrengen der witte bloedlichaampjes in het oorspronkelijke serum. De volgende tabel. IV geeft daarop een antwoord.

TABEL IV.

Na inwerking van serum van verhoogde concentratie, werden de leucocyten teruggebracht in normaal serum.

| In het Serum is opgelost | Na terugbrengen in normaal Serum bedraagt het phagocytair vermogen |
|---|---|
| 0°/₀ NaCl. | $\frac{273}{700} \times 100 = 39\%$ |
| 0.2 " | $\frac{246}{646} \times 100 = 38.4$ |
| 0.7 " | $\frac{226}{685} \times 100 = 33$ |
| 1.2 " | $\frac{170}{567} \times 100 = 30$ |
| 1.5 " | $\frac{149}{713} \times 100 = 21$ |
| 2 " | $\frac{87}{625} \times 100 = 14$ |
| 3 " | $\frac{57}{590} \times 100 = 9$ |

Men ziet, dat na inwerking van serum, waaraan 0.2 °/₀ keukenzout was toegevoegd, een vloeistof dus, die het phagocytair vermogen 29.6 °/₀ deed dalen (tabel III), terugbrengen in normaal serum het phagocytair vermogen weder geheel tot de oorspronkelijke waarde doet stijgen. Inwerking van serum, waarin 0.7 °/₀ NaCl was opgelost, laat echter een blijvende vermindering van phagocytose achter. Deze vermindering is echter gering wanneer men bedenkt, dat in het serum + 0.7 °/₀ NaCl zelf geen enkele phagocyt kool opneemt, de phagocytose dus tijdelijk geheel verlamd is.

Nu hadden die geconcentreerde media slechts een half uur op de phagocyten ingewerkt. Die tijd is ongetwijfeld lang genoeg voor de kleine cellen om evenwicht met hun nieuw medium te bereiken, doch *men kan zich toch afvragen of ook na langere inwerking het phagocytair vermogen weer tot den norm kan terugkeeren.* Deze vraag is vooral van belang voor het normale leven, waar een

verhooging van osmotische concentratie dikwijls langer dan een half uur zal duren. Uit dit oogpunt werd dan ook voor de volgende proeven, waarin de leucocyten een veel langduriger inwerking ondergingen, slechts 0.1 en 0.2 °/₀ NaCi in het serum opgelost; hoogere osmotische concentraties komen in het lichaam niet voor. Wij hebben nu dit serum van verhoogde osmotische concentratie gedurende 2, 24 en 48 uren laten inwerken en daarna de leucocyten weer teruggebracht in het normale serum. Wèl bleek dan, dat het phagocytair vermogen na 24 en 48 uur was afgenomen, doch een *gelijke* afneming was ook waar te nemen bij phagocyten, die resp. 24 en 48 uur in *normaal* serum hadden gelegen. Het langer verblijf in serum van verhoogde osmotische concentratie dus had geen *blijvenden* schadelijken invloed op het phagocytair vermogen uitgeoefend.

*Men mag dus het besluit trekken, dat in het levende individu een verhooging der osmotische concentratie van het bloedvocht, evenals trouwens een vermindering daarvan, een schadelijken invloed uitoefent op het phagocytair vermogen, doch dat deze invloed herstelbaar is; want wordt de osmotische drukking weer normaal, dan krijgen de phagocyten hun phagocytair vermogen weer geheel terug.*

Wanneer men uit hetgeen de phagocyten ons hier te zien gaven, mag besluiten tot hetgeen ook bij andere cellen met nagenoeg semipermeabelen wand het geval zal zijn, dan zal men uit de proeven sub II en III de gevolgtrekking kunnen maken, *dat de levensfunctie van cellen in hooge mate geïnfluenceerd wordt door kleine schommelingen in de osmotische concentratie der omgeving en dus ook van de cellen zelven.*

## IV. *Invloed van enkelvoudige zoutoplossingen.*

### 1 Chloornatrium-oplossingen.

Men kan zich nu de vraag stellen, waaraan de daling der bestudeerde levensfunctie is toe te schrijven, aan het gewijzigd watergehalte als zoodanig of aan de wijziging in de concentratie van een of meer der opgeloste stoffen.

Om deze vraag systematisch te onderzoeken hadden wij in het verdunde serum beurtelings verschillende bestandeelen tot hun oorspronkelijke concentratie kunnen brengen en dan nagaan in hoeverre dit de phagocytose zou verbeteren. Doch de inmiddels gedane waarneming, dat in een zuivere Na Cl-solutie van 0.9 pCt., de phagocyten in gelijke of nagenoeg gelijke mate kool opnemen als in het normale serum, deed ons van deze wijze van proefneming afzien.

In het voorbijgaan gezegd, heeft, na al hetgeen door LOEB [1]) en anderen is meegedeeld over de vergiftige werking van een zuivere keukenzout-solutie voor het leven van jonge zwemmende larven en voor levensverschijnselen van hoogere dieren, zooals hartswerking en darmbeweging, de nagenoeg volmaakte onschadelijkheid van die Na Cl-oplossing voor de phagocyten ons aanvankelijk wel verbaasd. Nu kan deze tegenstelling wel verklaard worden. Wordt een cel omringd door een enkelvoudige isotonische zoutsolutie, dan zijn twee dingen mogelijk. Er heeft een uitwisseling van ionen plaats: in dat geval wordt de chemische constitutie der cel gewijzigd, en de cel is in bepaalde levensfuncties gestoord. Zoo is het met de larven van fundulus, met de hartspier en met de darmmuscularis. Er is dan toevoeging van bepaalde ionen noodig om den chemischen bouw van de cel weer tot den norm terug te brengen. Is de cel echter niet of weinig permeabel voor ionen, dan zal een zuivere isotonische zoutoplossing weinig of geen verandering in den chemischen bouw van de cel teweeg brengen. Dit is het geval met de witte bloedlichaampjes, waarvan de geringe permeabiliteit voor de ionen van zouten, reeds vroeger ten duidelijkste is gebleken [2]).

Van dit gezichtspunt kan het ons dus niet verwonderen, dat in tegenstelling van hetgeen men waarneemt bij eieren en spieren, de zuivere NaCl-oplossing het phagocytair vermogen geheel of bijna geheel intact laat.

Bij dezen stand van zaken was het, om den invloed te leeren kennen, die bij wijziging der osmotische concentratie door het water als zoodanig wordt uitgeoefend, aangewezen, om de phagocytose te bestudeeren in NaCl-oplossingen van verschillende sterkte.

Tabel V geeft een overzicht van den invloed van verdunde NaCl-soluties op de phagocytose.

*De verrassend snelle daling der phagocytose in serum van verhoogde concentratie waargenomen (tabel III) wordt dus ook hier geconstateerd.*

Reeds door stijging der NaCl-concentratie van 0.9 tot 1 °/₀, neemt het phagocytair vermogen 60.6 °/₀ af. Van die snelle daling krijgt men ook een beeld, wanneer men ziet, hoe *veel minder* kool de koolhoudende phagocyten bevatten, wanneer zij in NaCl 1°/₀ dan wanneer zij in NaCl 0.9 °/₀ liggen.

Vergelijkt men echter de tabellen VI en III, dan blijkt, dat wanneer men bij de experimenten uitgaat van een NaCl-oplossing van 0.9 °/₀, toevoeging van keukenzout *een grootere daling van het phago-*

---

1) J. LOEB, American Journal of Physiol. **3** 1900 p. 327 en 383; **5** 1901 p. 362 Pflüger's Archiv **80** 1900 S. 229.
LINGLE, Americ. of Journal of Physiol. **4** 1900 p. 265.
Miss MOORE, Ibid. 1900 p. 386 enz.

2) HAMBURGER. Zeitschr. f. Biol.. **35**. 1897 S. 252 en S. 280; Zittingsversl. d. Koninkl. Akad. v. Wetensch. 11 April 1897.
Archiv f. (Anat. u.) Physiol 1898 S. 31 en S. 317.
VIRCHOW's Archiv **156** 1899 S. 329.
HAMBURGER en VAN DER SCHROEFF, Archiv f. (Anat. u.) Physiol. 1902. S. 251.

TABEL V.

Invloed van hyperisotonische NaCl-oplossingen.

| NaCl-oplossingen | Procentisch aantal koolhoudende leucocyten |
|---|---|
| NaCl-opl. 0.9°/₀ | $\frac{235}{756} \times 100 = 81$ °/₀ |
| NaCl 0.75°/₀ = NaCl 0.9°/₀ + 20°/₀ water | $\frac{208}{741} \times 100 = 28$ |
| „ 0.6 = „ 0.9 + 50 „ | $\frac{221}{1012} \times 100 = 21.8$ |
| „ 0.45 = „ 0.9 + 100 „ | $\frac{83}{745} \times 100 = 11.1$ |

Men ziet hoe krachtig de invloed van de verdunning der NaCl. solutie zich doet gelden.

TABEL VI.

Invloed van hyperisotonische keukenzoutoplossingen.

| NaCl-oplossingen | Procentisch aantal koolhoudende leucocyten | Daling van het phagocytair vermogen |
|---|---|---|
| NaCl 0.9°/₀ | $\frac{250}{722} \times 100 = 34.6$°/₀ | |
| „ 0.95 | $\frac{293}{875} \times 100 = 33.5$ | 3°/₀ |
| „ 1 | $\frac{95}{802} \times 100 = 11.84$ | 60.6 |
| „ 1.1 | $\frac{105}{981} \times 100 = 10.8$ | 69 |
| „ 1.2 | $\frac{7}{990} \times 100 = 0.7$ | 98 |
| „ 1.3 | $\frac{0}{200} \times 100 = 0$ | |
| „ 1.4 | $\frac{0}{150} \times 100 = 0$ | |
| „ 1.5 | $\frac{0}{150} \times 100 = 0$ | |

*cytair vermogen* ten gevolge heeft, dan wanneer men uitgaat van serum en dat met dezelfde hoeveelheid keukenzout verrijkt. Daaruit volgt, dat behalve de osmotische drukking, die voor de daling van het phagocytair vermogen wel zeker in hoofdzaak moet aansprakelijk gesteld worden, nog een andere factor in het spel is.

*En deze factor kan wel geen andere zijn dan deze, dat door de zuivere NaCl-oplossing de chemische samenstelling der phagocyten, al is het niet veel, dan toch gewijzigd wordt.* Een onzer heeft trouwens vroeger met Dr. VAN DER SCHROEFF aangetoond, [1]) dat evenals trouwens de roode bloedlichaampjes, ook leucocyten, in ieder geval voor anionen, permeabel zijn. Onder den invloed van zuiver keukenzout-oplossingen moeten dus de cellen, omdat hun chemische samenstelling niet onaangetast blijft, in levenskracht en phagocytair vermogen afnemen, of beter gezegd *meer* afnemen dan in een isosmotisch serum.

Wij hebben deze voorstelling nader aan het experiment getoetst, en redeneerden daarbij op de volgende wijze. Wanneer inderdaad de phagocyten in een hyperisotonische NaCl-solutie een chemische verandering ondergaan door uitwisseling van ionen, dan moet de vermindering van phagocytair vermogen, welke daarvan het gevolg is, geheel hersteld kunnen worden door overbrengen in normaal serum, doch niet geheel door overbrengen in NaCl van 0.9 %. Gelijk de volgende tabel leert, was dit het geval.

TABEL VII.

Invloed van NaCl-Oplossingen op de chemische samenstelling der phagocyten.

| De witte bloedlichaampjes bevonden zich gedurende 2½ uren in de volgende oplossingen | Phagocytair vermogen na overbrengen in | |
|---|---|---|
| | normaal Serum | NaCl-opl. 0.9% |
| NaCl 0.9% | $\frac{319}{942} \times 100 = 33.9\%$ | $\frac{284}{811} \times 100 = 35\%$ |
| „ 1 | $\frac{258}{775} \times 100 = 33.3$ | $\frac{251}{760} \times 100 = 33$ |
| „ 1.1 | $\frac{233}{790} \times 100 = 29.5$ | $\frac{209}{735} \times 100 = 28.6$ |
| „ 1.2 | $\frac{202}{722} \times 100 = 28$ | $\frac{175}{677} \times 100 = 26$ |

[1]) HAMBURGER en VAN DER SCHROEFF. l. c.

*Het is duidelijk, dat de phagocyten, die gedurende $2^1/_2$ uren aan den invloed van NaCl-oplossingen zijn blootgesteld geweest, na overbrengen in serum een grooter phagocytair vermogen vertoonen dan na overbrengen in NaCl* 0.9 %.

Den opmerkzamen lezer zal het echter als een tegenstelling treffen, dat dit alleen het geval is bij phagocyten, die voorheen in NaCl 1 %, 1.1 % en 1.2 % hadden vertoefd, doch niet met die, welke gedurende denzelfden tijd met NaCl 0.9 % waren in aanraking geweest. Daar hebben NaCl 0.9 % en serum juist het tegengesteld effect. Het laatste is echter slechts schijnbaar, daar in serum de phagocyten licht wat aan elkander kleven en daardoor niet zoo groote oppervlakte aan de kool aanbieden als in een NaCl-oplossing, waarin zij beter geïsoleerd blijven. Is dan ook, zooals dit juist bij een *isotonische* oplossing ons niet verwondert, de ongunstige invloed van de ionen der zuivere NaCl-oplossing betrekkelijk gering, dan kan deze gemakkelijk overtroffen worden door den ongunstigen invloed, dien het serum uitoefent op de vrije ligging der cellen.

Stijgt echter het ongunstige effect der Cl-ionen door het nemen van *hyperisotonische* NaCl-oplossingen, dan kan dit den ongunstigen invloed overtreffen, voortspruitende uit de minder goede isolatie der cellen, en men krijgt het in de tabel uitgedrukte resultaat.

Men zal naar aanleiding hiervan alleen nog vragen, waarom juist bij gebruik van een *isotonische* NaCl-oplossing de schadelijke invloed op de phagocyten niet te constateeren is, doch wel bij hyperisotonische NaCl-soluties en wel des te meer, naarmate de concentratie der keukenzoutoplossingen stijgt. Die vraag is alleszins gerechtvaardigd aangezien het slechts een kleine vermeerdering van een toch reeds groot aantal chloor-ionen of natrium-ionen geldt. Hier worden we onwillekeurig herinnerd aan hetgeen HEDIN heeft gevonden [1]) bij roode bloedlichaampjes. Uitvoerige onderzoekingen van dezen geleerde hebben aangetoond, dat in isosmotische *isotonische* zoutoplossingen de bloedlichaampjes een gelijk volume bezitten; in isosmotische *anisotonische* oplossingen zijn de volumina niet meer onderling gelijk. HEDIN is de verklaring van dit belangwekkende feit schuldig gebleven, doch men leert er toch wel uit, dat enkelvoudige zoutoplossingen, wanneer zij anisotonisch zijn, op de cellen nog op andere wijze werkzaam zijn dan alleen door hun osmotische drukking. Wij stellen ons voor, deze aangelegenheid nader te onderzoeken. Waarschijnlijk wordt door een wijziging in de dissociatie van den celinhoud, een veranderde voorwaarde voor ionenuitwisseling geboren.

---

[1]) HEDIN. Skandinavisches Archiv f. Physiol, 1895 S. 377.

## 2. Chloorkaliumoplossingen.

Toen wij over den invloed van chloornatrium spraken, schreven wij dezen aan chloor-ionen toe. Wij deden dit op grond van vergelijkende onderzoekingen van chloornatrium en chloorkalium, waarvan thans een en ander volgt.

Het is ons namelijk gebleken, dat isosmotische oplossingen van NaCl en KCl nagenoeg denzelfden invloed op de phagocytose hadden.

### TABEL VIII.

Vergelijking van isosmotische hoeveelheden Chloornatrium en Chloorkalium.

| | Procentisch aantal koolhoudende leucocyten |
|---|---|
| Serum | $\frac{253}{722} \times 100 = 35$ % |
| NaCl-opl. 0.9% | $\frac{300}{836} \times 100 = 36$ |
| KCl-opl. 1.15% (isot. m. NaCl-opl. 0.9%) | $\frac{258}{277} \times 100 = 34$ |
| Serum + 0.1 % NaCl | $\frac{183}{672} \times 100 = 27$ |
| „ + 0.127 „ KCl | $\frac{181}{715} \times 100 = 25$ |
| „ + 0.3 „ NaCl | $\frac{45}{630} \times 100 = 7$ |
| „ + 0.38 „ KCl | $\frac{54}{683} \times 100 = 8$ |
| „ + 0.3 „ NaCl } daarna in normaal serum overgebracht | $\frac{184}{600} \times 100 = 30$ |
| „ + 0.38 „ KCl } daarna in normaal serum overgebracht | $\frac{185}{621} \times 100 = 30$ |

Twee andere parallelproeven gaven in NaCl-oplossing 0.9 %:

$\frac{198}{863} \times 100 = 23$ % koolhoudende leucocyten

en $\frac{146}{677} \times 100 = 21.5$ % „ „

de isosmotische KCl-oplossing 1.15 %:

$$\frac{128}{615} \times 100 = 21\ \% \text{ koolhoudende leucocyten}$$

$$\text{en } \frac{165}{732} \times 100 = 22.5\ \% \quad \text{,,} \quad \text{,,}$$

*zoodat een onderscheid tusschen den invloed van KCl en NaCl niet te constateeren is.*

### 3. Invloed van chloorcalcium.

De groote beteekenis, die volgens de onderzoekingen van den laatsten tijd aan het gehalte der weefselvloeistoffen aan Ca-ionen moet toegekend worden [1]), deed het gewenscht schijnen ook bij de phagocyten proeven in die richting te nemen.

Wij hebben tot dit doel in paardeserum verschillende hoeveelheden $CaCl_2$ opgelost en de aldus verkregen leucocyten-suspensie met kool vermengd.

TABEL IX.

Invloed van chloorcalcium.

| Serum + $CaCl_2$ 6 aq. | Procentisch aantal koolhoudende leucocyten | Vermeerdering van het phagocytair vermogen |
|---|---|---|
| 0% | $\frac{132}{612} \times 100 = 21.2\%$ | |
| 0.01% | $\frac{225}{861} \times 100 = 26$ | 22.6% |
| 0.1 | $\frac{180}{652} \times 100 = 27.6$ | 30.2 |
| 0.5 | $\frac{162}{598} \times 100 = 27$ | 27.3 |
| 1 | $\frac{0}{724} \times 100 = 0$ | |

*Reeds door toevoeging van* 0.01 % *Ca* $Cl_2$ 6 *aq. bij het serum ontstaat een toeneming van het phagocytair vermogen van* 22.6 %; door toe-

1) Zie vooral de onderzoekingen van LOEB. University of California Publications en van LANGENDORFF en HUECK. Pflüger's Archiv 96 1903 S. 473; voor de gezamenlijke literatuuropgave tot 1904 zie Osmotischer Druck u. Ionenlehre B. III, S. 107 etc.

voeging van 0.1 % $CaCl_2$ 6 aq. wordt die stijging nog wat grooter, om door 0.5 % $CaCl_2$ 6 aq. weer af te nemen.

Aan de eerstgenoemde stijging welke ontstaat door toevoeging van 0.01 % $CaCl_2$, is de meeste waarde te hechten; immers deze geeft den invloed van het $CaCl_2$ op de zuiverste wijze weer. Waar 0.1 %, 0.5 % en 1 % $CaCl_2$ zijn toegevoegd, werkt, volgens hetgeen wij boven herhaalde malen hebben gezien, de invloed van de osmotische drukking de vermeerdering der phagocytose tegen.

Men staat hier voor een verschijnsel, dat geheel in overeenstemming is met het door LANGENDORFF waargenomen feit, dat namelijk na inspuiting van sporen calcium in de bloedbaan, het hart krachtiger gaat kloppen. Wij moeten hier denken aan een invloed van het Ca-ion op de contractiele substantie en het is te verwachten, dat de spiersubstantie en ook de phagocyten voor dit kation zal blijken permeabel te zijn.

4. Invloed van citras natricus.

Bij het veelvuldig gebruik, dat na de onderzoekingen van WRIGHT en DOUGLAS [1]) tegenwoordig door bacteriologen van deze stof gemaakt wordt om de stolling van het bloed tegen te gaan, [1]) scheen het gewenscht, ook van deze stof den invloed op de phagocytose te bestudeeren. De volgende tabel geeft een overzicht van de genomen proeven.

Genomen werden de gebruikelijke oplossingen van 1 % en 2 % Citras natricus in NaCl solutie van 0.9 %.

TABEL X.

Invloed van citras natricus.

| | Procentisch aantal koolhoudende leucocyten. |
|---|---|
| (*a*) 1 cc. leukocyten suspensie + 2 cc. eener solutie van 1 % citras natr. in NaCl 0.9 % | 0 |
| (*b*) 1 cc. leukocyten suspensie + 2 cc. eener solutie van 2 % citras natr. in NaCl 0.9 % | 0 |
| (*c*) leucocyten van (*a*) overgebracht in NaCl 0.9 % | $\frac{260}{686} \times 100 = 38\%$ |
| (*d*) leucocyten van (*b*) overgebracht in NaCl 0.9 % | $\frac{255}{731} \times 100 = 35\%$ |
| (*e*) 1 cc. leucocyten suspensie + 2 cc. NaCl-opl. van 0.9 % (Contrôle) | $\frac{369}{725} \times 100 = 50\%$ |

[1]) WRIGHT and DOUGLAS, Proceed. of the Roy. Soc. **72**, 1903, p. 357; **73**, 1904, p. 128.

Het blijkt dus 1°. dat in een oplossing van citras natricus 1—2 °/₀ in Na Cl 0.9 °/₀ het phagocytair vermogen totaal uitblijft;

2°. dat het phagocytair vermogen weer gedeeltelijk voor den dag komt, wanneer de cellen overgebracht worden in Na Cl 0.9 °/₀. *De blijvende daling van het phagocytair vermogen bedraagt echter toch nog ongeveer 28 °/₀.*

5. *Invloed van Fluornatrium.*

Ook het fluornatrium wordt veelvoudig gebruikt om de stolling van het bloed te voorkomen. Het scheen van belang ook van deze stof den invloed op de phagocytose na te gaan.

TABEL XI.

Invloed van Fluornatrium.

| | Procentisch aantal koolhoudende leucocyten | |
|---|---|---|
| | vóór de overbrenging in NaCl 0.9°/₀ | na de overbrenging in NaCl 0.9°/₀ |
| 2cc leucocyten suspensie + 2cc NaFl 0.65°/₀ (isot. met NaCl 0.9)°/₀ | 0°/₀ | $\frac{91}{677} \times 100 = 14$°/₀ |
| „ + 2cc NaFl 1°/₀ | 0 | $\frac{30}{511} \times 100 = 6$ |
| + 2cc NaFl 2°/₀ | 0 | 0 |
| + 2cc NaCl 0.9°/₀ | | $\frac{369}{725} \times 100 = 50$ |

Uit deze tabel volgt, dat wanneer op leucocyten een fluornatrium oplossing van 0.65 °/₀ (isot. met Na Cl 0.9 °/₀), 1 °/₀ of 2°/₀ heeft ingewerkt, het phagocytair vermogen geheel verlamd is, ja zelfs na overbrengen in Na Cl 0.9 °/₀ geheel of grootendeels voor goed blijkt vernietigd. *NaFl is dus voor phagocyten een sterk protoplasmavergift.*

V. *Invloed van zuur en alkali.*

I. Invloed van zuur.

De groote beteekenis, die het alkaligehalte van het bloedvocht blijkt te bezitten, zoowel voor de intensiteit der oxydaties in het lichaam als bij infectieziekten, maakte het gewenscht, den invloed van vermindering en van vermeerdering er van op het phagocytair vermogen te bestudeeren.

De volgende tabel geeft een overzicht van een der proeven.

TABEL XII.

Vermindering van het alkaligehalte van het serum.

| 1 cc $^1/_2$ n. $H_2SO_4$ + | Gehalte aan toegevoegd zuur | Procentisch aantal kool houdende bloedlichaampjes |
|---|---|---|
| 9 cc serum | $^1/_{20}$ norm. | 0 |
| 14 cc " | $^1/_{30}$ " | $\frac{13}{308} \times 100 = 4.3\%$ |
| 19 cc " | $^1/_{40}$ " | $\frac{35}{398} \times 100 = 9$ |
| 49 cc " | $^1/_{100}$ " | $\frac{165}{724} \times 100 = 21.4$ |
| 299 cc " | $^1/_{600}$ " | $\frac{255}{612} \times 100 = 41.7$ |
| 499 cc " | $^1/_{1000}$ " | $\frac{256}{530} \times 100 = 43.5$ |
| normaal serum | | $\frac{227}{530} \times 100 = 43$ |

Men ziet, dat toevoeging reeds van $^1/_{600}$ N.-zuur de phagocytose gaat benadeelen.

Nu komen 100 c.c. paardeserum blijkens titratie met lakmoïd gemiddeld overeen met $75.5\,^1/_{25}$ N.-zuur[1]) waaruit zich laat berekenen, dat het serum een alkalische vloeistof van $^1/_{30}$ normaal vertegenwoordigt.

Door toevoeging van $^1/_{600}$ N.-zuur vermindert men dus het alkaligehalte met 5 %.

*Vermindering van het alkaligehalte van het serum met 5 % benadeelt dus reeds de phagocytose.*

Dit resultaat is in volmaakte overeenstemming met het nadeel dat een individu ondervindt, wanneer men veel zuur per os geeft.

Er is alle grond om aan te nemen dat de vergiftige werking van het zuur berust op een daling der oxydatieprocessen. Daarmede komt ook overeen hetgeen J. LOEB onlangs weer bij den invloed

1) HAMBURGER, Verh. Kon. Akad. v. Wetensch. 2e Sectie, Dl. VI, N°. I 1897.

van sporen Na OH (OH-ionen) op de kunstmatige bevruchting van zee-egeleieren vond. Daaraan moet, zooals de schrijver heeft duidelijk gemaakt, een versnelling van chemische reacties ten grondslag liggen[1]).

TABEL XIII.

Vermeerdering van de alkaliciteit van het serum.

| 1cc $^1/_2$ n. NaOH + | Gehalte aan toegevoegd alkali | Procentisch aantal koolhoudende witte bloedlichaampjes |
|---|---|---|
| 29cc Serum | $^1/_{60}$ | $\frac{25}{622} \times 100 = 4$ |
| 37cc " | $^1/_{76}$ | $\frac{57}{840} \times 100 = 6.8$ |
| 49cc " | $^1/_{100}$ | $\frac{114}{707} \times 100 = 16$ |
| 99cc " | $^1/_{200}$ | $\frac{179}{716} \times 100 = 25$ |
| 199cc " | $^1/_{400}$ | $\frac{143}{531} \times 100 = 27$ |
| 399cc " | $^1/_{800}$ | $\frac{149}{580} \times 100 = 25.7$ |
| normaal serum | | $\frac{177}{664} \times 100 = 26.5$ |

Uit deze tabel blijkt, dat een *toeneming* van het serum aan OH-Ionen binnen wijde grenzen geen noemenswaardigen invloed op het phagocytair vermogen uitoefent. Het laatste blijft onveranderd, totdat het gehalte vermeerderd is met ongeveer $^1/_{200}$ normaal, d. i. dus met 15 °/₀ van het oorspronkelijk alkaligehalte. Dan gaat bij verdere toevoeging van alkali het phagocytair vermogen dalen.

*Veel gevoeliger nog, zoowel voor zuur als voor alkali blijken de phagocyten te zijn wanneer die stoffen in plaats bij serum, bij NaCl-opl.* 0.9 °/₀ *worden gevoegd.* De proeven daaromtrent, volgen in een uitvoeriger verhandeling.

Wij hebben nog een aantal experimenten verricht met stoffen, waarvan de invloed op het phagocytair vermogen belangstelling inboezemde,

[1]) J. LOEB, PFLÜGER's Archiev **118**, 1907, H. 3/4, S. 181.

bijv. met *ureum, chinine, argentum colloidale, heterogeen serum;* doch hierover zullen later mededeelingen worden gedaan.

### *Résumé.*

De voorgaande onderzoekingen hebben in hoofdzaak tot de volgende uitkomsten geleid.

1. De invloed van verschillende media op het phagocytair vermogen van witte bloedlichaampjes laat zich op geheel betrouwbare wijze bepalen en dus ook vergelijken, door telling van het procentisch aantal cellen, dat bij lichaamstemperatuur koolpartikeltjes kan opnemen.

2. *De toevoeging van water aan het natuurlijke medium der phagocyten, d. i. aan het eigen serum, doet zich op zeer nadeelige wijze op het phagocytair vermogen gelden.*

*Reeds een vermindering van osmotische concentratie zooals die bij het normale individu dagelijks kan voorkomen, brengt een niet onbeteekenende daling van het phagocytair vermogen teweeg.*

Zoo bleek in een der proevenreeksen, dat terwijl in normaal onverdund serum 37 % der leukocyten kool hadden opgenomen, het aantal koolhoudende cellen in het met 20 % water verdunde serum 32 % bedroeg. Dit komt overeen met een afneming der phagocytose van $\frac{37-32}{37} \times 100 = \mathbf{13.5}$ %.

Door toevoeging van 50 % water bij het serum daalde het procentgehalte der koolhoudende phagocyten tot 21 %, dus hier een vermindering der phagocytose van $\frac{37-25}{37} \times 100 = \mathbf{43}$ %.

Door toevoeging van 140 en 200 % water daalde het procentgehalte der koolhoudende leukocyten op 0, m. a. w., was het phagocytair vermogen opgeheven; doch slechts *tijdelijk; want*

3. *Door terugbrengen van de door toevoeging van water benadeelde cellen in hun eigen serum, keert het phagocytair vermogen weer geheel of gedeeltelijk terug.*

Volkomen was die terugkeer, wanneer het serum met 20 % of 50 % water verdund was, gedeeltelijk wanneer 70 tot 100 % water was toegevoegd. Ja zelfs wanneer de verdunning 200 % had bedragen, een verdunning waarin, gelijk sub 2 vermeld, de phagocytose geheel was opgeheven, kon nog een herstel van het phagocytair vermogen tot meer dan de helft van het oorspronkelijke worden waargenomen.

4. *De hier bij de phagocyten waargenomen verschijnselen stemmen met die, welke vroeger bij roode bloedlichaampjes werden waargenomen, overeen.*

1°. Kunnen, evenals de roode bloedlichaampjes, ook de phagocyten een groote hoeveelheid (± 60 °/₀) water verdragen, zonder dat een daarvan te gronde gaat;

2°. Kunnen de door toevoeging van water in de phagocyten veroorzaakte veranderingen, voorzoover deze niet tot een destructie gevoerd hebben, tenminste te oordeelen naar het phagocytair vermogen, weer worden hersteld, door terugbrengen in het normale serum.

5. *Verhooging der osmotische concentratie van het serum, heeft evenals vermindering* (vergel. sub 2) *een zeer nadeeligen invloed op de phagocytose. Zelfs blijkt verhooging der osmotische concentratie nog veel nadeeliger te werken dan een vermindering van denzelfden graad.* Reeds toevoeging van 0.1°/₀ NaCl aan het serum, veroorzaakte een daling van het phagocytair vermogen van 17.3°/₀.

Door toevoeging van 0.4°/₀ NaCl was een vermindering van 79.2°/₀ te constateeren. Toevoeging van 0.5°/₀ NaCl reduceerde het phagocytair vermogen tot 0; een en ander was echter slechts tijdelijk, want

6. *Na terugbrengen van de door toevoeging van NaCl aan het serum benadeelde cellen, in hun oorsponkelijk bloedvocht, keerde hun phagocytair vermogen weer geheel of gedeeltelijk terug*, geheel wanneer 0.1°/₀—0.2°/₀ NaCl was toegevoegd geweest, gedeeltelijk wanneer men meer had toegevoegd.

7. Is dus blijkens sub 2 en 5 het phagocytair vermogen bijzonder en wel in ongunstigen zin gevoelig voor wijziging van de normale osmotische concentratie van het bloedvocht, zoodra het bloedvocht, dank zij vooral de werkzaamheid der nieren, de normale osmotische concentratie heeft teruggekregen, heeft zich ook het phagocytair vermogen weer geheel hersteld. Blijkens de experimenten is dit herstel nog mogelijk na een inwerking van het anisotonische serum gedurende 24 uren en langeren tijd.

8. *In NaCl-oplossingen van* 0.9°/₀ *is het phagocytair vermogen nagenoeg even groot als in serum.* Onder den invloed van zwakkere en sterkere keukenzout-soluties neemt het aanzienlijk af, zelfs nog meer dan in het daarmede isosmotisch gemaakte serum.

9. *Dit feit leidt tot de conclusie, dat de daling van het phagocytair vermogen, veroorzaakt door anisotonie van het serum, in hoofdzaak haar grond moet hebben in het gewijzigd watergehalte der cellen.*

10. *Naast het gewijzigd watergehalte is nog een andere factor aansprakelijk te stellen, namelijk de chemische verandering, die tengevolge van de uitwisseling van bestanddeelen der cel met die der omgeving plaats heeft en die uit den aard der zaak aanzienlijker is, wanneer een enkelvoudige NaCl-oplossing dan wanneer een daarmede isosmotisch serum de cellen omringt.* Vandaar dat phagocyten, die gelegen hebben in hyperisotonische NaCl-oplossingen, na terugbrengen in serum een ietwat grooter phagocytair vermogen vertoonen dan wanneer zij in NaCl 0.9°/₀ zijn teruggebracht. (vergel. tabel VII). In het laatste geval vinden zij niet zooals in het eerste geval de gelegenheid, om de ionen, die zij in de anisotonische NaCl-oplossingen hebben verloren, terug te nemen.

11. *Waarschijnlijk is het, dat tot die ionen behooren Ca- en OH-ionen.*

Wat het Ca betreft is immers gebleken, dat reeds wanneer aan serum slechts **0.01°/₀ $CaCl_2$. 6aq**, d. i. dus ongeveer **0.005°/₀ $CaCl_2$** wordt toegevoegd, het phagocytair vermogen *steeg* met circa **22.6°/₀**. Er moeten wel Ca-ionen in de phagocyten binnengedrongen zijn. Omgekeerd zullen wel Ca-ionen de phagocyten verlaten, wanneer het Ca-gehalte van het medium daalt beneden dat waaraan de phagocyten gewoon zijn.

Dit verlies van Ca-ionen zal een vermindering van het phagocytair vermogen moeten na zich slepen.

Iets dergelijks neemt men ook waar bij de OH-ionen. Immers onze experimenten hebben het bewijs geleverd, dat vermindering van het gehalte daarvan het phagocytair vermogen doet dalen. *Vermindert men het alkaligehalte van het serum met slechts* 5°/₀, wat tevens vermindering van het alkaligehalte der phagocyten tengevolge moet hebben, *dan blijkt een duidelijke daling van het phagocytair vermogen op te treden.*

12. Door Loeb en verschillende andere onderzoekers is gevonden, dat een zuivere NaCl-oplossing als een vergif moet aangemerkt worden voor de larven van lagere zeedieren, voor de hartspier en voor de muscularis van den darm. *Voor phagocyten is dit niet het geval.* Dit blijkt uit het feit, dat in een met het serum isotonische NaCl-

oplossing de phagocytose nagenoeg even groot is als in het serum zelf.

De tegenstelling kan op ongedwongen wijze daardoor verklaard worden, dat de uitwisseling van bestanddeelen tusschen leucocyten en Na Cl-solutie, vooral wanneer deze isotonisch is met het serum (vergel. p. 83) gering is, terwijl bij de andere cellen (trilhaarcellen, spiercellen) de voorwaarden van uitwisseling ruimer zijn en hun chemische structuur zich dus in ruimere mate wijzigt; en van het laatste is stoornis van de functie het gevolg.

13. Bij het onderzoek in vitro van het gedrag van phagocyten tegenover bacteriën, mag men blijkens de boven aangeduide feiten, den graad der osmotische concentratie en van het alkaligehalte van het medium, niet over het hoofd zien. Bij verschillende experimenten heeft men dit wel gedaan. Deze behooren dus herhaald te worden.

*Groningen*, Juni 1907.

**Plantkunde**. — De Heer WENT biedt eene mededeeling aan van den Heer J. VAN BEUSEKOM: *„Over den invloed van wondprikkels op de vorming van adventieve knoppen in de bladeren van Gnetum Gnemon L."*

(Mede aangeboden door den Heer MOLL).

Reeds sedert lang was nu en dan waargenomen, dat zich adventieve spruiten vormden op bladeren van een in den Hortus Botanicus te Utrecht gekweekt exemplaar van *Gnetum Gnemon L.*

In Januari 1906 maakte Prof. WENT mij hierop opmerkzaam en gaf mij den raad, de ontwikkeling dezer adventieve spruiten te bestudeeren en te trachten de oorzaak hunner vorming na te gaan.

De gevolgtrekkingen, waartoe dit onderzoek geleid heeft, in eenigszins beknopten vorm te bespreken, is het doel van deze mededeeling.

De adventieve knoppen treden op aan den top van bladeren, terwijl deze nog aan de plant bevestigd zijn.

Zoover ik heb kunnen nagaan, is buiten den Utrechtschen hortus, de vorming dezer adventieve knoppen nergens, 't zij bij op hun natuurlijke standplaats, 't zij bij in botanische tuinen[1]) zich bevindende exemplaren van Gnetum Gnemon ooit waargenomen. De Utrechtsche hortus is 3 exemplaren van Gnetum Gnemon rijk. Een daarvan is

[1]) Ik heb met betrekking hierop inlichtingen gekregen uit de andere botanische tuinen in ons land en die te München en ook uit 's Lands Plantentuin te Buitenzorg.

bij voortduring gekweekt in een kas (de zoogenaamde houten kas), waar de temperatuur 's winters op ongeveer 25° C wordt gehouden en de atmospheer zeer vochtig is. De beide andere bevonden zich, toen ik mijn onderzoek begon, in een andere kas (de zoogenaamde ijzeren kas), waar de temperatuur lager ('s winters gemiddeld 15° C) en de vochtigheid geringer is. Terwijl ik van de eerstgenoemde plant steeds bladeren, die in verschillende stadiën der knopvorming verkeerden, heb kunnen krijgen, zijn de beide andere 't verschijnsel pas gaan vertoonen, nadat ze in de warmere en vochtigere kas waren overgebracht.

Hoewel alle drie de planten, afgezien van de vorming van adventieve knoppen, zich blijkbaar in goede conditie bevinden en volstrekt geen ziekelijken indruk maken, bloeien ze uiterst zelden. Ik zelf heb 't alleen maar waargenomen bij een der uit de ijzeren kas afkomstige planten. Deze heeft één enkele ♂ bloeiwijze voortgebracht, waardoor ik in de gelegenheid kwam, de juistheid van de determinatie nog eens na te gaan.

De eerste uiterlijke verandering, die men aan een blad, dat adventieve knoppen zal gaan vormen, waarneemt, is, dat zich op den top ervan uiterst kleine, gele stipjes vertoonen, die men pas goed te zien krijgt, wanneer men het blad bij doorvallend licht bekijkt. Ze herinneren in dit opzicht wel eenigszins aan de oliestippen in de bladeren van de *Rutaceae* of *Hypericum*, maar zijn gewoonlijk grooter en minder dicht gezaaid dan deze.

Zooals althans bij de grootere met een loupe kan worden waargenomen, is op de plaats dier stipjes de epidermis van boven- of onderzijde of ook wel van beide tegelijk een weinig naar buiten gewelfd, zoodat men met kleine blaasjes te doen heeft.

Zooals straks nog zal worden aangetoond, zijn deze blaasjes 't gevolg van den steek eener schildluis, *Aspidiotus* spec., en als zoodanig volstrekt niet alleen tot den top van 't blad beperkt. Tot de vorming van adventieve knoppen echter is normaliter alleen de top van het blad in staat. Het verdere deel van de bladschijf kan alleen dan knoppen vormen, wanneer 't organisch verband met den top op een of andere manier verbroken is. Ook dan evenwel ontstaan ze op dat deel apicaal. — Dus alleen die blaasjes, welke aan 't apicale gedeelte van een blad ontstaan zijn, vormen de inleiding tot 't proces der knopvorming.

Eenvoudigheidshalve zullen we in 't vervolg alleen maar den bladtop noemen, daar de hierop betrekking hebbende mededeelingen ook in de andere gevallen van toepassing zijn.

Na eenigen tijd begint ook de omgeving van d e blaasjes te ver

kleuren; gewoonlijk wordt de top van het betrokken blad al spoedig beslist geel, ofschoon hij in sommige gevallen nog lang een min of meer groenachtige tint behoudt.

Tegelijkertijd met deze verkleuring ondergaat de bladtop eene verdikking. Deze verdikking is aanvankelijk macroscopisch niet zoo gemakkelijk waar te nemen, langzamerhand echter wordt zij sterker en gaat ten slotte meestal zoover, dat de bladtop stijf en moeilijk te buigen wordt.

Van de gele blaasjes is dan niets meer te zien.

De uitbreiding van dit verkleurings- en verdikkingsgebied in basale richting is zeer verschillend; langs den rand strekt 't zich gewoonlijk verder basipetaal uit dan in 't midden; steeds evenwel blijft het verschijnsel tot het apicale deel van het blad beperkt. Een nieuw stadium treedt in, wanneer het oppervlak van den verdikten bladtop, dat tot dusver als gevolg van de gelijkmatige zwelling glad was gebleven, oneffen begint te worden; zoowel aan 't onderste, als 't bovenste oppervlak is dit gewoonlijk waar te nemen, doch de bovenkant vertoont 't in den regel in de sterkste mate.

Gedurende de eerste weken zijn nu in 't algemeen verder geen opvallende veranderingen te constateeren, tot meestal na ongeveer een maand een wisselend aantal locale verhevenheidjes, geel als de bladtop, die ze voortbrengt, op den voorgrond treedt en de differentiatie van speciale woekeringscentra aan den dag brengt. Gewoonlijk zien we deze zich vooral in de richting loodrecht op 't bladoppervlak vergrooten tot formeele knobbeltjes.

Terwijl de knobbeltjes nog betrekkelijk klein zijn, beginnen zich op hun top bruin-grijze streepjes te vertoonen, welke zich voortdurend uitbreiden, waardoor ten slotte 't oppervlak der knobbeltjes geheel bruin wordt.

Gedurende eenigen tijd vertoont zulk een knobbel niets anders dan dat hij grooter en dikker wordt, daarna vormt zich op zekeren dag in zijn top een kleine opening, waardoor een groen puntje voor den dag komt, dat tot een bebladerd spruitje zal uitgroeien.

Zoowel op den onder- als op den bovenkant van den bladtop kunnen zich knobbels vormen. De meeste echter vormen zich op den bovenkant. Bij enkele bladeren heb ik knobbels op beide zijden tegelijk zien optreden.

De waarnemingen betreffende den tijd, dien een blad noodig heeft, om „rijpe" knobbels te vormen, nadat eenmaal de gele blaasjes zijn opgetreden, hebben tot eenigszins uiteenloopende resultaten geleid. Het vlugst ging dit bij de bladeren, die zich aan de bovenste takken of in de peripherie van de kroon bevonden en dus de gunstigste positie

met betrekking tot 't licht innamen. Op deze waren gewoonlijk een half jaar na het optreden der gele blaasjes flinke, verbruinde knobbels gevormd.

Hoe oud en hoe groot een knobbel moet zijn, om zich te openen en den adventieven knop gelegenheid tot uitloopen te geven, ook hiervoor is geen regel te geven. Ik heb er een zien uitloopen 5 weken nadat de knobbel voor 't eerst als speciale verhevenheid was waargenomen, terwijl andere na 5 à 7 maanden nog gesloten waren.

Wat de grootte der knobbels betreft, kan worden opgemerkt, dat terwijl knobbels, die nauwelijks meer dan 1 m. m. boven 't oppervlak van den bladtop uitstaken, zich openden, andere, die twee- of zelfs driemaal zoo hoog waren, hardnekkig gesloten bleven.

Toch bevatten ook de laatste wel degelijk een adventieven knop en niet zelden zelfs meer dan een.

Het microscopisch onderzoek is voor 't grootste deel uitgevoerd aan microtoom-praeparaten. Voor de fixatie van het materiaal heb ik gebruikt het door Juel [1]) aanbevolen chloorzink-ijsazijn-alcoholmengsel (2 gr. chloorzink en 2 ccm. ijsazijn op 100 ccm. alcohol 45—50 pCt). De bizondere hardheid van het bladweefsel maakte 't noodzakelijk, het materiaal vóór 't insmelten in paraffine gedurende 3 à 4 × 24 uur met een 40 pCt. oplossing van fluoorwaterstof in water te behandelen. Daarna werd 't dan 8 à 12 uur in stroomend water uitgespoeld, volgens de gewone methode gedehydreerd en na behandeling met chloroform in paraffine (smeltp. 62° C.) ingesmolten.

Om de doorsneden te kleuren heb ik me aanvankelijk bediend van Haematoxyline-Delafield en saffranine volgens de in Chamberlain's „Methods in Plant Histology" gegeven recepten [2]); deze methode bleek echter niet te voldoen voor 't differentieeren der uiterst dunwandige meristeemcellen. Daarom heb ik later altijd gekleurd met methylgroen en zure fuchsine [3]), waarmee zeer bevredigende resultaten verkregen werden.

De behandeling met fluoorwaterstof had tengevolge, dat de microtoompraeparaten niet voor alle waarnemingen geschikt waren; in die gevallen bediende ik me van uit de hand gesneden praeparaten, welke zoo noodig gekleurd werden met haematoxyline-Delafield.

De anatomie van het normale blad, waarover in de literatuur

---

1) H. O. Juel, Ueber den Pollenschlauch von Cupressus. (Flora. Bd. 93. 1904. pag. 56—62).

2) C. J. Chamberlain, Methods in Plant Histology 2nd ed. Chicago. 1905. pag. 30, 38 en 54.

3) Chamberlain. l. c. pag. 40, 44 en 68.

een en ander is te vinden bij BERTRAND [1]), DE BARY [2]), SCHEIT [3]) en HABERLANDT [4]), is als volgt.

De epidermis der onder- en bovenzijde bestaat uit betrekkelijk kleine, cubische cellen, wier buitenwand sterk verdikt en van een stevige cuticula voorzien is en waarvan grillig gevormde en gecanaliculeerde verdikkingen in 't cellumen naar binnen springen (vergel. BERTRAND, l. c. Pl. II fig. 6, 7, 8.). In de epidermis der onderzijde bevinden zich talrijke zonder regelmaat geplaatste stomata.

Onder de bovenste epidermis ligt het palissadeparenchym, gevormd door één aaneengesloten rij van weinig in de richting loodrecht op het bladoppervlak gerekte cellen (afmetingen 13 à 21 $\mu$ bij 21 à 30 $\mu$). Tusschen de palissadecellen en de onderste epidermis ligt het sponsparenchym, bestaande uit buisvormige cellen, wier diameter gemiddeld 18 $\mu$, op de plaats van een scheidingswand tusschen twee buizen gewoonlijk niet meer dan 9 $\mu$ is en hoogstens tot 28 $\mu$ kan toenemen. Tusschen de cellen van het sponsparenchym blijft een systeem van ruime intercellulaire holten over. In 't sponsparenchym worden talrijke dikwandige sklerenchymvezels aangetroffen, die meestal vertakt zijn en vaak een kolossale lengte hebben.

Een doorsnee door een bladtop, waarop gele blaasjes voorkomen, leert, dat die blaasjes veroorzaakt worden door hypertrophie van cellen van het sponsparenchym, die daar den buisvorm geheel verloren hebben en waaronder we er aantreffen met de afmetingen 91 bij 109 $\mu$, 100 bij 73 $\mu$, 100 bij 113 $\mu$ etc. Onder de cellen, waaruit de blaas bestaat, zijn er steeds eenige te vinden, welke in ongekleurde praeparaten opvallen doordat de wand min of meer gezwollen en bruin gekleurd is. In met zure fuchsine en methylgroen behandelde praeparaten is de wand van deze cellen blauw, die van de andere cellen rood gekleurd. Zooals bij toepassing der gebruikelijke reacties blijkt zijn deze wanden verkurkt. Ook onder de cellen van de epidermis zijn er steeds enkele met verkurkte wanden. Ook van 't palissadeparenchym kunnen zich enkele cellen vergroot hebben, doch steeds in geringe mate.

Terwijl in de blazen zelf 't proces nog iets verder gaat doordat in sommige der vergroote cellen, wier wanden niet verkurkt zijn,

---

[1]) C. E. BERTRAND, Anatomie comparée des tiges et des feuilles chez les Gnétacées et les Conifères. (Annales d. Sc. nat. Botanique 5ième série Tome XX. 1874).

[2]) A. DE BARY. Vergl. Anatomie der Vegetationsorgane der Phanerogamen und Farne. (Handb. der Physiol. Botanik von W. HOFMEISTER. Leipzig. 1877.)

[3]) M. SCHEIT, Die Tracheïden-Säume der Blattbündel der Coniferen etc. (Jenaische Zeitschr. f. Naturw. Bd. XVI. Neue Folge Bd. IX. 1883.)

[4]) G. HABERLANDT, Physiologische Pflanzenanatomie 2te Aufl. Leipzig. 1886.

deelwanden gaan optreden, begint ook de omgeving der blazen klaarblijkelijk op een van deze uitgaanden prikkel antwoordend, dergelijke veranderingen te ondergaan. Macroscopisch worden we dit gewaar door de min of meer gele tint, die de omgeving der blazen aanneemt. Microscopisch onderzoek van de doorsnee doet zien, dat nu ook buiten de blazen de sponsparenchymcellen gehypertropheerd zijn. Evenals bij de vorming der blaasjes wordt het chlorophyl in de gehypertropheerde cellen gedesorganiseerd.

Eenige belangrijke strekking van tot 't palissadeparenchym behoorende cellen is nu nog niet waartenemen.

In de meeste praeparaten valt nu reeds op 't bijzondere gedrag van die sponsparenchymcellen, welke onmiddellijk grenzen aan het palissadeparenchym. Terwijl de overige cellen van het sponsparenchym zich zooveel mogelijk gelijkmatig in alle richtingen uitzetten, vergrooten zich de onmiddellijk onder het palissadeparenchym gelegene voornamelijk in radiale richting, waardoor ze den indruk geven van 'n tweede rij van palissadecellen te vormen. Daar zij ook in latere stadia herhaaldelijk de aandacht op zich zullen vestigen, zal ik in 't vervolg in plaats van de zoo lastige omschrijving voor deze cellen den naam van „*subpalissadaire cellen*" gebruiken.

Ter illustratie van deze voornamelijk in radiale richting plaats hebbende vergrooting der subpalissadaire cellen mogen de beide volgende tabelletjes dienen:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A Subpaliss. cellen van een | Hoogte μ : 16 | 16 | 14.5 | 18 | 14.5 | 16 | 14 | 14.5 | 14.5 | 22 |
| normalen bladtop. | Breedte μ : 31 | 18 | 16 | 25.5 | 27 | 27 | 18 | 25.5 | 31 | 31 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| B Subpaliss. cellen van een | Hoogte μ : 33 | 26 | 38 | 44 | 47 | 42 |
| gelen bladtop. | Breedte μ : 31 | 29 | 18 | 31 | 33 | 33 |

In een bladtop, die zich macroscopisch behalve door de gele kleur door een duidelijke verdikking onderscheidt, vindt men de intercellulaire holten van 't sponsparenchym geheel verdwenen op hier en daar een klein hoekje na. De wederzijdsche druk, dien de cellen tengevolge hiervan op elkaar gaan uitoefenen, doet ze een meer polygonale gedaante aannemen. De cellen, die grenzen aan de subpalissadaire cellen en dikwijls ook de naar de onderste epidermis gekeerde rijen vertoonen neiging, zich te strekken in de richting loodrecht op 't bladoppervlak. In vele sponsparenchymcellen zijn deelwanden opgetreden.

Het aandeel, dat de subpalissadaire cellen in het verdikkingsproces nemen, is meestal zeer belangrijk. Zoo vond ik in een bladtop op een plaats, waar hij 332 μ dik was (de doorsnee van een normalen

top is gemiddeld 170 $\mu$), celrijen, gevormd uit subpalissadaire cellen, die door 2 of 3 dwarswanden gedeeld waren, van 90, 110, 115 en 127 $\mu$ hoogte. — De palissadecellen hadden op deze plaats geen merkbare vergrooting ondergaan.

Dat de verschillende weefsels ook in denzelfden bladtop niet overal dezelfde rol in 't verdikkingsproces spelen, blijkt uit de volgende cijfers, ontleend aan metingen, gedaan op 2 verschillende plaatsen van eenzelfden bladtop:

| | | |
|---|---|---|
| **Hoogte der palissadecellen** | 36 à 45 $\mu$ { de meeste door 2 of 3 dwarswanden gedeeld | 27 $\mu$ (ongedeeld). |
| **Hoogte der subpaliss. cellen** | 73 à 82 $\mu$ (de meeste gedeeld). | 146 $\mu$ (met talrijke deelwanden). |
| **Hoogte van het sponsparenchym** | 278 $\mu$. | 273 $\mu$. |

De op bladz. 3 genoemde speciale verdikkingen komen daardoor tot stand, dat dezelfde woekeringsprocessen, die de verdikking van den geheelen bladtop veroorzaken, op sommige plaatsen met bijzondere activiteit doorgaan, terwijl de omgeving tot rust schijnt te komen, Op den bovenkant worden zij gevormd door plaatselijk sterke woekering van de subpalissadaire cellen. Soms ook dragen de onderliggende van 't sponsparenchym afkomstige cellen er toe bij en dan is 't gewoonlijk niet meer uit te maken, welk deel afkomstig is van de subpalissadaire cellen en welk van 't oorspronkelijke sponsparenchym. In de meeste gevallen is de bijdrage van 't palissadeparenchym tot de vorming der speciale verhevenheden tamelijk onbeduidend.

De speciale verdikkingen op den onderkant van 't blad worden geheel gevormd door genetisch tot 't sponsparenchym behoorende cellen, doch overigens precies zoo als die op de bovenzijde. Doordat de cellen, waaruit zij zijn opgebouwd, zich deelen evenwijdig aan 't bladoppervlak en de daardoor gevormde deelcellen zich weer strekken, groeien deze speciale verdikkingen, die zich aanvankelijk als kleine oneffenheden voordoen, uit tot de op bladzijde 3 reeds vermelde knobbels.

Hoe heeft de epidermis de met deze verdikkingsprocessen gepaard gaande oppervlaktevergrooting kunnen volgen?

Bij een normalen bladtop vinden we voor de afmetingen der epidermiscellen 9 à 18 $\mu$ hoog en 9 à 29 $\mu$ breed, terwijl in de over een speciale verdikking gespannen epidermis te midden van cellen, wier afmetingen geen afwijking vertoonden, er andere werden aangetroffen, waarvoor gemeten werd:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Hoogte** $\mu$ : | 9 | 11 | 13 | 13 | 13 | 9 | 11 | 11 | 9 | 9 |
| **Breedte** $\mu$ : | 31 | 36 | 45.5 | 36 | 49 | 45.5 | 45.5 | 42 | 54.6 | 45.5 |

8

Werkelijk schijnen dus enkele epidermiscellen zich te verbreeden; of dit alleen uitrekking is dan wel actieve groei, durf ik niet beslissen.

Trouwens weldra geeft de epidermis 't op en scheurt. Evenals het voor den druk uitwijkend deel der epidermis, sterven eenige cellen van het daaronder gelegen weefsel onder verbruining der celwanden af. Zoodoende ontstaan de bruine streepjes op het oppervlak der knobbels, dat ten slotte door uitbreiding in tangentiale richting van dit verkurkingsproces geheel bruin wordt. Een speciaal kurkvormend meristeem, een phellogeen, wordt niet gevormd.

Het regelmatige in den bouw dezer celheuvels gaat verloren, zoodra daarin de differentiatie van een meristeem wordt voorbereid. Eenige in een groepje bij elkaar liggende cellen komen dan in een nieuw stadium van sterken groei, wat ze in de praeparaten door een meer afgeronden vorm te midden der aangrenzende, cubische cellen doet opvallen. Een aantal der omgevende cellen wordt door de spanning, welke deze primordiaalcellen door hun uitzetting veroorzaken, plat gedrukt en gaat te gronde.

Weldra deelen zich de primordiaalcellen in een aantal dochtercelletjes met uiterst dunne wanden en dichten inhoud, waarna 't primordium tot meristeem geworden is.

Tot beantwoording van de vragen, op welke plaats in een knobbel het meristeem ontstaat en welke de afkomst der initiaalcellen is, staan ons de volgende gegevens ten dienste. Een overigens 415 à 450 $\mu$ dikke bladtop had door locale aanzwelling tot circa 840 $\mu$ een knobbel gevormd, die door een kleine inzinking in 't midden, als 't ware, in 2 helften gedeeld was, elk waarvan een meristeemprimordium bevatte. Het oppervlak van den knobbel was geheel tot op vrij groote diepte verkurkt. In de eene helft lag 't primordium 220 $\mu$ beneden den top van den knobbel en waren zijne cellen naar alle waarschijnlijkheid afstammelingen van de subpalissadaire cellen; in de andere helft was 't primordium 180 $\mu$ beneden 't oppervlak gelegen en van dezelfde afkomst als in 't eerste geval.

Terwijl in een ander geval een primordium werd waargenomen, dat genetisch tot 't oorsponkelijke sponsparenchym behoorde, trof ik in een knobbeltje, dat nog door de intacte epidermis bedekt was, zich niet meer dan 85 $\mu$ boven z'n omgeving verhief, en dat in dit geval door speciale woekering van 't palissadeparenchym gevormd was, een duidelijk jong meristeem onmiddellijk onder de epidermis aan. *De epidermiscellen zelf echter namen aan de vorming van het meristeem geen deel.*

Kortom meristeemvorming kan plaats hebben zoowel door cellen, die afstammen van het sponsparenchym en de subpalissadaire cellen

als door zoodanige, die door hyperplasie van 't palissadeparenchym ontstaan zijn; de epidermis evenwel is van alle deelname uitgesloten.

M. a. w. *de adventieve knoppen aan de bladeren van Gnetum Gnemon ontstaan endogeen.*

Het jonge meristeem neemt in omvang toe, in den beginne behalve door eigen actieven groei ook, doordat weer nieuwe cellen uit de onmiddellijke omgeving meristematisch worden.

Wanneer het meristeem zekere afmetingen gekregen heeft, maakt het zich gedeeltelijk los van het omgevende weefsel. Dit komt tot stand, doordat enkele van de cellen, die den overgang vormen tusschen het meristeem en het omgevende weefsel opgelost en geresorbeerd worden. Dit oplossingsproces schrijdt langs den geheelen bovenkant van het meristeem voort, waardoor het groeipunt van den adventieven knop in een spleetvormige ruimte komt te liggen.

Hoe grooter de diepte is, waarop het meristeem zich oorspronkelijk binnen den knobbel gevormd heeft, zooveel te dikker is de weefsellaag, die ten slotte den knop van de buitenwereld scheidt en zooveel te verder gaat de ontwikkeling van den knop binnen de omhulling. Dit verklaart, hoe het komt, dat knobbels, die niet grooter zijn dan 1 mM. zich openen, terwijl veel grootere maar steeds gesloten blijven.

Het optreden van 2 meristemen binnen denzelfden knobbel is een zeer gewoon verschijnsel; eens zelfs heb ik in een knobbel 4 verschillende meristemen aangetroffen.

De knoppen nemen een groene kleur aan, terwijl ze nog geheel binnen den knobbel opgesloten zitten en moeten dus, evenals de kiemplanten van *Ephedra* en de *Coniferen* het vermogen hebben, onafhankelijk van het licht chlorophyl te vormen.

De uit de adventieve knoppen ontstaande spruiten blijven steeds kort en teer. De grootste, welke ik heb waargenomen, bereikten een hoogte van ongeveer 3.5 cM. en bestonden uit een stengel met 5 internodiën (het basaalstuk meegerekend), waarvan het bovenste 't langst werd (bijna 2 cM.), terwijl de blaadjes aan den laatsten knoop 't grootst werden (± 3 cM. lang). De bladstand is alterneerend; de nervatuur der blaadjes de voor *Gnetum Gnemon* typische [1]. De blaadjes aan den eersten knoop blijven gewoonlijk schubvormig; in enkele gevallen echter ontwikkelen ze zich tot in steel en schijf gedifferentieerde blaadjes.

Ofschoon in de oksels der blaadjes okselknoppen wel degelijk

[1] D. w. z. n°. 3 van de door KARSTEN voor de species van Gnetum onderscheiden bladnervaturen. [G. KARSTEN, Untersuchungen über die Gattung Gnetum. I. (Ann. du Jardin Bot. de Buitenzorg Volume XI. 1893. pag. 195—218)].

worden aangelegd, heb ik de adventieve spruiten zich nooit zien vertakken, uitgezonderd in één enkel geval, toen, zooals ik vermoed, van het basaalstuk van een adventieve spruit de eindknop om een of andere reden niet tot ontwikkeling kwam en in plaats daarvan de knoppen in de oksels der schubjes uitliepen.

Over eene differentiatie van histiogenen aan 't vegetatiepunt heb ik mij door mijne praeparaten van adventieve spruiten geen oordeel kunnen vormen.

De talrijke pogingen, die ik in 't werk heb gesteld, om de adventieve spruiten zich te laten bewortelen, hebben alle gefaald. In verband hiermee heb ik in mijne praeparaten dan ook nooit iets, wat op wortelvorming wees, kunnen ontdekken. De spruitendragende bladeren, die gestekt werden, vormden zelf evenmin wortels. Trouwens, voor zoover mij bekend is, komt bij *Gnetum Gnemon* vorming van adventieve wortels in 't geheel niet voor.

Voor het tot stand komen van eene verbinding tusschen het vaatstelsel van een adventieve spruit en het nervensysteem van het moederblad wordt gezorgd door procambiale bundels, die gevormd worden door cellen van het tusschen 't meristeem en een bladbundel gelegen weefsel.

Gewoonlijk vindt men, als eerste aanduiding van deze vaatbundelverbinding, in de onmiddellijke nabijheid van zelfs nog zeer jonge meristemen eenige tracheïden en cellen, die bezig zijn daarin overtegaan. De graad van ontwikkeling, welke deze vaatbundelverbinding op zeker oogenblik bereikt heeft, is niet direct afhankelijk van den ontwikkelingstoestand van den betrokken adventieven knop, doch schijnt mij toe, in nauw verband te staan met den afstand tusschen meristeem en bladbundel en den diameter van den laatste. Wanneer een volkomen verbinding tot stand is gekomen, ziet men de vaatbundels van de adventieve spruit binnen den knobbel, waarin de knop ontstaan is, zich naar elkaar toebuigen en zich vereenigen met een min of meer cylindervormige groep van ter plaatse ontstane vaten en tracheïden, waarvan de vertakkingen in verband staan met de vaatbundels van het moederblad.

Bij de beschrijving van de veranderingen, die macroscopisch waarneembaar zijn aan een blad, dat tot de vorming van adventieve knoppen overgaat, is reeds terloops gezegd, dat de gele blaasjes, welke het proces der knopvorming inleiden, veroorzaakt worden door eene schildluis, *Aspidiotus* spec..

Dat de verdenking op deze *Aspidiotus* viel, had een zeer eenvoudige oorzaak.

Hoewel lang niet alle bladeren, die gele blaasjes vertoonden, nog schildluizen droegen, was 't omgekeerde gewoonlijk wel waar en viel 't al spoedig op, dat aan de bladeren, welke met schildluizen bezet waren, meestal ook eenige gele blaasjes konden worden aangetroffen.

De pogingen evenwel, door middel van microtoompraeparaten zekerheid te krijgen en beter inzicht in 't geen door deze macroscopische waarneming reeds zoo waarschijnlijk werd gemaakt, leverden onverwachte moeilijkheden op. Een zeer groot bezwaar was al dadelijk, dat 't meerendeel der schildluizen niet op de stukjes blad, waarvan de microtoompraeparaten gemaakt zouden worden, wilden blijven zitten. Terwijl een groot deel reeds losliet gedurende de behandeling, welke aan 't eigenlijke insmelten voorafgaat, werd dit voorbeeld nog door de meeste andere gevolgd, wanneer de bladfragmenten in de gesmolten paraffine werden overgebracht. Het lag voor de hand de oorzaak van het loslaten der schildluizen daarin te zoeken, dat zij bij 't in aanraking komen met de fixeervloeistof, hun zuigorgaan misschien tengevolge eener praemortale reactiebeweging uit het bladweefsel terugtrokken. Daarom werden na deze ongunstige ervaringen de schildluizen dragende bladeren vóór de fixatie steeds met een anaestheticum en wel aether behandeld. Doch ook deze voorzorgsmaatregel deed geen aanmerkelijk gunstiger resultaat verkrijgen.

Onder de microtoompraeparaten, die ik niettegenstaande deze tegenspoeden nog gekregen heb, is er geen enkel, waarin een schildluis in zuigenden toestand te zien is. Steeds evenwel werden op die plaatsen waar zich een schildluis op 't blad bevond, in 't weefsel dezelfde veranderingen geconstateerd, die we als karakteristiek voor de gele blazen beschreven hebben.

Ook hier hypertrophie, gepaard met desorganisatie van 't chlorophyl, van cellen tot 't mesophyl behoorende; enkele dezer cellen hebben verbruinde wanden. Ook in de epidermis, waarop de schildluis zich bevindt, worden enkele cellen aangetroffen, wier wanden verkurkt zijn en welke bovendien soms in lichte mate gezwollen zijn.

Gelukkiger ben ik geweest met uit de hand vervaardigde praeparaten, waarvan er enkele 't zuigapparaat van de schildluis binnen het bladweefsel te zien geven. Hieruit is te zien, dat in de gele blaasjes die cellen, wier wand verkurkt is, in onmiddellijk contact zijn geweest met het zuigapparaat van de schildluis en dat de overige zich hypertropheerende cellen slechts reageeren op een door de verwonde cellen uitgeoefenden prikkel. Over den aard dezer prikkelwerking komen we straks nog nader te spreken.

Dat hier, zooals voor vele van dergelijke hypertrophische processen wordt aangegeven, de vergrooting der cel zou plaats hebben ten koste van haar eigen inhoud, is niet de indruk, dien ik gekregen heb. Wel kan in vele der zeer sterk gehypertropheerde cellen een groote centrale vacuole worden waargenomen, doch reductie van het protoplasma tot een uiterst dunne wandbekleeding zag ik nergens. De kern vertoont niets afwijkends en de celwand ondergaat geen merkbare verdunning.

Dat inderdaad nu de steek der schildluis niet alleen de oorzaak is van de vorming der gele blaasjes, maar als 't ware door bemiddeling van deze ook van alle verdere veranderingen tot en met de vorming der adventieve knoppen, is mij duidelijk geworden door:

1. Het microscopisch onderzoek van een zeer groot aantal op deze stadiën betrekking hebbende praeparaten;

2 de voortdurende waarneming van een aantal bladeren aan den boom, waarbij die, welke schildluizen of de door deze veroorzaakte gele blaasjes vertoonden, de verdere door ons beschreven veranderingen ondergingen, terwijl de contrôlebladeren daarvan vrij bleven. Den 13[den] September 1906 werden de top van de plant, die in de sterkste mate adventieve knoppen vormt, en een harer takken, na eerst zorgvuldig nagekeken en schoongemaakt te zijn, elk omgeven met een ballon van neteldoek. Deze ballons werden gesteund door een geraamte van gegalvaniseerd ijzerdraad en van onderen gesloten door ze dicht te trekken op een om de spruit gewikkelde watten prop. Aan den top van de plant bevonden zich toen nog uitsluitend jonge, aan den tak volwassen bladeren, alle vrij van schildluizen of blaasjes. De ballon, die den top der plant omgaf, moest naarmate deze zich verder ontwikkelde, herhaaldelijk door een grooteren vervangen worden.

Den 22[sten] Januari 1907 werd de ballon van den tak afgenomen en de bladeren onderzocht. Van twee dezer bladeren was 't uiterste deel van den top vergeeld. Microscopisch onderzoek van deze bladtoppen evenwel leerde, dat we hier niet met een beginstadium van de knopvorming te doen hadden. Gehypertropheerde cellen, zooals we die in dat geval in 't mesophyl hadden moeten vinden, waren niet aanwezig. De gele kleur werd veroorzaakt door 't afsterven van het weefsel, waarbij de inhoud der cellen verkleurde.

Den 10[den] Mei 1907 werd de top der plant in vrijheid gesteld. Een aantal volwassen bladeren, welke bij 't begin der proef nog jong waren en jonge bladeren aan zijspruiten, die gedurende de afzondering door 't uitloopen van okselknoppen ontstaan waren, kwamen nu aan den dag. Al deze bladeren waren volkomen normaal, krachtig en

gezond met normaal groene kleur; bij geen hunner was iets te zien van gele blaasjes of vlekken, van geen enkel vertoonde de top eenige verkleuring of verdikking. De afsluiting door middel van den ballon van neteldoek had deze bladeren volstrekt niet in hun normale ontwikkeling gehinderd. Alleen waren daardoor schildluizen en andere dieren verhinderd geworden zich op de bladeren te vestigen met het meegedeelde resultaat.

Dergelijke gezwellen als de gele, verdikte bladtoppen van *Gnetum Gnemon* eigenlijk zijn, heeft men ook bij andere planten herhaaldelijk waargenomen en onder den naam van geelvlekkigheid (Gelbfleckigkeit), oedemata of intumescenties beschreven. Het woord „Intumescentia" is in de phytopathologische nomenclatuur ingevoerd door SORAUER [1]) met de definitie: „Intumescentia" sind „diejenigen Erscheinungen, die das gemeinsame Merkmal haben, als kleine knötchenförmige oder drüsige Auftreibungen der Blätter aufzutreten, die meist an diesen Stellen gelb verfärbt erscheinen und eine aussergewöhnliche Zellstreckung ohne wesentliche Zellvermehrung zeigen". Dat de verdikte bladtoppen van *Gnetum Gnemon* nu niet bepaald „kleine Auftreibungen" zijn en wel degelijk „wesentliche Zellvermehrung" vertoonen, behoeft ons niet te verhinderen, ze tot de intumescenties te rekenen, daar zoowel zeer groote [2]) of onderling versmeltende [3]) als typisch hyperplastische [4]) intumescenties voor verschillende andere planten beschreven zijn.

Op de zeer uiteenloopende opvattingen, die de verschillende onderzoekers met betrekking tot de oorzaak der intumescentievorming er op na houden, kunnen we thans niet ingaan; alleen zij vermeld, dat in de meeste gevallen wel geconstateerd is, dat hooge temperatuur en groote vochtigheid van de lucht onmisbare factoren zijn.

Van welken aard de prikkel is, dien de schildluis op het weefsel van het Gnetumblad uitoefent, en als reactie waarop de intumescentievorming plaats heeft, daarvan heb ik mij langs experimenteelen weg eene voorstelling kunnen maken. — Nadat ik getracht had,

---

[1]) P. SORAUER, Die symptomatische Bedeutung der Intumescenzen (Bot. Zeitg. 48 Jahrg. 1890. pag. 241).

[2]) H. v. SCHRENK, Intumescences formed as a result of chemical stimulation. (Missouri botan. garden. 16th ann. report. 1905. pag. 125).

[3]) Miss G. E. DOUGLAS. The formation of intumescences in potatoplants. (Bot. Gazette Vol XLIII. 1907. pag. 233.)

[4]) E. KÜSTER, Über experimentell erzeugte Intumescenzen. (Ber. deutsch. bot. Ges. Bd. XXI. 1903. pag. 452). P. SORAUER, Ueber Gelbfleckigkeit. (Forsch. a. d. Geb. d. Agrik. Phys. h. v. Dr. E. WOLLNY. Bd. IX. 1886. pag. 387). en Intumescenz bei Solanum floribundum. (Zeitschr. f. Pflanzenkrankh. Bd. VII. 1897. pag. 122).

door op allerlei manieren gevarieerde mechanische verwonding en behandeling met vergiften bladeren kunstmatig tot intumescentievorming te brengen, zonder evenwel 't gewenschte resultaat te verkrijgen, kwam ik tot de conclusie, dat òf mijne manier van verwonden in vergelijking met die van de schildluis steeds te ruw was, òf door deze een of andere prikkelende substantie in 't blad gebracht moest worden. — Om dit na te gaan, werd op de volgende manier geexperimenteerd: 1). In bladtoppen werden uiterst kleine wondjes aangebracht met de gesteriliseerde zeer fijne canule van een injectiespuitje.... 2). Hetzelfde werd gedaan, nadat de punt der canule eerst gestoken was in gele blaasjes, die door de schildluis veroorzaakt waren.... 3). Een aantal gele en verdikte bladtoppen werd fijngemaakt in een mortier en .... 3*a*). een uiterst kleine hoeveelheid van de aldus verkregen brei, aangemengd met wat verdunde glycerine in bladtoppen op meerdere plaatsen geïnjiceerd, terwijl.... 3*b*) op andere bladeren dezelfde bewerking werd toegepast, nadat de te injiceeren brei eerst op 100° verhit was.

Het resultaat was in *alle* gevallen volkomen hetzelfde.

Na een dag of 10 waren op de plaatsen, waar de wondjes waren aangebracht, kleine, bruine vlekjes zichtbaar, welke na dien tijd nog iets in omvang konden toenemen. Een maand na 't aanbrengen der wondjes hadden zich de bruine vlekjes met een zeer smal, min of meer doorschijnend geel randje omgeven. — De bruine vlekjes werden gevormd door de cellen, welke als gevolg van de verwonding gestorven waren onder verbruining harer wanden. Op de plaats van 't gele randje werd een complex gevonden van betrekkelijk kleine cellen, die geen intercellulaire holten overlieten. Deze cellen hadden dikke wanden en hun protoplast bevatte nog resten van de chlorophylkorrels. Het complex was gevormd door hyperplasie van het geheele mesophyl. Op den overgang van dit complex tot het normale weefsel hadden zich enkele cellen van 't sponsparenchym sterk vergroot, terwijl hare chloroplasten gedesorganiseerd waren. — Na verloop van weer een maand werd opgemerkt, dat de bladtoppen in de omgeving der wondplekjes een eenigszins gele kleur aannamen, iets wat langzamerhand steeds duidelijker waarneembaar werd. Microscopisch liet zich constateeren, dat, waar uitwendig die gele verkleuring zichtbaar was, rondom de wondplekjes het weefsel precies dezelfde veranderingen ondergaan had als plaats hebben rondom de door schildluizen veroorzaakte gele blaasjes: algemeene hypertrophie van de cellen van 't sponsparenchym, terwijl hier en daar zelfs al een deelwand in de vergroote cellen was opgetreden.

Zooals reeds gezegd is, dit resultaat was verkregen in alle ge-

vallen, dus ook in die, waar kleine wondjes zonder meer waren aangebracht. Waaruit geconcludeerd kan worden, dat het blad van *Gnetum Gnemon* tot de vorming van intumescenties en dus van adventieve knoppen geprikkeld kan worden door verwonding, mits deze zeer gering is, en het proces dus te beschouwen is als reactie op een *wondprikkel*.

Bij een ziekte van de anjelieren, welke ook een soort van intumescentievorming [1]) is en waarvoor door Woods [2]) is aangetoond, dat zij veroorzaakt wordt door den steek o.a. van aphiden, meent Woods het grooter worden der gele, verdikte plekken te moeten toeschrijven aan de diffusie van een „irritant injected by the insect" [3]).

Dat een dergelijke hypothese voor de „stigmonose" van *Gnetum Gnemon* overbodig is, blijkt duidelijk genoeg uit 't resultaat van onze proef. Het specifieke van de door 't zuigapparaat van de schildluis teweeggebrachte wonde is alleen, dat zij zoo onbeduidend is. Slechts enkele cellen, namelijk die, welke zich in de gele blaasjes door verbruinde wanden onderscheiden, hebben er de directe gevolgen van ondervonden, terwijl de heele verdere intumescentievorming plaats heeft als reactie op de prikkelwerking uitgaande van die enkele verwonde cellen.

Küster [4]) noemt alle na verwonding ontstaande kataplasmen, voor zoover ze een parenchymatisch karakter hebben, callus. Volgens deze terminologie is ook het weefsel, waaruit de verdikte bladtoppen van *Gnetum Gnemon* bestaan een „callus" en zijn de knoppen, die er in gevormd worden „callusknoppen". [5])

Waarom de beide planten uit de ijzeren kas daar geen callus en geen knoppen aan de bladeren vormden, wordt nu tevens duidelijk. De *Aspidiotus*, welke bij deze callusvorming zoo'n voorname rol speelt, wordt in de ijzeren kas ook aangetroffen; voor callusvorming evenwel is een voorwaarde van den eersten rang vochtigheid; aan deze voorwaarde werd in de ijzeren kas slechts matig, in de houten daarentegen bij uitstek voldaan, terwijl ook de hoogere temperatuur in de laatste bij deze tropische planten de callusvorming begunstigen moest.

Waarom hier alleen het apicale gedeelte van een blad tot callus-

---

1) H. v. Schrenk l. c. pag. 39.

2) A. F. Woods, Stigmonose: a disease of carnations and other pinks. (Bull. no. 19. U. S. Dept. Agr. Div. Veg. Phys. and Path. 1900).

3) l. c. pag. 24.

4) E. Küster, Pathologische Pflanzenanatomie. Jena. 1903. pag. 154.

5) Zie ook: E. Küster, Histologische und experimentelle Untersuchungen über Intumescenzen. (Flora oder allgem. bot. Zeitg. 96 Bd. 1906, pag. 527—537).

en knopvorming in staat is, laat zich op de volgende manier verklaren. De kleine verwonding veroorzaakt een toestroomen van voedende bestanddeelen in apicale richting. Wil nu een ophooping dezer stoffen, welke voor de hyperplastische callusvorming noodzakelijk is, mogelijk zijn, dan moet de stroom niet voorbij kunnen gaan, d. w. z. hij moet apicaal van de wond gestuit worden. En aan deze voorwaarde wordt normaliter alleen voldaan in den top van 't blad, in een ander deel van de bladschijf alleen dan, als 't organisch verband met den top verbroken is.

*Utrecht, Botanisch Laboratorium.*

**Physiologie.** — De Heer EINTHOVEN biedt een mededeeling aan over *„een derden hartstoon"*, naar onderzoekingen gemeenschappelijk verricht met de Heeren J. H. WIERINGA en E. P. SNIJDERS, assistenten aan het physiologisch laboratorium te Leiden.

Bij de voortzetting van het onderzoek der hartstonen met behulp van den snaargalvanometer [1]) merkten wij op, dat bij sommige cardiophonogrammen, met name bij de in Februari ll. opgenomen punttonen van W i, kort na de trillingen van den 2den toon nog een nieuwe trilling aanwezig was, die op geen andere wijze dan als een derde hartstoon kon worden opgevat.

De verklaring voor het ontstaan van dezen derden toon lag niet aanstonds voor de hand, en hoe merkwaardig ons het verschijnsel op zich zelf ook toescheen, stelden wij toch een verder onderzoek tot later uit, daar onze tijd vooreerst door andere werkzaamheden in beslag was genomen.

Een paar maanden daarna werd mij door Dr. A. G. GIBSON te Oxford, — die wel kennis had genomen van onze vroegere publicaties over het registreeren der hartstonen, maar die niets weten kon van de later door ons gedane waarnemingen, — gevraagd, of in mijn verzameling van cardiophonogrammen van normale personen zich ook eenige bevonden, waarin nog een extra toon zichtbaar was in de phase der diastole. GIBSON was bezig met het onderzoek van den venapols [2]) en had opgemerkt, dat bij sommige personen, zonder ziekelijke afwijking van het hart, aan den apex tijdens de hartspauze

[1]) Zie: Het registreeren van menschelijke hartstonen met den snaargalvanometer. Nederl. Tijdschr. v. Geneesk. 1906, II, p. 818.

[2]) Het onderzoek van GIBSON wordt eerstdaags in „The Lancet" gepubliceerd onder den titel: „The significance of a hitherto undescribed wave in the jugular pulse."

een lage toon kon worden gehoord, dien hij beschrijft als een nakomenden diastolischen toon, maar zwakker en van veel lager toonshoogte. Het geluid is helder en doet niet aan een geruisch denken. Deze bijzondere toon wisselt in intensiteit, terwijl hij vooral duidelijk schijnt te zijn tijdens het interval tusschen het eind eener exspiratie en het begin der daaropvolgende inspiratie.

In een uitvoeriger opstel hopen wij elders de door ons verkregen cardiophonogrammen te publiceeren, terwijl wij ze hier slechts met een kort woord zullen bespreken. Wanneer wij uit den vorm en de afmetingen der krommen trachten af te leiden, welken indruk de 3de hartstoon op het waarnemende oor moet maken, kunnen wij hem niet anders beschrijven dan GIBSON deed: een in intensiteit wisselenden, maar toch steeds zwakken, nakomenden diastolischen toon van lage toonshoogte en helderen klank.

Het kan aan geen twijfel onderhevig zijn, of de toon, dien GIBSON te Oxford heeft gehoord, is dezelfde als die, welken wij te Leiden hebben geregistreerd.

De metingen, bij eenige cardiophonogrammen verricht, doen zien, dat bij W i het begin van den derden toon gemiddeld 0,13 sec. (wisselend tusschen 0,11 en 0,15 sec.) na het begin van den 2den toon, en gemiddeld 0,32 sec. vóór het begin van den eerstvolgenden 1sten toon valt. In dezelfde krommen is de duur van den 1sten toon ongeveer 0,08 sec., van den 2den toon ongeveer 0,05, van den 3den toon 0,02 tot 0,03 sec. De beide eerste tonen zijn geruischen, bestaande uit een samenstel van tonen van onregelmatige toonshoogte. De onderlinge afstand van sommige toppen in de krommen bewijst, dat hierbij tonen voorkomen van meer dan 100 geheele trillingen per sec. terwijl de derde toon slechts uit een enkele trilling schijnt te worden opgebouwd, welker periode ongeveer 0,02 sec. bedraagt.

De intensiteit van den derden toon is wisselend. Terwijl hij in sommige hartslagen geheel ontbreekt, bereikt in andere hartslagen de amplitude zijner trillingen $\frac{1}{7}$ van die van den eersten en tweeden toon. Stelt men de verhouding der amplituden van den eersten of den tweeden toon tot die van den derden op $a = 7$, en de verhouding der trillingsfrequenties op $b = 2$, dan is de verhouding der intensiteiten gelijk aan $a^2b^2 = 196$. De derde toon is dus, als zijn intensiteit een maximun bereikt, nog ongeveer 200-maal zwakker dan de eerste of tweede.

Terwijl de bovengenoemde verhoudingsgetallen betrekking hebben op de objectieve intensiteiten, valt een vergelijking van de intensiteiten der gewaarwording voor den 3den toon nog zeer veel ongun-

stiger uit, daar een toon van 50 trillingen per sec. objectief ruim 100-maal sterker [1]) moet zijn dan een toon van 100 trillingen per sec., om een even sterken geluidsindruk teweeg te brengen. Bereikt dus de derde toon een zoodanige intensiteit, dat hij nog juist even hoorbaar is, dan mogen de 1ste en 2de tonen 20 000-maal worden verzwakt, voordat ook de door hen veroorzaakte geluidsindrukken worden uitgewischt.

Dit verklaart de moeilijkheid van het auscultatorisch onderzoek. GIBSON [2]) wijst hier met nadruk op en zegt, dat men, om den toon te hooren, bijkomstige geluiden zooveel als slechts doenlijk is moet buitensluiten, terwijl men zijn aandacht bijzonder spannen moet tijdens het interval, waarin de toon tot stand komt. Terwijl de cardiophonogrammen geen twijfel overlaten aan het bestaan van den 3den hartstoon bij W i, zijn wij er toch niet in geslaagd, dien met behulp van den stethoscoop te hooren.

Voor de verklaring van het ontstaan van den 3den toon verwijzen wij naar het boven reeds vermelde uitvoeriger opstel, dat eerstdaags elders verschijnen zal. Hier zij alleen als de conclusie vermeld, dat het geluid niet met een praesystolisch mitralisgeruisch noch met een verdubbeling van den tweeden toon door ongelijktijdige werking van aorta- en pulmonaliskleppen kan worden gelijk gesteld, maar dat het waarschijnlijk door een tweede trilling der vavulae semilunares aortae wordt veroorzaakt en als een vrij algemeen voorkomend verschijnsel moet worden opgevat.

**Sterrekunde.** — De Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt eene mededeeling aan van den Heer W. DE SITTER: *„Over enkele punten uit de theorie der Jupitersatellieten.”*

(Mede aangeboden door den Heer J. C. KAPTEYN).

In het volgende worden enkele onderzoekingen in het kort medegedeeld, die spoedig, met meer andere, het licht zullen zien in N°. 17 van de publicaties van het Groningsche sterrenkundig laboratorium.

Er heerscht in de theorie der Jupitersatellieten een betreurenswaardige verwarring der notaties. De tafels, zoowel die van DAMOISEAU

[1]) Berekend naar MAX WIEN, PFLÜGER's Arch. f. d. gesammte Physiol., Bd. 97, S. 1. 1903. H. ZWAARDEMAKER en F. H. QUIX geven in ENGELMANN's Arch. f. Physiol. S. 25. 1904 verschillen aan, die een zelfden zin, maar een andere orde van grootte hebben.

[2]) T. a. p.

als van DELAMBRE, duiden de vier satellieten aan door 1, 2, 3, 4. Dit voorbeeld wordt gevolgd door MARTH, en ook ik heb in al mijn werk deze notatie gebruikt, evenals de Heer COOKSON in de discussie zijner aan de Kaapsche sterrenwacht gedane waarnemingen. De theoretici daarentegen, LAPLACE, SOUILLART, TISSERAND, gebruiken de suffixen 0, 1, 2, 3 of een overeenkomstig aantal accenten. Een ander fundamenteel onderscheid is gelegen in de benaming der perijovia. De letter $\tilde{\omega}$ beteekent bij DAMOISEAU, MARTH, COOKSON en mij het „eigen" perijovium, bij SOUILLART en TISSERAND het osculeerende perijovium. Zoo zijn er nog vele andere verschillen, die hier niet opgenoemd behoeven te worden. Hoewel doordrongen van het belang van een consequent doorgevoerde notatie, ben ik tot mijn spijt gedwongen in deze mededeeling gedeeltelijk af te wijken van de elders door mij gebruikte notaties. In de eerste afdeeling n.l. van deze mededeeling, die een zuiver theoretisch punt behandelt, zal ik mij, om het neerschrijven van vele bekende zaken te vermijden, geheel aansluiten aan TISSERAND's zeer duidelijke uiteenzetting in het vierde deel van zijn *Traité de mécanique céleste,* en zal dus *in deze eerste afdeeling* TISSERAND's notatie, behoudens eene kleine uitzondering, geheel overnemen.

1. *Theorie der libratie.* De gebruikte notaties zijn, zooals gezegd, geheel die van TISSERAND, met uitzondering van de middelbare lengtes, die ik door $l_1, l_2, l_3$ voorstel in plaats van door $l, l', l''$ zooals TISSERAND doet. Behalve de grootheden $F, F', G, G'$, gedefinieerd door (19) bladz. 11 [1]), wensch ik nog in te voeren de geheel daaraan analoge grootheden

$$G_1 = \frac{4a}{a'} - 3a' A^{(1)} - a a' \frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}$$

$$G_1' = \frac{4a'}{a''} - 3a'' A'^{(1)} - a'a'' \frac{\partial A'^{(1)}}{\partial a'}.$$

TISSERAND neemt $G_1 = G$ en $G_1' = G'$, wat slechts bij benadering juist is. Wenscht men deze benadering niet in te voeren, dan moet op blz. 11 in formule (20) in $R_1$ $G$ door $G_1$ en in $R_1'$ $G'$ door $G_1'$ vervangen worden.

De eenige andere afwijking van TISSERAND's notatie, die ik mij wil veroorloven, is dat ik de libratie definieer als

$$\vartheta = l_1 - 3l_2 + 2l_3 + 180°, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [1]$$

---

[1]) De aangehaalde bladzijden en formules zijn die van TISSERAND.

terwijl TISSERAND stelt

$$\vartheta = l - 3l' + 2l''$$

De hoek $\vartheta$, door [1] gedefinieerd, is die waaraan LAPLACE den naam *libratie* heeft gegeven, en die door hem $\bar{\omega}$ is genoemd. (*Mécanique céleste,* Livre VIII, § 15; *Oeuvres* bladz. 75 en 79 van deel IV der uitgave van 1845).

De differentiaalvergelijking, die $\vartheta$ bepaalt, is:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\beta^2 \sin \vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad [2]$$

Deze wordt verkregen door de combinatie der drie vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 l_1}{dt^2} &= -Q_1 \sin \vartheta \\ \frac{d^2 l_2}{dt^2} &= -Q_2 \sin \vartheta \\ \frac{d^2 l_3}{dt^2} &= -Q_3 \sin \vartheta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [3]$$

Zoodat men heeft

$$\beta^2 = Q_1 - 3Q_2 + 2Q_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad [4]$$

Uit deze vergelijkingen volgt dan verder de geheele theorie van de libratie, waarop ik hier niet verder wensch in te gaan. Mijn doel is alleen de grootheden $Q_1$ , $Q_2$ , $Q_3$ af te leiden. Hiervoor ga ik uit van de vergelijkingen, die TISSERAND geeft bovenaan blz. 20, die evenwel aangevuld moeten worden tot

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = -\frac{3}{a^2}\left(\frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial R_4}{\partial \varepsilon}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad [5]$$

en twee dergelijke vergelijkingen voor $\varrho'$ en $\varrho''$.

Dezelfde hulpgrootheden $u$ en $u'$ invoerende als TISSERAND (formule (12) blz. 20) krijgen wij dan in plaats van TISSERAND's vergelijkingen ($B$) de volgende:

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = \frac{3}{2}\, m'n^2 \left[ F\,(k \sin u - h \cos u) + \frac{a}{a'}\, G_1\, (k' \sin u - h' \cos u) \right]$$

$$- 3n \left[ a_{0,1} \left( \{k^2 - h^2\} \sin 2u - 2kh \cos 2u \right) \right.$$

$$+ \frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}}\, a_{1,0} \left( \{k'^2 - h'^2\} \sin 2u - 2h'k' \cos 2u \right)$$

$$\left. - 2b_{0,1} \left( \{kk' - hh'\} \sin 2u - \{kh' + hk'\} \cos 2u \right) \right].$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\varrho'}{dt^2} = & - 3mn'^2 \left[ G\,(k' \sin u - h' \cos u) + \frac{a'}{a}\, F\,(k \sin u - h \cos u) \right] \\
& + \frac{3}{2}\, m''n'^2 \left[ F'\,(k' \sin u' - h' \cos u') + \frac{a'}{a''}\, G'_1\, (k'' \sin u' - h'' \cos u') \right] \\
& + 6n' \left[ a_{1,0} \left( \{k'^2 - h'^2\} \sin 2u - 2k'h' \cos 2u \right) \right. \\
& \qquad + \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}\, a_{0,1} \left( \{k^2 - h^2\} \sin 2u - 2kh \cos 2u \right) \\
& \qquad \left. - 2b_{1,0} \left( \{kk' - hh'\} \sin 2u - \{kh' + hk'\} \cos 2u \right) \right] \\
& - 3n' \left[ a_{1,2} \left( \{k'^2 - h'^2\} \sin 2u' - 2k'h' \cos 2u' \right) \right. \\
& \qquad + \frac{m''\sqrt{a''}}{m'\sqrt{a'}}\, a_{2,1} \left( \{k''^2 - h''^2\} \sin 2u' - 2k''h'' \cos 2u' \right) \\
& \qquad \left. - 2b_{1,2} \left( \{k'k'' - h'h''\} \sin 2u' - \{k'h'' + h'k''\} \cos 2u' \right) \right].
\end{aligned}\right\} \quad [6]$$

$$\frac{d^2\varrho''}{dt^2} = - 2m'n''^2 \left[ G'\,(k'' \sin u' - h'' \cos u') + \frac{a''}{a'}\, F'\,(k' \sin u' - h' \cos u') \right]$$

$$+ 6n'' \left[ a_{2,1} \left( \{k''^2 - h''^2\} \sin 2u' - 2k''h'' \cos 2u' \right) \right.$$

$$+ \frac{m'\sqrt{a'}}{m''\sqrt{a''}}\, a_{1,2} \left( \{k'^2 - h'^2\} \sin 2u' - 2k'h' \cos 2u' \right)$$

$$\left. - 2b_{2,1} \left( \{k'k'' - h'h''\} \sin 2u' - \{k'h'' + h'k''\} \cos 2u' \right) \right].$$

Om hieruit de formules [3] af te leiden moeten voor $h, k, h' \ldots$ gesubstitueerd worden de waarden

$$\left.\begin{aligned} h &= B \sin u + B_1 \sin u' \\ k &= B \cos u + B_1 \cos u', \end{aligned}\right. \quad \text{enz.} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [7]$$

die TISSERAND geeft onderaan op blz. 21. In het resultaat moeten dan

alleen die termen behouden worden, die het argument

$$u' - u = \vartheta + 180^\circ,$$

of een veelvoud daarvan, vertoonen.

Men vindt dan gemakkelijk:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\varrho}{dt^2} = & \frac{3}{2} m'n^2 \left[ FB_1 + \frac{a}{a'} G_1 B'_1 \right] \sin(u-u') \\
& - 3n \left[ a_{0,1} B_1^2 + \frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} a_{1,0} B_1'^2 - 2b_{0,1} B_1 B_1' \right] \sin 2(u-u') \\
& - 6n \left[ a_{0,1} BB_1 + \frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} a_{1,0} B'B_1' - b_{0,1} (BB_1' + B_1 B') \right] \sin(u-u') \\
\frac{d^2\varrho'}{dt^2} = & - 3mn'^2 \left[ GB_1' + \frac{a'}{a} FB_1 \right] \sin(u-u') \\
& + \frac{3}{2} m''n'^2 \left[ F'B' + \frac{a'}{a''} G_1' B'' \right] \sin(u'-u) \\
& + 6n' \left[ a_{1,0} B_1'^2 + \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} a_{0,1} B_1^2 - 2b_{1,0} B_1 B_1' \right] \sin 2(u-u') \\
& + 12n' \left[ a_{1,0} B'B_1' + \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} a_{0,1} BB_1 - b_{1,0} (BB_1' + B_1 B') \right] \\
& \qquad \sin(u-u') \\
& - 3n' \left[ a_{1,2} B'^2 + \frac{m''\sqrt{a''}}{m'\sqrt{a'}} a_{2,1} B''^2 - 2b_{1,2} B'B'' \right] \sin 2(u'-u) \\
& - 6n' \left[ a_{1,2} B'B_1' + \frac{m''\sqrt{a''}}{m'\sqrt{a'}} a_{2,1} B''B_1'' - b_{1,2} (B'B_1'' + B_1'B'') \right] \\
& \qquad \sin(u'-u) \\
\frac{d^2\varrho''}{dt^2} = & - 3m'n''^2 \left[ G'B'' + \frac{a''}{a'} F'B' \right] \sin(u'-u) \\
& + 6n'' \left[ a_{2,1} B''^2 + \frac{m'\sqrt{a'}}{m''\sqrt{a''}} a_{1,2} B'^2 - 2b_{2,1} B'B'' \right] \sin 2(u'-u) \\
& + 12n'' \left[ a_{2,1} B''B_1'' + \frac{m'\sqrt{a'}}{m''\sqrt{a''}} a_{1,2} B'B_1' - b_{2,1} (B'B_1'' + B_1'B'') \right] \\
& \qquad \sin(u'-u)
\end{aligned}\right\} \quad [8]$$

Stelt men nu

$$\sin(u-u') = \sin\vartheta$$

$$\sin 2(u-u') = -2\sin\vartheta,$$

en voert men tevens de benaderde waarden van $B, B' \ldots$ in, die TISSERAND geeft op het midden van blz. 22, nl.

$$B' = m\,CG \qquad B_1' = m''\,CF' \qquad B_1 = B'' = 0, \quad . \quad . \quad . \quad [9]$$

waar $C$ eene constante is, wier waarde hier onverschillig is, en overigens uit eene vergelijking met TISSERAND onmiddellijk blijkt; verwaarloost men verder de quadraten en producten van $B, B', \ldots$; stelt men $G_1 = G$ en verder

$$n^2 a^3 = n'^2 a'^3 = n''^2 a''^3 = f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [10]$$

wat ook slechts bij benadering juist is, en

$$-\frac{3}{2}\frac{f}{a'} CF'G = K,$$

dan krijgt men uit [8] de vergelijkingen (22) van TISSERAND, nl.

$$\frac{d^2 l_1}{dt^2} = -\frac{m'm''}{a^2} K \sin \vartheta$$

$$\frac{d^2 l_2}{dt^2} = 3\frac{m\,m''}{a'^2} K \sin \vartheta$$

$$\frac{d^2 l_3}{dt^2} = -2\frac{mm'}{a''^2} K \sin \vartheta,$$

waarbij opgemerkt moet worden dat onze $\vartheta$ 180° van die van TISSERAND verschilt. Men heeft dus, bij invoering van al de boven genoemde benaderingen:

$$Q_1 = \frac{m'm''}{a^2} K, \qquad Q_2 = -3\frac{m\,m''}{a'^2} K, \qquad Q_3 = 2\frac{mm'}{a''^2} K. \quad . \quad [11]$$

De waarden [9] zijn echter slechts benaderingen, daar zij alleen de storingen van de eerste orde in de massa's bevatten. Evenwel zijn de afwijkingen van de waarheid, die door het invoeren van deze benaderingen, evenals door [10] en door de gelijkstelling van $G$ en $G_1$ ontstaan, niet van ernstigen aard. Dit is wel het geval met de verwaarloozing van de termen van den tweeden graad in $B, B' \ldots$.

De volledige waarden van de grootheden $Q$ worden, als men nog steeds blijft aannemen $B_1 = B'' = 0$, wat voldoende nauwkeurig is:

$$\left.\begin{aligned}
Q_1 &= -\frac{3}{2} m'n^2 \frac{a}{a'} G_1 B_1' - 6n\left[\frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} a_{1,0}(B_1'^2 - B'B_1') + b_{0,1} BB_1'\right] \\
Q_2 &= +3\,mn'^2\,GB_1' + \frac{3}{2} m''n'^2 F'B' + \\
&\quad + 12n'\left[a_{1,0}(B_1'^2 - B'B_1') + b_{1,0} BB_1'\right] + \\
&\quad + 6n'\left[a_{1,2}(B'^2 - B'B_1') + b_{1,2} B'B_1''\right] \\
Q_3 &= -3m'n''^2 \frac{a''}{a'} F'B' - 12n''\left[\frac{m'\sqrt{a'}}{m''\sqrt{a''}} a_{1,2}(B'^2 - B'B_1') + b_{2,1} B'B_1''\right].
\end{aligned}\right\} [12]$$

Gebruikt men de numerieke gegevens van SOUILLART, en stelt men:

$$m_1 = 10000\, m, \qquad m_2 = 10000\, m', \qquad m_3 = 10000\, m''.$$

dan vindt men uit de formules [11]:

$$Q_1 = + 0.03201\, m_2\, m_3$$
$$Q_2 = - 0.03794\, m_1\, m_3$$
$$Q_3 = + 0.00994\, m_1\, m_2,$$

uit de formules [12] daarentegen:

$$Q_1 = \{+ 0\ 03009 - \cdot 00460\, m_1 - \cdot 01156\, m_2 - \cdot 00958\, m_3\}\, m_2\, m_3 =$$
$$= + 0\ 01815\, m_2\, m_3$$
$$Q_2 = \{- 0 \cdot 03436 + 0 \cdot 0389\, m_1 + 00933\, m_2 + \cdot 00809\, m_3\}\, m_1\, m_3 =$$
$$= - 0 \cdot 02438\, m_1\, m_3$$
$$Q_3 = \{+ 0 \cdot 00794 - \cdot 00020\, m_1 - \cdot 00016\, m_2 - 00042\, m_3\}\, m_1\, m_2 =$$
$$= + 0\ 00751\, m_1\, m_2.$$

De getallen-coëfficienten hangen bijna uitsluitend af van de verhoudingen der halve groote assen, d.i. van de middelbare bewegingen, en zijn wel als correct aan te nemen tot op het laatste meegenomen cijfer. De bijbehoorende perioden, die berekend worden uit de formule

$$T = \frac{2\pi}{\beta},$$

zijn, uitgedrukt in jaren,

uit formule [11] . . . . $T = 6 \cdot 318$

uit formule [12] . . . . $T = 7 \cdot 985$,

dus aanzienlijk verschillend.

Hoe komt het nu dat deze belangrijke correctie-termen over het hoofd gezien zijn door LAPLACE en SOUILLART? Wat den eersten betreft, is het antwoord zeer eenvoudig: hij heeft het geheele deel $R_4$ der storingsfunctie buiten beschouwing gelaten. Anders is het met SOUILLART. Het is juist een der groote verdiensten van SOUILLART de belangrijke rol die dit deel speelt, o. a. in de bepaling der grootheden $B, B' \ldots$ te hebben ingezien. De correcties, die SOUILLART uit dien hoofde aan deze coëfficienten aanbrengt, bedragen een aanzienlijk deel der coëfficienten zelve. SOUILLART heeft zich ook wel degelijk ten doel gesteld de uitdrukking voor de libratie volledig te verkrijgen. Op de bladzijden 46 en 47 van zijne verhandeling (*Memoirs of the Royal Astronomical Society*, Vol. XLV) gaat hij de verschillende deelen der storingsfunctie na, die in de differentiaal-quotienten der middelbare lengte het argument $l_1 - 3\, l_2 + 2\, l_3$ kunnen doen optreden. Hij verwerpt ze echter alle, behalve de door LAPLACE ook reeds beschouwde termen, als leidende tot te kleine coëfficienten: daaronder ook de hier beschouwde nieuwe termen, die hij verwerpt als zijnde van den tweeden graad in de excentriciteiten (blz. 47 onderaan). Hij ziet daarbij evenwel over het

hoofd dat, evenals in de termen van den eersten graad de excentriciteiten door hunne storingen met de argumenten $u$ en $u'$ moeten vervangen worden om de termen te leveren die de libratie voortbrengen, zoo ook in de termen van den tweeden graad hetzelfde moet geschieden. Deze worden dus van den tweeden graad in de coëfficienten $B, B' \ldots$, en het quadraat van *deze* is volstrekt niet te verwaarloozen, zooals ons gebleken is.

Men kan zich nu de vraag stellen: leveren ook de termen van de storingsfunctie van den derden graad in de excentriciteiten, d. i. die van den vorm

$$P e^3 \cos (2 l' - l - \tilde{\omega}), \qquad Q e^2 e' \cos (2 l' - l - 2 \tilde{\omega} + \tilde{\omega}'),$$
$$R e^3 \cos (6 l' - 3 l - 3 \tilde{\omega}), \qquad S e^3 \cos (4 l'' - l - 3 \tilde{\omega}),$$

en dergelijke, leveren ook deze termen niet nog merkbare bijdragen tot de grootheden $Q_i$, en dus tot de periode van de libratie?

Ik heb mij die vraag inderdaad gesteld, en ik heb de termen van den derden graad in $Q_1$, die dus van de vierde orde in de massa's zijn, werkelijk berekend. Deze zijn:

$$\delta Q_1 = \{+ \cdot 00012\, m_1^2 + \cdot 00079\, m_2^2 + 00034\, m_3^2 + \cdot 00061\, m_1 m_2 +$$
$$+ \cdot 00050\, m_1 m_3 + .00124\, m_1 m_3\}\, m_2 m_3 = + .00071\, m_2 m_3.$$

Deze termen zijn dus niet geheel te verwaarloozen. Ik heb evenwel de berekening, die tamelijk ingewikkeld is, voor $Q_2$ en $Q_3$ niet doorgevoerd, en evenmin de termen van den vierden graad (d. i. van de vijfde orde in de massa's) berekend. De ontwikkeling van de periode $T$ naar machten der massa's convergeert klaarblijkelijk uiterst langzaam, en de volgens [12] berekende periode kan nog zeer goed eenige tiendedeelen van een jaar foutief zijn.

2. *De middelpunts-vergelijkingen.* De groote ongelijkheden, die bij de integratie der bewegingsvergelijkingen naar de methode van de variatie der elementen optreden als storingen in de excentriciteiten en perijovia (formules [7]), worden in de praktijk bij de middelbare lengte en den voerstraal gevoegd, en onder excentriciteit en perijovium verstaat men dan de waarde van die elementen zonder hunne periodieke, doch met hunne seculaire storingen. Ik keer nu weder terug tot de ook elders door mij gebruikte notaties, en stel de zoo gedefinieerde excentriciteiten en perijovia voor door $E_i$ en $\Omega_i$. Men heeft dan [1])

$$\left.\begin{aligned} h_i &= 2\, E_i \sin \Omega_i = 2\, \Sigma_j\, \tau_{ij}\, e_j \sin \tilde{\omega}_j \\ k_i &= 2\, E_i \cos \Omega_i = 2\, \Sigma_j\, \tau_{ij}\, e_j \cos \tilde{\omega}_j \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots [13]$$

[1]) Deze $h_i$ en $k_i$ zijn dus *niet* dezelfde als de door TISSERAND met $h, k, h' \ldots\ldots$ aangeduide grootheden.

waar de sommen zich uitstrekken over de waarden van $j$ van 1 tot 4. De grootheden $e_i$ en $\tilde{\omega}_i$ zijn wat LAPLACE noemt de „eigen” excentriciteiten en perijovia der satellieten, de $e_i$ zijn constant en de $\tilde{\omega}_i$ zijn lineaire functies van den tijd.

Verder is $\tau_{ii} = 1$, terwijl de andere verhoudingsgetallen $\tau_{ij}$ evenals de bewegingen $\frac{d\tilde{\omega}_i}{dt}$ functies zijn van de massa's. Neemt men zekere waarden voor de massa's aan, dan zijn dus de coëfficienten $\tau_{ij}$ bekend. Zijn dan $h_i$ en $k_i$ van de vier satellieten door de waarnemingen gegeven, dan kan men uit de acht lineaire vergelijkingen [13] de acht onbekenden $e_i \sin \tilde{\omega}_i$ en $e_i \cos \tilde{\omega}_i$ bepalen, en hieruit weder $e_i$ en $\tilde{\omega}_i$, geheel op dezelfde wijze als dit door mij gedaan is in het overeenkomstige geval van de hellingen en knoopen (zie deze Verslagen, Maart 1906, blz. 787—799). Nu zijn de waarden van $h_i$ en $k_i$ bepaald uit de heliometer-waarnemingen verricht aan de Kaapsche sterrenwacht door GILL in 1891 en door COOKSON in 1901 en 1902. Op deze waarnemingen heb ik de boven geschetste methode toegepast, en wel onder twee geheel verschillende veronderstellingen omtrent de massa's, en dus omtrent de verhoudingen $\tau_{ij}$ en de bewegingen $\frac{d\tilde{\omega}_i}{dt}$. De resultaten zijn bijeengebracht in de volgende tabel. (p. 119). De waarden van $\tilde{\omega}_i$ voor 1900.0, die in de laatste kolommen vermeld staan, zijn voor elk der twee systemen uit die voor de afzonderlijke epoques afgeleid met behulp van de bewegingen $\frac{d\tilde{\omega}_i}{dt}$ behoorende bij de aangenomen massa's. De lengtes der perijovia zijn geteld van af het lente-nachteveningspunt van Jupiter, waarvan de aangenomen lengte in 1900.0, geteld van het punt Aries, is $O = 135°.45$.

De aan SOUILLART's theorie ten grondslag liggende waarden dezer elementen zijn :

| | (1900·0) |
|---|---|
| $e_1 = 0\overset{\circ}{·}001$ | $\tilde{\omega}_1 = 305^\circ$ |
| $e_2 = 0·006$ | $\tilde{\omega}_2 = 177$ |
| $e_3 = 0·064$ | $\tilde{\omega}_3 = 206·1$ |
| $e_4 = 0·4160$ | $\tilde{\omega}_4 = 152·69$ |

De resultaten van beide systemen zijn practisch geheel dezelfde. De correcties tot SOUILLART's waarden voor de satellieten II, III en IV zijn aanzienlijk, en, behoudens een enkele uitzondering, veel grooter dan de afwijkingen der drie epoques onderling. Deze correcties zijn dus ongetwijfeld reëel. Het merkwaardigst is wel de groote eigen

| Satelliet | Epoque | $e$ | | | $\tilde{\omega}$ | | | $\tilde{\omega}_{1900\cdot0}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Systeem I | Systeem II | *w.f.* | Systeem I | Systeem II | *w.f.* | Systeem I | Systeem II |
| I. | 1891·75 | 0°036 | 0°036 | ±°009 | 158° | 157° | ± 15° | 248° | 235° |
| | 1901·61 | ·055 | ·055 | ± 22 | 136 | 156 | ± 16 | 48 | 50 |
| | 1902·60 | ·022 | ·021 | ± 17 | 262 | 270 | ± 27 | 120 | 131 |
| II | 1891·75 | 0·018 | 0·020 | ±·006 | 169 | 166 | ± 16 | 300 | 274 |
| | 1901·61 | ·020 | ·019 | ± 14 | 318 | 315 | ± 37 | 292 | 294 |
| | 1902·60 | ·026 | ·026 | ± 9 | 302 | 301 | ± 24 | 261 | 267 |
| | Gemidd. | 0·021 | 0·022 | | | | | 284 | 278 |
| III | 1891·75 | 0·086 | 0·086 | ±·003 | 179·7 | 179·6 | ± 2·0 | 201·4 | 200·4 |
| | 1901·61 | ·100 | ·101 | ± 9 | 198·2 | 198·1 | ± 5·6 | 193·9 | 193·8 |
| | 1902·60 | ·080 | ·080 | ± 6 | 219·0 | 218·8 | ± 4·0 | 212·2 | 212·3 |
| | Gemidd. | 0·089 | 0·089 | | | | | 202·5 | 202·2 |
| IV | 1891·75 | 0·4284 | 0·4280 | ±·0015 | 142·28 | 142·29 | ± 0·20 | 148·19 | 147·83 |
| | 1901·61 | ·4228 | ·4216 | ± 30 | 148·92 | 149·05 | ± ·40 | 147·76 | 147·96 |
| | 1902·60 | ·4261 | ·4262 | ± 25 | 149·06 | 149·03 | ± ·34 | 147·20 | 147·28 |
| | Gemidd. | 0·4258 | 0·4253 | | | | | 147.72 | 147·69 |

excentriciteit van II. Dit element wordt zoowel door Delambre als door Damoiseau gelijk nul gesteld; de door Souillart in zijne theorie gebruikte waarde is een zuiver rekenresultaat en heeft niet de minste waarde als bepaling van het element. Evenwel heeft Damoiseau het bestaan van eene excentriciteit van ongeveer dezelfde grootte als de hier gevondene vermoed, zooals blijkt uit het volgende citaat, dat ik aan Souillart [1]) ontleen, uit zijne onuitgegeven verhandeling, geschreven tot opheldering van de constructie zijner tafels. Damoiseau dan zegt: „Nous avons des motifs de soupçonner dans l'orbite du second satellite une équation du centre propre de 32$^s$ en temps synodique (ce qui correspondrait à une excentricité propre de 0,00032738), mais notre incertitude sur la position du périjove, dont le mouvement est encore à calculer par la théorie, nous a fait

[1]) *Mémoires des Savants étrangers*, tome XXX, blz. 28.

remettre cette recherche à un autre temps". Deze excentriciteit, in boog uitgedrukt 0°0188, is dus practisch gelijk aan de door mij gevondene. De reden, door DAMOISEAU opgegeven voor het niet gebruiken er van in zijne tafels, klinkt eenigszins bevreemdend, daar immers de beweging van het perijovium reeds lang te voren door LAPLACE bepaald was.

Wat Satelliet I betreft is het duidelijk dat de gevonden schijnbare middelpuntsvergelijkingen, die trouwens niet zeer veel grooter zijn dan hunne waarschijnlijke fouten, *niet* een werkelijke excentriciteit vertegenwoordigen. Het is niet onmogelijk dat zij toe te schrijven zijn aan het bestaan van donkere vlekken op de oppervlakte van den satelliet, die immers dikwijls waargenomen zijn, waardoor het in den heliometer waargenomen lichtcentrum verplaatst is, en wel op verschillende epoques verschillend, ten opzichte van het zwaartepunt. Eene hierop berustende verklarings-hypothese zou evenwel noodzakelijkerwijze zoovele onbepaalde grootheden moeten bevatten, dat hare overeenstemming met de waarnemingen geen waarborg voor hare waarheid zou zijn. Ik heb daarom nagelaten verder op dit punt in te gaan.

3. *Bepaling der libratie uit de waarnemingen.* In eene mededeeling, door mij in 1905 aan het Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres gedaan [1]), heb ik aangetoond:

dat de libratie waarschijnlijk een merkbaren coefficiënt heeft,

dat de bepaling uit de waarnemingen, niet alleen van de phase en de amplitude, maar ook van de periode der libratie van het hoogste belang is voor de afleiding der massa's, speciaal van die van den eersten satelliet,

dat deze bepaling uitvoerbaar is uit de waarnemingen verricht aan de sterrewachten te Kaapstad, Helsingfors en Pulkowa,

dat hoogstwaarschijnlijk de periode aanzienlijk afwijkt van de door LAPLACE en SOUILLART opgegeven waarde, en

dat deze bepaling onafscheidelijk verbonden is met een onderzoek van de langperiodige ongelijkheden in de lengtes der satellieten, en dat derhalve het geheele probleem slechts door successieve benaderingen kan worden opgelost.

In het binnenkort verschijnende No. 17 der Groningsche Publicaties zijn al deze conclusies bevestigd gevonden, en worden ten slotte de bedoelde benaderingen uitgevoerd. In deze mededeeling kan op de

[1]) Over de Libratie der drie binnenste groote Satellieten van Jupiter en eene nieuwe methode ter bepaling van de massa van Satelliet I. Handelingen van het tiende Congres, blz. 125—128.

bijzonderheden van dat onderzoek, en de daarbij ontmoete moeilijkheden, niet ingegaan worden; ik moet mij beperken tot eene korte uiteenzetting der resultaten.

De behandelde waarnemingen zijn de boven reeds genoemde Kaapsche heliometer-waarnemingen van 1891, 1901 en 1902, en verder photografische platen van Helsingfors uit de jaren 1892—93, 1893—94, 1894—95, 1895—96 en 1897, van Pulkowa uit de jaren 1895—96, 1897 en 1898 en van de Kaap uit 1904. In het geheel had ik dus tien opposities tot mijn beschikking. Voor elk van deze werden nu correcties $\Delta\, l_i$ afgeleid tot de lengtes der drie satellieten. Deze directe waarnemingsresultaten zijn evenwel niet zonder meer te gebruiken voor het bepalen de libratie. Er zijn n.l. zooals boven reeds in het kort gezegd is, in de lengtes van elk der satellieten vier ongelijkheden, wier perioden liggen tusschen 400 en 500 dagen, en wier coëfficienten van dezelfde grootte-orde zijn als de libratie. Deze ongelijkheden zijn dus gedurende de weinige maanden, die elk der tien waarnemingsreeksen beslaat, vrijwel constant, en de uit de waarnemingen afgeleide correcties $\Delta\, l_i$ bevatten derhalve, behalve de correctie $\Delta\varepsilon_i$ tot de middelbare lengte en de libratie, ook de correcties tot deze ongelijkheden.

Nu zijn de coëfficienten dezer ongelijkheden evenredig met de excentriciteiten en met de massa's, en dus in dezelfde mate als deze onzeker, dat is in zeer hooge mate. De perioden der vier ongelijkheden zijn zoo weinig verschillend, dat ze niet van elkaar te scheiden zijn. Verder verschilt de periode van de belangrijkste — belangrijk zoowel door hare grootte als door hare onzekerheid — juist zooveel van het gemiddelde tijdsverloop tusschen eene oppositie en de volgende, dat deze ongelijkheid, wanneer men alleen de lengtes op het tijdstip der oppositie beschouwt, zich voordoet als eene met ongeveer dezelfde periode als de libratie, en dus ook van de libratie niet te scheiden is. Het was derhalve onmogelijk zoowel de libratie als deze ongelijkheden uit de waarnemingen alleen te bepalen.

Ter bepaling van de massa's hebben wij de volgende gegevens (de massa van satelliet IV buiten beschouwing latend):

1. de groote ongelijkheden in de lengtes der satellieten I, II en III,
2. de beweging van het perijovium van satelliet IV,
3. de periode der libratie.

De beweging van het perijovium van IV hangt ook af van de afplatting der planeet, die dus mede in het onderzoek moet betrokken worden, en bepaald wordt uit

4. de beweging van den knoop van Satelliet II.

De gegevens 1, 2 en 4 zijn de door LAPLACE gebruikte, op 3 is

door mij in de boven aangehaalde mededeeling aan het Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres voor het eerst gewezen.

De benaderingsmethode die ik gevolgd heb is nu aldus: Zekere waarden van de massa's, ten naaste bij voldoende aan de condities 1, 2 en 4, werden aangenomen, en de bijbehoorende waarden der langperiodige ongelijkheden werden berekend. Laat deze zijn $\delta l_i'$, en laat $\delta l_i^0$ de waarden zijn die gebruikt zijn in de berekende satellietenplaatsen, die met de waarnemingen vergeleken zijn. Dan is klaarblijkelijk de correctie tot de lengte, overeenkomende met de aangenomen massa's (en middelpuntsvergelijkingen):

$$\Delta l_i' = \Delta l_i - (\delta l_i' - \delta l_i^0).$$

Uit deze $\Delta l_i'$ werden dan de amplitude, phase en periode der libratie bepaald. Stemt deze periode met de uit de aangenomen massa's berekende, dan is de benadering voldoende, zoo niet, dan wordt de geheele bewerking met andere massa's herhaald.

Het mededeelen der verschillende benaderingen, evenals der na substitutie der gevonden waarden overblijvenden residus, zou mij te ver voeren.

De ten slotte opgestelde formule voor de libratie is

$$\vartheta = 0^\circ.158 \sin \frac{t - 1895{\cdot}09}{7{\cdot}0}.$$

De aangenomen massa's zijn

$$m_1 = 0.0000\ 256$$
$$m_2 = 0.0000\ 231$$
$$m_3 = 0.0000\ 820$$

en de verdeeling der libratie over de drie satellieten heeft plaats in de volgende verhouding:

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta} = +\ 0{\cdot}175 \qquad \frac{\vartheta_2}{\vartheta} = -\ 0{\cdot}260 \qquad \frac{\vartheta_3}{\vartheta} = +\ 0{\cdot}02.2^5$$

De middelbare lengtes (zonder libratie) op 1900 Jan. 0, middelbare middag te Greenwich, zijn, geteld van af het punt Aries:

$$l_1 = 142^\circ{\cdot}604$$
$$l_2 = 99\ {\cdot}534$$
$$l_3 = 167\ {\cdot}999$$
$$l_4 = 234\ {\cdot}372,$$

terwijl door vergelijking met de epoque 1750 de volgende siderische middelbare dagelijksche bewegingen werden gevonden:

$$n_1 = 203^\circ{\cdot}4889\ 5652$$
$$n_2 = 101\ {\cdot}3747\ 2411$$
$$n_3 = 50\ {\cdot}3176\ 0790^5$$
$$n_4 = 21\ .5710\ 7132.$$

Waarschijnlijke fouten heb ik niet toegevoegd, daar deze toch, zonder het uitvoerige waarnemingsmateriaal er bij, niet anders dan subjectieve waarde kunnen hebben.

**Aardkunde.** — De Heer MARTIN biedt eene mededeeling aan van den Heer P. TESCH. *„Beschouwingen over het Staringsche Zanddiluvium".*

(Mede aangeboden door den Heer G A. F. MOLENGRAAFF.)

De zandige terreinen vormen een zeer groot deel van den Nederlandschen bodem. Wanneer men van wat men gewoonlijk de diluviale helft van ons land noemt, aftrekt het grinddiluvium met het keileem, de alluviale venen en rivierafzettingen en de streken, waar de wind zijnen invloed op den bodem heeft kunnen doen gelden, dan houdt men over, indien men afziet van Zuid-Limburg, de terreinen, waarvan de oppervlakte bestaat uit zand zonder of met slechts kleinere steentjes en die door Staring onder den verzamelnaam van „Zanddiluvium" bijeengebracht zijn. Reeds de overweging, dat deze terreinen in de verschillende streken van ons land een geheel verschillend voorkomen en verschillende vruchtbaarheid hebben, bewijst, dat Staring zeer terecht den neutralen naam van zanddiluvium koos, waarbij dus de oorsprong geheel in 't midden gelaten werd. Ondertusschen spreekt hij in het tweede deel van zijn „Bodem van Nederland" op pag. 114 tot 121 in de volgende woorden over de wijze van ontstaan van deze zandformatie:

„Het is klaarblijkelijk ontstaan in het laatste gedeelte van het diluviale tijdperk, of in het allereerste van het daaropvolgende alluviale; want overal waar men het aantreft, ligt het op het grinddiluvium en onder de alluviale gronden."

„Deze vorm (de waterpasse ligging der samenstellende lagen) gepaard met het in vele streken duidelijk in het oog vallend liggen op het grinddiluvium, en aan den voet der hoogten door dit gevormd, doen, met hooge waarschijnlijkheid, tot den vermoedelijken oorsprong van het zanddiluvium besluiten. Nadat het zand met grind en keien overgebracht was geworden naar de plekken, waar wij dit tegenwoordig aantreffen, en ongeveer den vorm had aangenomen, dien het nog tegenwoordig bezit, moet er nog een zeer aanmerkelijke tijd verloopen zijn, alvorens de oppervlakte door den plantengroei bevestigd werd en de waterstroomen zich in hunne tegenwoordige bedden regelmatig voortbewogen. Gedurende dit tijdperk zullen vorst en regen eenen sterkeren invloed hebben uitgeoefend op deze tot kleine gebergten vereenigde gruismassa's, dan later, toen hare oppervlakte door eene dikke korst van teelaarde beschermd werd. De voor verweering vatbare steensoorten, vele granieten, glimmerschiefers, zandsteenen en psammieten zijn daardoor tot gruis, zand en leem, ver-

vormd, en het afstroomende regenwater heeft deze voor een groot gedeelte naar de laagten gevoerd. Deze laagten zijn daardoor aangevuld, terwijl tegelijkertijd de hoogten zich verlaagden en eenen meer vlakken, meer afgeronden vorm aannamen, dan zij oorspronkelijk bezaten."

„Dat dit zand als het ware het afslijtsel is van het grinddiluvium en gevormd gedurende den tijd van overgang tot het alluviale tijdperk, is ook op te maken uit de overweging dat er zulk eene overgangsvorming aanwezig moet zijn, en dat deze niet wel in eene andere, dan in dit zand aangewezen zal kunnen worden".

Tot zoover STARING. Dat echter ook andere factoren dan de afspoeling van de naburige grindheuvels in het spel moeten geweest zijn, die tot de afzetting en verspreiding van dit zand hebben bijgedragen, was aan STARING niet onbekend. Men mag dit als zeker aannemen, wanneer men ziet, hoe hij op zijne geologische kaart hier en daar langs de groote rivieren alluviale rivierzandbanken geïsoleerd van het tegenwoordige bed op het zanddiluvium teekent, en hoe op het kleurenblad „zanddiluvium" en „rivages diluviens" met verschillende letter Z en Z' zijn aangeduid, doch deze onderscheiding op de kaart zelf niet volgehouden is. Hier beteekent namelijk dezelfde kleur en dezelfde letter Z zoowel „zanddiluvium" als „diluviale rivierbanken" (blad 19) en „rivieroeverbanken" (blad 20). Blijkbaar durfde STARING dus in het veld de beslissing niet aan, hoewel hij overtuigd was, dat deze terreinen niet gelijkwaardig zijn. Al heeft hij dus de gedachte niet duidelijk uitgesproken, zoo komt hem toch de eer toe, het vraagstuk als zoodanig erkend te hebben.

STARING's standpunt in deze zaak was dus het volgende:

Het zanddiluvium omvat alle zandafzettingen, die ontstaan zijn na den ijstijd en die niet zeker alluviaal zijn te noemen. Het is door regenwater afgespoeld van de naburige, hoogere grindterreinen; ondertusschen komt op vele plaatsen ook de mogelijkheid van eene andere wijze van ontstaan in aanmerking.

Na STARING hebben slechts een drietal onderzoekers, voor zooveel de mij ter beschikking staande literatuur leert, zich met het als postglaciaal geldende zanddiluvium beziggehouden.

Dr. H. VAN CAPPELLE spreekt in zijn voordracht over den „oorsprong van het heide- of hellingzand" op het zevende Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres in 1899 (Handelingen pag. 450) van vormingen van verschillenden ouderdom, die in STARING's zanddiluvium vertegenwoordigd moeten zijn. In het zand dat meer dan waarschijnlijk als afspoelingsproduct der naburige grindhoogten beschouwd moet worden, heeft spreker op verschillende plaatsen (West-

Drenthe, Gaasterland, Amersfoort enz.) oude bodemoppervlakken gevonden, die hij met de volgende redeneering met de interglaciale periode in verband wil brengen:

„De jongdiluviale stroomen, welke het vlakke dalzand hebben afgezet, hebben het heidezand geërodeerd. Wanneer wij ons dus het vlakke dalzand, of de jongste étage van het diluvium van Noord-Nederland, evenals in het diluvium van Noord-Duitschland, in de afsmeltingsperiode van het jongste landijs gevormd denken, dan komen voor de vorming van het oudere heide- of hellingzand, dat wij als een afspoelingsproduct van het oud-diluviale grindterrein leerden kennen, slechts twee onderafdeelingen van het diluviale tijdvak in aanmerking n.l.: 1°. de tweede landijsperiode, m.a.w. de tijd, toen de rand van het jongste gletscherdek zich op korten afstand van ons land bevond en 2°. de afsmeltingsperiode van het oudste landijs."

„Voor het in deze drie profielen op de zooeven beschreven veenstoffenlagen rustende zand is slechts eerstgenoemde ouderdom mogelijk, waaruit dus voor de veenstoffenlagen zelf een interglaciale ouderdom zou moeten volgen. Het zand echter, dat het keileem onmiddellijk bedekt, kan evengoed een afzettingsproduct van het eerste gletscherdek zijn."

Alvorens verder te gaan, wil ik eerst hieraan eenige opmerkingen toevoegen. Wat bewijzen de oude bodemoppervlakken, die VAN CAPPELLE waarnam? Niets anders, dan dat in de afzetting van het zand, dat jonger is dan de tweede (voor ons land eenige) gletscherbedekking, perioden van rust zijn geweest, waarin zich organisch leven op het zand kon ontwikkelen. Het feit intusschen, dat een zandlaag eenigen tijd een plantendek heeft gedragen, om daarna opnieuw door zand bedekt te worden, is nog geen bewijs, dat hiermede twee verschillende geologische tijdvakken gemoeid zijn. Trouwens Dr. VAN CAPPELLE zegt zelf, dat de veenstoffenlagen wigvormig tusschen het zand uitloopen en dus zeer plaatselijk zijn. Voor eene nadere ouderdomsbepaling hebben ze dus niet de minste waarde en het is eene overschatting van hunne beteekenis, hierin een argument te zien voor den interglacialen ouderdom van deze lagen. Ik ben het geheel eens met Dr. VAN CAPPELLE, waar hij zegt op pag. 151:

„deze schrijver (Dr. J. MARTIN te Oldenburg) zal wel niet gelooven, dat de interglaciale periode zal zijn voorbijgegaan, zonder hier en daar ook in onzen bodem sporen achter te laten, hoewel een overtuigend bewijs, wegens het ontbreken van eene grondmoraine van het jongste landijs in ons land moeilijk geleverd zal kunnen worden", en inder-

daad is het wel niet anders denkbaar, of onder onze zoog. postglaciale gronden zijn afzettingen, die equivalent zijn met vormingen uit den tweeden interglaciaaltijd en den derden ijstijd in Duitschland, doch een positief bewijs is niet te geven. Oude bodemoppervlakken tusschen het zand hebben hiervoor niet de minste bewijskracht. Naar mij voorkomt, is de geheele glaciaalgeologie bovendien nog te jong, om thans reeds elke zandafzetting, die niet alluviaal is, à tort et à travers een plaatsje te willen aanwijzen in de thans aangenomen indeeling in 3 ijstijden en 2 interglaciaaltijden.

Juist de laatste jaren hebben nieuwe feiten aan het licht gebracht, die het misschien noodig zullen maken, het aantal ijstijden uit te breiden of wellicht te verminderen. Waar dus het stratigraphisch skelet nog lang niet als volgroeid kan beschouwd worden, daar doen we m.i. voor alsnog beter, slechts feiten te verzamelen, gedachtig aan het motto, dat ik op een geschrift van den Belgischen geoloog H. Forir vond: "Les interprétations passent, les faits restent."

Om het standpunt aan te geven, dat Dr. van Cappelle dus in 1899 ten opzichte van den oorsprong van het heide- of hellingzand inneemt, haal ik de conclusie aan aan het slot van bovengenoemde voordracht:

„Het heidezand is deels door het smeltwater van het zich terugtrekkende oudste landijs, deels na den interglaciaaltijd door de stortbeken gevormd, welke in den tijd der nabijheid van het tweede landijs van de hoogten van het ouddiluviale grindterrein afvloeiden; deels ook heeft de alluviale periode door afspoeling dezer heuvels tot de diktetoename van het heidezand bijgedragen."

Dr. J. Lorié heeft in talrijke geschriften over verschillende streken van ons land juist den nadruk gelegd op het feit, dat de zandige vlakten, die onze groote en vele kleinere rivieren begeleiden, beschouwd moeten worden als rivierbeddingen uit den diluvialen tijd, en dat dus dit zand door rivierwater is afgespoeld van de omgevende hoogere tereinen, en in hare bedding stroomafwaarts verplaatst. Ik acht het overbodig, hier alle plaatsen aan te halen, waar deze onderzoeker eene dergelijke meening uitspreekt, doch wil met een tweetal voorbeelden volstaan.

Op het vierde Natuur- en Geneeskundig Congres in 1893 (Handelingen pag. 393) spreekt Dr. Lorié over „de hoogvenen van Brabant-Limburg." Hierin betoogt de spreker, dat de hoogvenen van Oostelijk Noord-Brabant en Noordelijk Limburg het ontstaan danken aan bestaande geulen in den zandbodem, die geen afwatering hadden. Deze geulen zijn oude Maastakken, terwijl de rivier zich voordurend naar het Oosten verplaatst heeft. Geheel de Oostelijke

helft van Noord-Brabant en het Noorden van Limburg moeten dus beschouwd worden als eene diluviale Maasdelta.

„Uit het stadium der wilde wateren, toen het Maaswater nog zonder bepaalde bedding stroomde, werd een samengesteld delta-net geboren, dat gaandeweg verarmde en verviel, totdat er slechts één stroomloop, de rivier de Maas, was overgebleven." enz.

In de mededeelingen omtrent de geologie van Nederland, verzameld door de commissie voor het Geologisch onderzoek, No 35, toont Dr. Lorié overtuigend aan, dat het oppervlak van de Geldersche Vallei een laagterras van een verdwenen Rijnarm voorstelt.

„Op het veen volgt een dikke zandlaag, die niet van de hoogten ter weerzijden is afgespoeld, maar door eenen Rijntak aangevoerd, die zoodoende een laagterras opbouwde." (pag. 95).

Het feit, dat het fluviatiele zand rust op de mariene fauna van het Eemstelsel, met gematigd karakter en daarvan nog door veen en zeeklei gescheiden is, dwingt m.i. tot de aanname dat de vorming der laagterrassen door de rivieren niet meer plaats had in het diluviale tijdvak, doch in een oud-alluviale periode met ons tegenwoordig klimaat. Ik hoop hierop spoedig te kunnen terugkomen.

De derde onderzoeker van de Nederlandsche zandgebieden was Dr. J. L. C. Schroeder van der Kolk, en het is hier zeker overbodig, zijne groote verdiensten, ook ten opzichte van dit geologisch vraagstuk, nogmaals te doen uitkomen. Aan zijn scherp vernuft en aan zijn nauwkeurig microscopisch zandonderzoek danken we thans de volgende indeeling: [1])

I. Kwartsamfiboolzanden.

*a.* gehalte kleiner dan 0.4 Zuidelijk Diluvium
*b.* gehalte grooter dan 0.4 Noordelijk Diluvium

II. Kwartsgranaatzanden.

*a.* Laag gehalte. Aanspoeling. Alluvium
*b.* Hoog gehalte. Uitspoeling. Alluvium

Met evenveel scherpzinnigheid wist hij de door hem gevonden kenmerken toe te passen bij zijne karteering van de omstreken van Deventer. We weten thans, dat de zandvlakte ten Westen van de heuvels van Holten, Markelo en Lochem inderdaad als zanddiluvium in Staringschen zin moet opgevat worden, al zal een later onderzoek moeten uitmaken, hoe dit vereenigbaar is met de groote waarschijnlijkheid, dat eenmaal het IJselwater over die zandvlakte vloeide.

Het was Schroeder van der Kolk niet gegeven zijne met zooveel

---

[1]) In dezen vorm geeft Schroeder van der Kolk o. a. zijne indeeling op het zesde Natuur- en Geneeskundig Congres in 1897 (Handelingen pag. 409).

succes begonnen onderzoekingen van onze zandige terreinen voort te zetten. Eene drukke werkkring te Delft en eene zwakke gezondheid hebben hem de gelegenheid ontnomen, dit vraagstuk verder te behandelen en zijn te vroege dood heeft aan alle verdere verwachtingen een einde gemaakt.

Op den weg, die leidt tot de ontwarring der verschillende Nederlandsche zanden, is echter de eerste stap gezet, en het is zeker een zijner grootste verdiensten dien weg aangegeven te hebben.

Intusschen is het er nog ver van af, dat nu alle moeilijkheden overwonnen zijn. De Schroeder van der Kolksche regels zijn in het algemeen volkomen juist, maar daarom gaat het nog niet aan, nu maar blindelings van elk zand het gehalte te bepalen, om te weten, tot welke rubriek het behoort, alsof het de toepassing van regels uit de spraakkunst gold! Op deze wijze zou men weinig eer doen aan den wetenschappelijken zin van den ontdekker. De werking der natuurkrachten op het aardoppervlak is te gecompliceerd, om de uitkomst in alle gevallen onder eenen dergelijken eenvoudigen vorm te kunnen brengen. In elk bijzonder geval moeten alle omstandigheden mede in aanmerking genomen worden, of men zou dikwijls verkeerd uitkomen. Als voorbeeld, hoe licht men tot tegenstrijdigheden zou komen, indien men zich niet van elke bepaling nauwkeurig rekenschap geeft, diene het volgende:

In de grove grijze zanden, die naar de resultaten van meerdere boringen de diepere niveaus van het Rijndiluvium in Limburg vormen, zijn bazaltkorrels vrij talrijk vertegenwoordigd. Ook als men door zeven de korrels grooter dan 2 m.M. en kleiner dan 0.2 m.M. verwijdert, blijven nog genoeg bazaltkorrels over, om het gehaltegetal op 0.5 à 0.6 te houden (Het S. G. van bazalt is 2.9 à 3.1). Neemt men nu niet in aanmerking, dat de bazaltkorrels geen mineraal, doch een aggregaat van zwaardere en lichtere mineralen vormen, dan zou men tot de conclusie komen, dat deze zanden van Noordelijken oorsprong zijn, dus dat eene oudere Noordelijke gletscherbedekking ons land bereikt moet hebben, alvorens de rolsteenen van het Rijndiluvium tot afzetting kwamen. Tot welke moeilijkheden eene dergelijke ontdekking, zoo geheel in strijd met alle andere onderzoekingen over ons diluvium, zou voeren, behoef ik hier niet aan te toonen. Gelukkig is daar thans geen reden toe.

In het bovengenoemde, door Schroeder van der Kolk behandelde geval, bestond de toevallige omstandigheid, dat de Oostelijke heuvelrij een duidelijk verschil in samenstelling vertoont, zoodat dit verschil in het van de hellingen afgespoelde zand vervolgd kon worden. Waar een heuvelrij echter geen verschil in samenstelling oplevert, geeft het

gehaltegetal ons geen criterium, om uit te maken, of eene naburige zandvlakte als hellingzand beschouwd moet worden, dan wel als op andere wijze ontstaan.

Er is echter meer. Zoolang we met zand te doen hebben, waarvan we mogen aannemen, dat het *onverplaatst* diluvium is, dat dus de afzetting van het afsmeltende landijs, of de diluviale Rijn- en Maasstroomen in situ voorstelt, in het grinddiluvium dus, bestaat groote kans, dat de practische grens van 0.4 pCt. tot juiste resultaten voert, al is die grens tusschen Zuidelijk en Noordelijk diluviaalzand min of meer willekeurig. Hier helpen echter ook de aanwezige steenen. Wanneer we echter het zand beschouwen, dat tot afzetting gekomen is na het grinddiluvium, waarvan het materiaal dan toch ontleend moet zijn aan het grinddiluvium, en dat dus *verplaatst* diluvium voorstelt, in het zanddiluvium dus, dan kan het wel niet anders, of de verschillende wijzen, waarop die verplaatsing kan hebben plaats gehad, moeten noodzakelijk het gehalte aan zware mineralen ook min of meer gewijzigd hebben. Hier is dus de grootste voorzichtigheid noodig in het trekken van conclusies.

Indien er nu een kenmerk is aan te wijzen, dat als een gevolg van die verschillende wijzen van verplaatsing kan beschouwd worden, dan is een verdere stap gezet. Ik meen nu een middel gevonden te hebben, dat ons helpen kan om in sommige gevallen, waarin de Schroeder van der Kolksche regels ons in den steek laten, eene beslissing te nemen. Ik voeg er echter dadelijk bij, dat ik ook dit middel in de verste verte niet als universeel beschouw.

Hiertoe zal het noodig zijn, even *zeer in 't algemeen* aan te geven, hoe ik mij voorstel, dat de aanvang van het diluviale tijdvak ons land aantrof en op welke wijze de afzetting van ons grinddliluvium plaats vond.

Voor zooveel we thans weten, is de tertiaire ondergrond van ons land overal marien (met uitzondering van Zuid-Limburg).

In het Westelijk deel van Zeeuwsch-Vlaanderen wordt de ondergrond door de rupelleem gevormd, in het Oostelijk deel ligt hierop de oud-pliocene zeevorming van het Diestien. Deze ondergrond ligt hier zeer hoog en schijnt alleen door alluvium bedekt te worden. Verder langs onze Zuidelijke grenzen zijn het de jong-tertiaire zeevormingen van het Poederlien, Diestien en Boldérien, die als meer of minder leemige glauconietzanden optreden. Daarboven volgen dan de zanden van het Moséen, die m.i. tot het oude fluviatiele diluvium (dus tot het Rijn- en Maasdiluvium) moeten gerekend worden. De werkelijk tertiaire, miocene land- en zoetwatervorming (bruinkoolformatie) schijnt tot Zuid-Limburg beperkt te zijn. Langs

de Oostelijke grenzen zijn het aanvankelijk opper-oligocene zeezanden, verder Noordelijk worden deze bedekt door miocene mariene lagen met rijke fauna.

In het Oosten van Gelderland en Overijssel ligt dezelfde miocene leem met zeefauna dichtbij, gedeeltelijk zelfs aan de oppervlakte (de tertiaire leem van Eibergen en Twenthe van STARING's kaart). In Oostelijk Noord-Brabant en Noordelijk Limburg is dit mioceen nog bedekt door zwak glauconitische zanden van geringe dikte, die waarschijnlijk tot het plioceen behooren. Naar het Noorden en Westen heeft LORIÉ ons op verschillende plaatsen eveneens eenen pliocenen zeebodem als ondergrond doen kennen (Grave, Arnhem, Gorkum, Bergen op Zoom, Utrecht, Diemerbrug bij Amsterdam, Goes), die naar het Noordwesten steeds dieper ligt. Bij den aanvang van het diluviale tijdvak was de toestand dus aldus: het grootste deel van ons land was bedekt door de naar het Noordwesten langzaam dieper wordende pliocene zee, terwijl alleen in het Oosten en Zuidoosten oudere tertiaire zeebodem een kust vormde.

Nu begonnen de rivieren Rijn en Maas, tengevolge van veranderde klimatologische toestanden, de geweldige hoeveelheid zand en rolsteenen aan te voeren, die thans overal in ons land, met uitzondering van Zeeuwsch-Vlaanderen en Zuid-Limburg, den ouderen ondergrond vormen. Een delta werd opgebouwd, die ten slotte het geheele bekken van ons land en de Zuidelijke Noordzee tot aan de krijtrotsen van Norfolk en Suffolk opvulde. Ons land is dus in den meest letterlijken zin een aanspoelsel van Rijn en Maas. De groote blokken kwamen hierheen, vastgevroren in drijfijs, de kleinere rolsteenen en het zand werden direct door het water getransporteerd. Ook de kleinere rivieren brachten hun aandeel aan den opbouw van deze delta, zooals de Vecht in den ondergrond van Almelo en Ootmarsum (zie de Voordracht van Dr. H. VAN CAPPELLE op het derde Natuur- en Geneeskundig Congres in 1891, Handelingen pag. 383).

Vervolgens werd een deel van deze delta bedekt door het landijs van den Scandinavisch-Baltischen gletscher, die bij zijn terugtrekking een laag van Noordelijk materiaal op het Rijndiluvium afzette. Het rivierwater stroomde ten deele langs den Zuidelijken ijsrand en kon dus hieraan eveneens nog materiaal ontleenen. Hierin moet m.i. de verklaring gezocht worden van het verschijnsel, dat Noordelijke steenen belangrijk ten Zuiden van den zuidelijken ijsrand nog sporadisch optreden.

Na de terugtrekking van het landijs begint voor ons land eene nieuwe periode. Het rivierwater bleef ten Zuiden van den eind-

morainewal Laren in 't Gooi, Rhenen, Nijmegen, Cleef, Xanten, en we mogen ook hierom dus aannemen, dat het transporteerend vermogen van Rijn en Maas tegelijkertijd verminderde en dat dus het rivierwater van het stadium der „wilde wateren" overging in dat van een veel-vertakt en ingewikkeld delta-net. Het grinddiluvium is dus nu afgezet en we moeten ons afvragen, op welke wijze de nu ontstane oppervlakte van ons land onder die omstandigheden gewijzigd is kunnen worden.

De vermindering van het rivierwater had tengevolge, dat hoogere gedeelten thans droog bleven, en de wind hierop dus zijnen arbeid kon beginnen, evenzeer als het afstroomende regenwater het zand van de hellingen kon afspoelen, terwijl de nog talrijke riviertakken en kleinere rivieren tusschen de hoogere gedeelten eveneens zand afspoelden en vlak uitspreidden.

In de zandige terreinen, die overal op ons diluvium de hoogten van het grinddiluvium omringen en doorsnijden, mogen we dus verwachten te zullen aantreffen:

Stuifzand,

Hellingzand,

Dalzand,

als successievelijk door den wind, door afstroomend regenwater en door rivierwater afgezet.

Hoe nu deze zanden te onderscheiden? Indien de wind een kom tusschen hoogere terreinen door *stuifzand* heeft opgevuld, dan kunnen we verwachten, dat de afzetting geen gelaagdheid vertoont, dat de samenstelling en de korrelgrootte van het zand geen regelmatigheid oplevert, en dat de oppervlakte zwak golvend of heuvelachtig is. Dit komt overeen, met hetgeen men thans in onze zandstuivingen en overstoven duinvalleien kan waarnemen. Voor plekken zanddiluvium, die geheel door hoogere grindterreinen worden omringd, komt deze verklaring m. i. zeer in aanmerking.

Van *dalzand* mogen we verwachten, dat het zich langs rivieren uitstrekt, of zich in een erosiegeul bevindt, die een verdwenen stroomloop voorstelt, dat de oppervlakte in 't algemeen een flauwe helling vertoont, zoowel naar het bed van den stroom, als stroomafwaarts gericht, dat de afzetting eene duidelijke, bijna horizontale gelaagdheid zal vertoonen, en dat de samenstelling en de korrelgrootte van het zand, zoowel in de stroomrichting als in verticale richting, geen verschillen vertoont. Die verschillen kunnen dan hoogstens verwacht worden in eene richting loodrecht op den stroom. Deze kenmerken kunnen wel is waar door zandbankvorming in het voor-

malige stroombed plaatselijk onduidelijk worden of zelfs verdwijnen, doch over eene grootere uitgestrektheid moeten ze toch voorkomen.

*Hellingzand* moet zoowel in kommen als in geulen kunnen voorkomen, in welk laatste geval de oppervlakte dezelfde hellingen kan vertoonen als het dalzand, het moet eveneens eene horizontale of zwak hellende gelaagheid kunnen vertoonen, doch in de samenstelling en de korrelgrootte mogen we verschillen verwachten:

1°. in de geulrichting, indien de aangrenzende heuvelrij verschil in samenstelling oplevert, zooals in het geval van de heuvels van Holten, Markelo en Lochem. In dit geval moet het verschillende gehalte aan zware mineralen in de geulrichting tot uitdrukking komen.

2°. in verticale richting. Daar eene afspoeling van zand langs eene helling ten gevolge moet hebben, dat die helling flauwer wordt zoowel door verlaging van den top als door ophooging van den voet, en men de hoeveelheid afstroomend water als gemiddelde in een lang tijdsverloop als gelijkblijvend kan beschouwen, beantwoordt dus aan elke helling een zekere korrelgrootte, die nog verplaatsbaar is. Uit deze overweging volgt dus, dat theoretisch het hellingzand naar boven toe fijner moet worden.

Is nu dit theoretische kenmerk in de practijk bruikbaar, om een zand als hellingzand te herkennen? Het volgende moge op deze vraag antwoord geven.

In het laatste jaar zijn door den Rijksopsporingsdienst 3 boringen uitgevoerd in de Peel. Daaruit bleek, dat het hoogveen op zand rust en dat onder het zand het grinddiluvium volgt. Ik stelde mij de vraag: is dit zand *hellingzand*, dus afgespoeld van den Westelijk gelegen hoogeren grindrug Meijel-Deurne door afstroomend regenwater, of is het dalzand, afgezet in een stroombed van een ouden Maasarm?

Ik trachtte deze vraag te beantwoorden, uitgaande van de bovenstaande overweging. Indien werkelijk de onderste lagen een hooger percentage aan groote korrels vertoonden dan de bovenste, dan pleitte dit voor hellingzand, was het percentage aan groote korrels nagenoeg gelijk, dan was het beter aan dalzand te denken.

De grindrug Meijel-Deurne ligt op circa 34 M. + A.P., heeft eene lengte van circa 18 K. M. en eene richting Z. Z. O.-N. N. W. Ongeveer op een daarmede evenwijdige lijn liggen ten Oosten daarvan de 3 bedoelde boringen, (bij de spoorweghalte te Helenaveen, bij het dorp Helenaveen en ten Noorden van het dorp Helden), die ik successievelijk boring 1, 2, en 3 zal noemen, van het Noorden naar het Zuiden.

De ligging van de bewuste zandlaag is als volgt:

| | Meters + A.P. | | Dikte. |
|---|---|---|---|
| | van | tot | |
| in boring 1 | 31.32 | 24.92 | 6 40 |
| in boring 2 | 32.01 | 25.76 | 6.25 |
| in boring 3 | 30.19 | 23.54 | 6.65 |

De zandlaag heeft practisch dezelfde dikte op de 3 plaatsen en de geul is ongeveer 10 M. diep geweest (de verlaging van den grindrug buiten rekening gelaten).

Ik neem aan 4 rubrieken van korrels:

Rubriek A: korrels grooter dan 2 mM.

Rubriek B: korrels kleiner dan 2 mM. en grooter dan 1 mM.

Rubriek C: „ „ „ 1 „ „ „ „ $^1/_2$ „

Rubriek D: „ „ „ $^1/_2$ „

Ik scheidde de korrels door zeven[1]), woog de hoeveelheid en drukte het gehalte uit in percenten van het gewicht.

Men maakt weliswaar een fout, daar de zandkorrels niet alle van dezelfde samenstelling zijn, doch deze fout is volmaakt onbeduidend, daar 99$^1/_2$ pCt. van het gewicht zeker uit kwarts bestaat. Het resultaat vindt men in de volgende tabellen:

BORING 1.

| Diepte waarvan het monster afkomstig is, in meters + A. P. | rubriek A. | rubriek B. | rubriek C. | rubriek D. |
|---|---|---|---|---|
| 31.12 | 0.18 | 0.39 | 38.7 | 60.7 |
| 30.42 | 0 17 | 0 33 | 35.5 | 64 0 |
| 29.38 | 0.43 | 0.66 | 41.2 | 57.7 |
| 28.38 | 0.45 | 0.75 | 41.7 | 57.1 |
| 27.62 | 0.87 | 0.74 | 45.9 | 52.5 |
| 26.52 | 0.93 | 1.58 | 47.5 | 50.0 |
| 25.42 | 2.80 | 1.88 | 46.0 | 49.3 |

[1]) Het spreekt wel vanzelf, dat de zandproefjes eerst gewasschen moeten worden met water, en dat soms behandeling met zwak zoutzuur noodig is, om eventueele aanzetsels van limoniet op te lossen.

10*

BORING 2.

| Diepte waarvan het monster afkomstig is, in meters + A. P. | rubriek A. | rubriek B. | rubriek C. | rubriek D. |
|---|---|---|---|---|
| 31 36 | 0.25 | 0 56 | 39.2 | 60.0 |
| 29.56 | 0.58 | 0.58 | 37.8 | 61.0 |
| 28 56 | 0.61 | 0.92 | 42 3 | 56.2 |
| 27 56 | 1 83 | 2 80 | 44.3 | 51 1 |
| 26.56 | 3.50 | 2.78 | 44.5 | 50.2 |

BORING 3.

| Diepte waarvan het monster afkomstig is, in meters + A. P. | rubriek A. | rubriek B. | rubriek C. | rubriek D. |
|---|---|---|---|---|
| 28.04 | 0.09 | 0.52 | 29.8 | 69.6 |
| 27.04 | 1.25 | 2.83 | 29.5 | 66.4 |
| 25.04 | 2.79 | 2.92 | 34.6 | 59.6 |

Een blik op deze tabellen toont, dat inderdaad in de hoogere zandlagen minder groote en meer kleine korrels voorkomen, zoodat de kwestie ten gunste van hellingzand beslist is. Dat de grootere korrels naar boven toe niet geheel verdwijnen, zooals de theorie zou eischen, is in hoofdzaak een gevolg van het feit, dat de grindrug zelf niet uit een homogeen zand bestaat, doch natuurlijk opgebouwd is uit lensvormige lagen grover en fijner zand.

Ik geloof, dat we gerechtigd zijn aan te nemen :

I°. dat de geul oorspronkelijk het bed van een Maastak was, waarin de stroom echter, dank zij de groote breedte, niet sterk genoeg was, om zand van de oevers af te spoelen en te verplaatsen.

II°. dat deze geul door hellingzand is opgevuld, zoodat de stroomloop verzandde en verlaten werd, of dat de stroomloop eerst om andere redenen werd verlaten en daarna de opvulling plaats vond.

Zooals ik reeds opmerkte, kan dit middel volstrekt niet als universeel gelden, doch alleen in sommige gevallen eene aanwijzing geven. Bovendien moet men over zandmonsters kunnen beschikken uit een

of meer boringen, of in staat zijn de monsters te ontleenen aan een bruikbaren, in de zandafzetting later gevormden erosiewand, of uit eene of andere ingraving. Men is dus afhankelijk van toevallige omstandigheden. Waar die omstandigheden echter aanwezig zijn, is een onderzoek als voren beschreven m. i. aan te bevelen, daar elke aanwijzing toch hare waarde heeft.

Dat Schroeder van der Kolk aan de korrelgrootte weinig waarde hechtte, blijkt uit zijne woorden op pag. 13 van de Bijdrage tot de karteering onzer zandgronden I (Mededeelingen N°. 19): „De getallen zijn tot geheele percenten afgerond, omdat proefjes uit elkanders onmiddellijke nabijheid, ja uit dezelfde laag verzameld, reeds afwijkingen van enkele percenten kunnen vertoonen. Een nauwkeuriger opgaaf zou dus ten onrechte doen gelooven, dat aan de korrelgrootte van zandproefjes als kenmerkende eigenschap eene hooge waarde moest worden toegekend".

Ten slotte nog eene opmerking. Met het terugtrekken van het landijs eindigt voor ons land *feitelijk* de ijstijdperiode. Intusschen weten we, dat na onze gletscherbedekking opnieuw eene nadering van het landijs plaats gevonden heeft, die ons land echter niet bereikte. Zooals Dr. van Cappelle reeds opmerkte, moeten dus in ons land interglaciale afzettingen bestaan. Tot nog toe zijn echter nog nergens in onzen bodem zeeafzettingen met eene arctische fauna aangetroffen en zoolang dit niet het geval is, ontbreken de aanknoopingspunten, om ons postglaciale diluvium te splitsen. Voor alles, wat begrepen is tusschen ons grinddiluvium en de moderne vormingen, zijn wij dus niet in staat eene nadere ouderdomsbepaling te geven. Zelfs is het zeer goed denkbaar, dat een zand met enkele kleine rolsteentjes, dat door grinddiluvium omringd is, geologisch daartoe behoort. De verticale bouw van de Rijn- en Maasdelta toont immers aan, dat elke horizontale doorsnede een oppervlak geeft, waarop fijne en grove zanden met en zonder rolsteenen voorkomen.

Ook de groote zoetwaterkleilenzen in het grinddiluvium bewijzen, dat ook toen zoetwatermeren bestonden, waarin het slib kon bezinken. Deze zoetwaterbekkens moeten omringd zijn geweest door hoogere, droge gronden, waarvan dus eveneens hellingzand en stuifzand is gevormd, die geologisch tot het grinddiluvium behooren. *Eene zuiver-geologische karteering van de oppervlakte van Nederland is dus voorloopig eene onmogelijkheid.* Men meene echter niet, dat ik hiermede bedoel, dat eene poging tot geologische karteering niet wenschelijk zou zijn. Juist een systematisch onderzoek van de oppervlakte zal de middelen doen vinden, om de thans bestaande moeilijkheden te overwinnnen. Zoolang die middelen niet gevonden zijn,

zal men zich met eene voorloopige onderscheiding moeten behelpen, die ik mij ongeveer als volgt voorstel:

*A. Glaciaal* en *fluviatiel* (fluvio-glaciaal) *diluvium*. De uitdrukking „praeglaciaal" kan met recht slechts toegepast worden op het oppervlak van de Rijn- en Maasdelta, dat *onder* de afzettingen van het landijs ligt. Ten Zuiden van den zuidelijken ijsrand kan de oppervlakte van de delta, voor zoover uit onverplaatst grinddiluvium bestaande, gelijktijdig gevormd zijn met het glaciale diluvium.

*B. Postglaciaal diluvium en oud-alluvium.*
Slechts in sommige bijzondere gevallen zal het mogelijk zijn hiertusschen een grens te trekken.

*C. Jong-alluviale of recente vormingen.*
Binnen deze geologische grenzen is voorloopig slechts petrographische en genetische karteering mogelijk.

*Venlo*, den 14 Juni 1907.

**Natuurkunde.** — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer J. J. VAN LAAR: *„Iets naar aanleiding der laatste opmerkingen van* Prof. H. KAMERLINGH ONNES *en* Dr. W. H. KEESOM."

(Mede aangeboden door den Heer SCHREINEMAKERS.)

In het Akademieverslag van 5 Juni 1907 (blz. 59—66) beantwoorden Prof. KAMERLINGH ONNES en Dr. KEESOM eenige opmerkingen, welke ik (naar aanleiding hunner laatste stukken) in het Verslag van 8 Mei 1907 (p. 939—952) publiceerde.

Het zij mij vergund op de hoofdpunten van dit antwoord nog even kortelijk terug te komen.

*a*. Blz. 64, regel 8—13. „Het ware wenschelijk geweest" enz.

Inderdaad is door mij de loop der *plooi* in het door Prof. KAMERLINGH ONNES en Dr. KEESOM bedoelde geval niet aangegeven. Ik bepaalde mij er toe in het algemeen den loop der *plooipuntslijn* te onderzoeken. De uitkomsten die ik *daaromtrent* verkreeg, stemmen met het door KAMERLINGH ONNES en KEESOM gevondene overeen.

*b*. Blz. 65, regel 8—17.

In mijne in het Zittingsverslag gepubliceerde stukken is alleen van geval *b* sprake (waarin een minimumtemperatuur op den tak $C_0 C_2$ des plooipuntslijn voorkomt). De reden hiervan is, dat ik toen

(7 Juni 1905 en 10 Januari 1906) alleen het geval $b_1 = b_2$, waarin zulk een minimum altijd optreedt, uitwerkte. De formules, die ik later voor het algemeene geval $b_1 \lesseqgtr b_2$ ontwikkelde (zie TEYLER I, II en III), [welke laatste publicatie (nl. III) door omstandigheden buiten mijn wil vertraagd is], bevatten de *mogelijkheid* der drie gevallen *a*, *b* en *c*. Het spreekt vanzelf, dat Prof. KAMERLINGH ONNES en Dr. KEESOM met dit nog niet gepubliceerde onderzoek geen rekening konden houden, en ik vermeld dit dan ook alleen om te doen zien, dat de *mogelijkheid* der gevallen *a* en *c* mij niet ontgaan was.

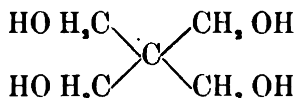
*c*. Blz. 65, o. a. „Ten onrechte meent echter o. i. de Heer VAN LAAR, dat de door hem opgestelde *ééne* voorwaarde in alle gevallen voldoende is om over het optreden van een minimumplooipuntstemperatuur te beslissen.''

Ik veroorloof mij hieromtrent op te merken, dat ik niet anders bedoeld heb — wat ik, naar het schijnt, duidelijker had moeten doen uitkomen — dan tot het bestaan der minimumtemperatuur te besluiten, wanneer de plooipuntstemperatuur aan het uiteinde van den tak der plooipuntslijn, waar de bedoelde voorwaarde vervuld is, *lager* is dan aan het andere uiteinde van dien tak, in welk geval die eene voorwaarde inderdaad voldoende is.

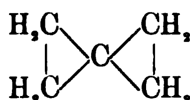
**Scheikunde**. — De Heer P. VAN ROMBURGH biedt eene mededeeling aan: *„Over de ontleding van penta-erythriettetraformiaat bij verhitting.''*

Nadat de verhitting van het diformiaat van s. divinylglycol op zulk een eenvoudige wijze tot het hexatriëen 1.3.5 gevoerd had, zijn in mijn laboratorium onderzoekingen op touw gezet ter bestudeering van de ontleding van mierenzure esters van meerwaardige alkoholen, waarvan de resultaten geleidelijk medegedeeld zullen worden.

Indien men voor het penta-erythriet de formule:




aanneemt, dan ware bij de verhitting van het tetraformiaat, wanneer de reactie op overeenkomstige wijze als bij het s. divinylglycolformiaat verliep, de vorming van een koolwaterstof van de formule:



waarin tweemaal een driering voorkomt, te verwachten. [1])

In werkelijkheid echter verloopt de reactie in geheel anderen zin, want in plaats van een koolwaterstof werd slechts kooloxyde verkregen, terwijl er penta-erythriet teruggevormd wordt.

Om het tetraformiaat van penta-erythriet te bereiden, verhit men deze stof in een kolf, die aan een koeler verbonden is, met een overmaat (8 mol.) van geconcentreerd mierenzuur, zoodanig dat deze met het gevormde water langzaam overdistilleert. Als de in de vloeistof geplaatste thermometer 120° aanwijst, staakt men de verhitting en herhaalt de distillatie met eene nieuwe hoeveelheid mierenzuur. Daarna verhit men nog tweemaal met zuur van 100°/₀. Er blijft dan in de kolf een olieachtige vloeistof achter, die, in een kristalliseerschaal boven zwavelzuur geplaatst, na eenigen tijd rijkelijk kristallen afscheidt. Deze worden ter dege afgezogen en vervolgens tusschen filtreerpapier sterk geperst.

De zoo verkregen vaste stof smolt, na uit droge benzol omgekristalliseerd te zijn, bij 55°. Door herhaald omkristalliseeren uit dat oplosmiddel steeg het smeltpunt tot 57° en bleef toen constant.

In aether is dit formiaat moeilijk oplosbaar; uit de oplossing in benzol wordt het door aether neergeslagen. De smaak ervan is zwak bitter.

Door koken met eene getitreerde kalioplossing kan het daardoor gevormde mierenzuur gemakkelijk bepaald worden.

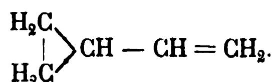
Gev. 74.21 en 74.16°/₀ mierenzuur.
Theorie = 74.18°/₀.

De elementair-analyse gaf de voor penta-erythriettetraformiaat verlangde waarden:

| | Gev. | | Ber. voor $C_9H_{12}O_8$ |
|---|---|---|---|
| C | 43.6 | 43.75 | 43.57°/₀ |
| H | 5.26 | 5.16 | 4.88°/₀ |

Bij verhitting van dit formiaat begint boven 220° eene duidelijk waarneembare gasontwikkeling, die bij 230° vrij sterk is. Het ontwikkelde gas is zuiver kooloxyde, terwijl in de kolf, nadat de gas-

[1]) Gustavson C. R. **123** (1896) 242 verkreeg uit het tetrabromide van penta-erythriet door inwerking van zink en alkohol, in plaats van bovenbedoelde koolwaterstof, het vinylcyclopropaan:



ontwikkeling ten einde is, zuiver penta-erythriet achterblijft, dat aan zijne eigenschappen gemakkelijk als zoodanig herkend kon worden. De hoeveelheid ontwikkeld gas komt met de theoretisch vereischte overeen.

De Heer VAN ENDT, pharm. stud., heeft mij bij deze proeven met groote toewijding en nauwgezetheid bijgestaan.

De Heer RENIER, chem. docts., die zich bezighoudt met de studie der dissociatie van de formiaten van glycolen, vond, dat uit 2.5 dimethyl-hexaandiol 2.5 reeds bij verhitting met mierenzuur het bekende tetramethyldihydrofuraan gevormd wordt.

Van pentaandiol 2.4 bleek de mierenzure ester daarentegen zeer bestendig tegen hitte. Eerst bij ongeveer 400° wordt de verbinding ontleed, waarbij een bij 42° kokende vloeistof ontstaat, die zeer waarschijnlijk 1.2 dimethylcyclopropaan is.

Met het onderzoek van de ontleding der mierenzure esters van manniet houdt de Heer VAN MAANEN, chem. docts., zich bezig.

*Utrecht.* Org. Chem. Lab. d. Univ.

**Physiologie.** — De Heer ZWAARDEMAKER vervolgt zijne mededeeling over: *„De adsorptie van muscongeur tegen vlakten van verschillend materiaal"*.

Wanneer men op de wijze 24 Mei 1907 beschreven met muskon bezwangerde lucht door buizen van tinhoudend lood leidt, dan blijkt de binnenvlakte dezer buizen muskon te adsorbeeren in een hoeveelheid, die zich eenigermate laat afmeten naar den tijdsduur, gedurende welken de buizen naar muskon blijven rieken. Aan deze laatste aanname ligt de veronderstelling ten grondslag, dat de adsorptie geschiedt in een en hetzelfde oplosmiddel, n.l. het condensatielaagje, dat alle voorwerpen heet te bedekken.

De verdunning, waarin het muskon bij zulke proeven in de lucht aanwezig is, kan onder controle der stroomsnelheid met een aërodromometer constant gehouden worden, mag overigens ook binnen zekere grenzen schommelen, daar, gelijk opzettelijk onderzoek leerde, het voor de uitkomst onverschillig is of het per secunde uit de reukbron vervluchtigende muskon in 42, 84 of 126 cub. cm. lucht wordt opgenomen (tinhoudend looden buizen verliezen bij de genoemde voorwaarden den adsorptiegeur geleidelijk in dezelfde mate en in denzelfden tijd, zegge 5 à 6 dagen).

Onder de zooeven aangegeven omstandigheden wordt het adsorptie-

evenwicht bij kamertemperatuur van 19° C ongeveer in 10 minuten bereikt, gelijk blijkt uit het volgende:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Na 1 | min. | expositie | reukloosheid | binnen | 1 | dag. |
| „ 2 | „ | „ | „ | na | 1 | „ |
| „ 3 | „ | „ | „ | „ | 2 | dagen. |
| „ 4 | „ | „ | „ | „ | 3 | „ |
| „ 5 | „ | „ | „ | „ | 4 | „ |
| „ 10 | „ | „ | „ | „ | 5 | „ |
| „ 20 | „ | „ | „ | „ | 4 | „ |

Latere expositie van soortgelijke buizen bij verschillende temperatuur gaf adsorptie van in onderstaande tabel aangegevenen duur.

DUUR VAN DEN ADSORPTIEGEUR.

| Voorafgaande Expositie | bij 0° | bij 20° | bij 40° | bij 60° | bij 100° |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 min. | 8 dagen | 3 à 5 dagen | 2 dagen | 1½ dagen | 1 dag |
| 10 „ | 10 „ | 5 „ | 3 „ | 2 „ | 2 dagen |
| 15 „ | iets meer dan 10 d. | iets meer dan 5 d. | 4 „ | 2 „ | 2 „ |

Op dezelfde wijze behandelde, vernikkeld koperen buizen vertoonen verzadiging na eene expositie van ongeveer 5 minuten, onverschillig of dit bij 0°, 20° of 40° plaats heeft. Volkomen verlies van adsorptiegeur trad in die gevallen resp. na 4, 2 en 2 dagen in.

Uit deze proeven volgt, dat hooger temperatuur tijdens expositie den toestand van verzadiging slechts weinig sneller laat bereiken, maar dat de mate van adsorptie bij hooger tempertuur zeer veel kleiner is. Dit laatste bewijst, dat het evenwicht bij hooger temperatuur verschuift naar de zijde der geringste adsorptie.

Hetgeen tot dusverre is vastgesteld, strookt zeer wel met de hypothese eener oplossing van muskon in het laagje gecondenseerden waterdamp, koolzuur en lucht, dat de voorwerpen algemeen bedekt. Men wordt in dezen gedachtengang tot de voorstelling gevoerd, dat dit laagje op vernikkeld koper dunner is dan op tinhoudend lood en dientengevolge het evenwicht in het eerste geval tijdens expositie vroeger dan in het laatste wordt bereikt, terwijl de temperatuur op beide in denzelfden zin en in dezelfde mate invloed uitoefent. Het feit, dat vooraf verwarmde en in drooge lucht behandelde buizen dezelfde uitkomsten geven is hiermee niet in strijd, daar het niet verwacht mag worden, dat hierdoor het condensatielaagje geheel

verwijderd zou zijn. Ook de overgang van muskus in muskusgeur moet in dit laagje plaats hebben, waarbij alleen vreemd is, dat de temperatuur zoo weinig invloed uitoefent op de snelheid van dit overgangsproces, dat toch van chemischen aard moet zijn.

Een groote moeielijkheid ontstaat voor de theorie echter doordat adsorptie van geur tegen metaalvlakten een algemeen verschijnsel is. Dit blijkt uit soortgelijke stelselmatige proeven als met muskus voor twee andere karakteristieke reukstoffen. Ik koos hiervoor ionon een stof, die zoowel in water, als in vloeibare lucht oplosbaar is, en skatol, een stof, waarvoor dit nog niet is nagegaan.

Ionon laat, wanneer het, in een verdunning van 1 tot millioen in een 0.5 pCt. waterige antifebrine-oplossing, aan voorbij strijkende lucht verdampt en deze op de bekende wijze door cylinders van verschillend materiaal strijkt, een adsorptie achter, die bij poreus porcelein, booglampkool, glas, zilver, haast terstond verdwijnt, aan tin zeer korten tijd, aan tinhoudend lood en lood ter nauwernood één dag, aan nikkel en koper ongeveer 2 dagen, aan aluminium 2½ dag, aan ijzer en staal ongeveer 4 dagen blijft hangen.

Skatol laat, wanneer het, in een verdunning van 1 tot 1000 in paraffinum liquidum, aan voorbijstrijkende lucht verdampt en deze op de bekende wijze door cylinders van verschillend materiaal strijkt, een adsorptie achter, die bij poreus porcelein en booglampkool haast terstond, bij glas in eenige uren, verdwijnt, die aan tinhoudend lood, lood, zilver en tin ongeveer één dag, aan koper 3 dagen, aan ijzer 4 à 5 dagen, aan staal en aluminium meer dan 10 dagen blijft hangen.

Het ionon hecht zich alzoo het meest aan de stof, die muskon in het geheel niet opneemt, d. w. z. aan staal; skatol het meest aan aluminium, dat een betrekkelijk zeer gering adsorptievermogen ten opzichte van muskon vertoont (aluminium houdt muskon nog geen 24 uur vast).

Ter verklaring dezer verscheidenheid wordt men gedwongen òf een eigenaardige wijziging in de oplosbaarheid aan te nemen, die door het in oplossing gaan der specifieke metaaldeeltjes in het condensatielaagje wordt teweeggebracht, òf een absorptie in het metaal zelf te veronderstellen. Het komt mij voor, dat het feitenmateriaal op dit oogenblik nog niet veroorlooft een keuze tusschen de beide mogelijkheden te doen, al wijst ook de geringe invloed der muskondichtheid in de lucht in de richting van adsorptieverbinding met het metaal.

**Kristallografie.** — De Heer MOLENGRAAFF biedt eene voorloopige mededeeling aan van den Heer A. L. W. E. VAN DER VEEN, Cand. Mijningenieur: „*Over het kristalstelsel van diamant.*"

(Mede aangeboden door den Heer C. E. A. WICHMANN).

Er bestaat nog steeds onzekerheid omtrent het kristalstelsel van diamant. Wordt ook al de tetraëdrische hemiëdrie voor diamant vrij algemeen aangenomen, toch vindt ook de meening, dat diamant in de holoëdrische afdeeling van het regulaire stelsel tehuis behoort, voorstanders.

De bestaande onzekerheid wordt veroorzaakt door het ontbreken van fysisch onderzoek aangaande deze kwestie. Zulk een onderzoek is thans verricht, en wel naar het al of niet bestaan van polariteit der trigonale assen. De trigonale assen van diamant werden daartoe onderzocht op pyro-electriciteit volgens de methode van P. P. KOCH[1]). Bij de proefnemingen werden als controle-mineralen toermalijn, boraciet en kwarts gebruikt, welke goed uitgesproken pyro-electrische verschijnselen vertoonen. Het verkregen resultaat is volkomen negatief. Diamant is niet pyro-elektrisch en de trigonale assen bezitten geen polariteit.

Voorts werd de kristalvorm van diamant onderzocht aan een verzameling van 367 ruwe diamanten, door den Heer MOLENGRAAFF bijeen gebracht. Hierin waren nagenoeg alle typen van kristallisatie vertegenwoordigd, voor wier verklaring in talrijke geschriften van GROTH, SADEBECK, MARTIN e.a. tetraëdrische hemiëdrie bij diamant was aangenomen. Het resultaat van dit onderzoek, dat nog niet is voleindigd, is, dat in den eigenaardigen, oktaëdrischen schaalbouw van diamant een rationeele verklaring van alle afwijkende en schijnbaar tetraëdrisch-hemiëdrische kristalvormen van diamant kan worden gevonden. Op grond hiervan mag worden aangenomen dat diamant in de holoëdrische afdeeling van het regulaire stelsel kristalliseert.

---

1) P. P. KOCH. Ueber eine neue Methode zur Untersuchung auf Pyroelektricität. Inaug. Dissert. München, Mainz 1902.

**Natuurkunde.** — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan: *„Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels."* V.

Vervolg van bladz. 31.

Tot hiertoe hebben wij bij de bepaling van de binodale lijn ondersteld, dat de tweede component, waarvoor de grootheid $b$ grooter is dan voor den eersten component, een lagere kritische temperatuur heeft, zoodat $(T_k)_2 < (T_k)_1$ gedacht is. Voor het omgekeerde geval, dus $(T_k)_2 > (T_k)_1$, komen eenige nieuwe complicaties voor, welke wij kort zullen bespreken. Nu kiezen wij dus een strook uit de algemeene $p$-figuur, welke meer rechts gelegen is, en waarin de lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ aanwezig is. Fig. 14 van Verslag K. A. v. W. 26 April 1907 kan ons bij deze bespreking van dienst zijn. In deze figuur zijn de punten 1, 2, 3, 4, 5 en 6 punten der spinodale lijn. Hadden wij de spinodale lijn zelve in deze figuur opgenomen, dan zou deze kromme aan de dampzijde een gewoon verloop hebben, steeds blijvende bij grootere volumes dan die der lijn $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$. Maar aan de vloeistofzijde is de normale loop van de spinodale lijn sterk gewijzigd door de aanwezigheid der lijn $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$. Aan den linkerkant begint zij in het punt $\frac{dp}{dv} = 0$ van den eersten component, dan loopt zij naar kleinere volumes, tot dat de aanwezigheid van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ haar naar zeer kleine volumes terugdringt, en oorzaak is, dat de afstand tusschen de spinodale lijn en de lijn $\frac{dp}{dv} = 0$, abnormaal vergroot is. In de punten waarin $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dx\,dv} = 0$ elkander snijden, raakt de spinodale lijn aan de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$. Er zijn twee plooipunten aanwezig, n.l. het realiseerbare plooipunt bij zeer klein volume, en het verborgen plooipunt in de nabijheid van de punten 2 en 3. Dit verborgen plooipunt ligt in dit geval aan de linkerzijde in overeenstemming met de gedaante der $q$-lijnen. In fig. 17 is dit verborgen plooipunt aan de rechterzijde gelegen, en de loop der $q$-lijnen in de ruimte, waar $\frac{dp}{dv}$ positief is, is zoodanig dat er een $q$-lijn bestaat die

aan de spinodale rakend kan getrokken worden, en wel in het verborgen plooipunt. In fig. 17 hebben de $q$-lijnen in dat gebied de holle zijde gekeerd naar den 1[sten] component. In het nu te bespreken geval keeren zij de bolle zijde naar den 1[sten] component, en moet het verborgen plooipunt dan ook aan de andere zijde gelegen zijn, als punt waarin een $q$-lijn de spinodale lijn in het labiele gebied raakt. De geteekende $q$-lijn snijdt de spinodale lijn in 6 punten, en de $p$-lijn, als functie van $v$ gedacht, moet, als men deze $q$-lijn volgt, 3 maxima en 3 minima bezitten; een maximumwaarde in de punten 1, 3 en 5, een minimumwaarde in de punten 2, 4 en 6. In fig. 20

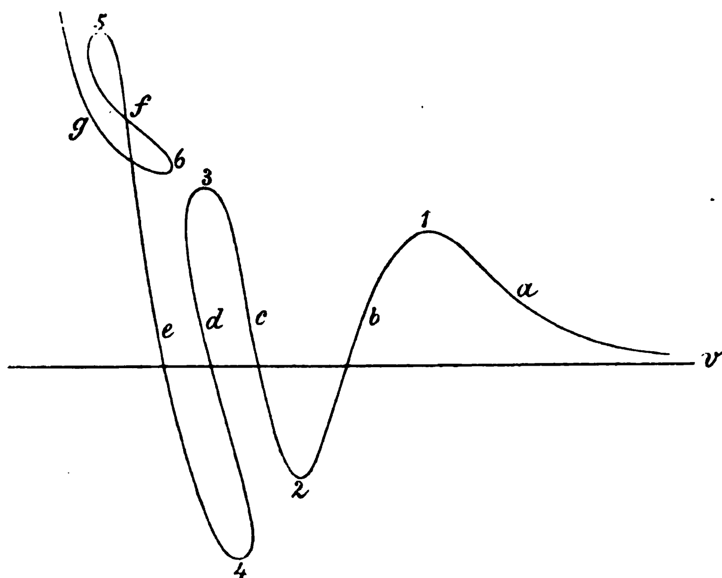



Fig. 20.

is deze $p$-lijn voorgesteld, en zijn de verschillende takken dezer lijn door de letters $a \ldots g$ aangeduid. De takken $d$ en $f$ gaan door het gebied waar $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ negatief is, en hebben elk dan ook twee punten, waar $\frac{dp}{dv} = \infty$ is. De complicatie welke de $p$-lijn in dit geval vertoont, vergeleken met de $p$-lijn van fig. 16, bestaat alleen daarin dat de tak $e$, welke vroeger rechtstreeks naar het oneindige liep, en steeds naar kleiner volume, nu een maximum in het punt 5 heeft bekomen en zoodra de $q$-lijn in het gebied loopt waar $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ negatief is, naar grootere volumes terugloopt. In het punt 6 is de minimumwaarde bereikt, welke echter grooter moet zijn dan de maximum-

waarde van den druk in het punt 3. Laten wij de waarde van $q$ dalen, dan naderen de punten 6 en 3 tot elkander, en voor de strik-$q$-lijn, welke door het snijpunt van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dx\,dv} = 0$ gaat, vallen zij samen. Dan snijden de takken $c$ en $d$ elkander onder een scherpen hoek, evenzoo de takken $f$ en $g$. Bij verdere daling van $q$, wanneer de $q$-lijn in twee gescheiden gedeelten vervallen is, vervalt ook de $p$-lijn in twee gescheiden gedeelten; dan is de tak $g$ de voortzetting van $c$, en de tak $d$ vindt dan zijn voortzetting in $f$. In fig. 21 is

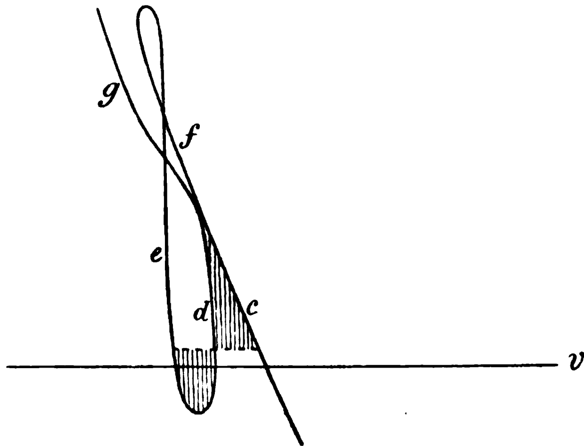



Fig. 21.

de gang van $p$ als functie van $v$ voor zulk een in twee gescheiden gedeelten uiteengevallen $q$-lijn voorgesteld; dan snijdt de tot één tak samengevloeide tak $c$, $g$, den tot één tak samengevloeiden tak $d$, $f$ en ook den tak $e$.

Bij de toepassing van den regel van MAXWELL voor de bepaling der binodale lijn ondervindt men dan eenige moeielijkheden, tot welker bespreking ik nu overga. Reeds als de $p$-lijn loopt zooals in fig. 20 door de takken $e$, $f$ en $g$ is voorgesteld, dus als de middelste van de 3 takken een uiterste snijdt, moet men bij de toepassing van den regel voor het trekken der lijn van MAXWELL behoorlijk op het teeken van de inhouden letten. Trekt men de rechte lijn lager dan het snijpunt van $e$ en $f$, dan is de inhoud beneden deze lijn, welke volgens den regel gelijk moet zijn aan den inhoud boven deze lijn, natuurlijk alles wat tusschen de takken $g$ en $f$ beneden deze lijn begrepen is. Maar de inhoud boven de lijn, welke uit 2 gedeelten bestaat, nl. de inhoud van de lus, en het gedeelte dat beneden het strikpunt boven de lijn ligt, moet niet als de som dezer 2 gedeelten

beschouwd worden. Het laatstgenoemde gedeelte moet wegens het teruglopen van den tak $f$ negatief genomen worden. Dit kan geacht worden uit zich zelf duidelijk genoeg te zijn om niet uitvoerig bewijs te eischen. Maar er doet zich als de $q$-lijn in twee gescheiden gedeelten uiteengevallen is, en als de $p$-lijn loopt, zooals in fig. 21 is voorgesteld, een andere moeielijkheid voor, welke wel eenigszins nadere beschouwing noodzakelijk maakt. De samengevloeide takken $c$ en $g$ vormen een kromme, welke wel de tot een lus-vormige lijn samen-geslagen takken $d$, $e$ en $f$ in twee punten snijdt, maar zulk een snijpunt moet inderdaad als twee ten eenenmale verschillende punten beschouwd worden. Zulk een snijpunt stelt geheel van elkander verschillende phasen voor al naar gelang men het beschouwt als punt van $c$, $g$ of van $d$, $e$, $f$. En zoo mag dan ook met het trekken der rechte lijn niet gehandeld worden, alsof het snijpunt van $c$ en $d$ of van $e$ en $g$ dezelfde phase voorstelde en trekt men de lijn zooals in fig. 21, waarbij de twee gearceerde inhouden gelijk zijn, dan zijn de punten aan de uiteinden dezer lijn geen punten van de binodale lijn. Om te zien hoe de rechte lijn in zulke gevallen getrokken moet worden gaan wij terug tot de algemeene vergelijking:

$$dM_1\mu_1 = vdp - xdq.$$

Nu kunnen wij om van het eene punt te komen tot het punt waarmede het coëxisteert niet meer eenzelfde $q$-lijn volgen, maar zullen wij gedeeltelijk een weg moeten volgen die de beide gescheiden takken der $q$-lijn vereenigt, en daarvoor kunnen wij kiezen de isobare van het snijpunt, dat de takken $c$, $g$ en $d$, $f$ gemeen hebben. Wij verkrijgen dan de vergelijking:

$$(M_1\mu_1)_c - (M_1\mu_1)_e = \int_e^c vdp - \int_e^c xdq,$$

waarbij in $\int vdp$ de waarde van $v$ genomen moet worden, zooals bij de gekozen waarde van $q$ behoort, en in $\int xdq$ de waarde van $x$ zooals op die $p$-lijn behoort, welke door het snijpunt gaat. Noemen wij de waarde van het volume van het snijpunt $v_s$ en de waarden van $x$, waarin de isobare van het snijpunt de beide takken der $q$-lijn snijdt $x_2$ en $x_1$. Bovenstaande vergelijking wordt dan de volgende:

$$(M_1\mu_1)_c - (M_1\mu_1)_e = \left[p\,(v_c - v_e) - \int_e^c pdv\right] - \left[q\,(x_2 - x_1) - \int_1^2 qdx\right].$$

Zal nu $(M_1\mu_1)_c = (M_1\mu_1)_e$ moeten zijn, dan is $p\,(v_c - v_e) - \int_e^c pdv$ niet gelijk 0, maar gelijk $q\,(x_2 - x_1) - \int_1^2 qdx$. Voor de strik-$q$-lijn is de lengte van de isobare, langs welke $\int xdq$ moet genomen worden gelijk 0, en vallen $x_2$ en $x_1$ samen. Voor een $q$-lijn van lageren graad zijn $x_2$ en $x_1$ verschillend. In bovenstaande vergelijking is gedacht dat uitgegaan wordt van tak $e$ en dat men een weg volgt noodig om tak $c$ te bereiken, Het punt vanwaar wij uitgaan ligt op den gesloten kring der $q$-lijn en in het stabiele gebied. Wij volgen nu den benedensten tak van dezen kring of den bovensten naar willekeur, maar afhankelijk van het paar coëxisteerende phasen dat men bepalen wil. Stel dat wij den benedensten weg volgen, dan komen wij op tak $d$, en ontmoeten dan het snijpnnt van de isobare welke wij volgen moeten om den anderen tak der $q$-lijn in een punt te ontmoeten dat gelijk volume $v_e$ heeft. Daar deze isobare loopen moet door de lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$, waar maximumvolume is, is de gelijkheid van de volumes $v_e$ mogelijk, [1]) maar de waarden van $x$, welke wij $x_2$ en $x_1$ hebben genoemd zijn verschillend en wel $x_2 < x_1$. Bij $x_1$ is de waarde van $q$ de gekozene en bij $x_2$ is de waarde van $q$ weder daaraan gelijk. Onderweg is deze waarde variabel. Nu is

$$\left(\frac{dq}{dx}\right)_p = \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dxdv}\frac{dv}{dx_p}$$

of

$$\left(\frac{dq}{dx}\right)_p = \frac{\frac{d^2\psi}{dx^2}\frac{d^2\psi}{dv^2} - \left(\frac{d^2\psi}{dx\,dv}\right)^2}{\frac{d^2\psi}{dv^2}}.$$

Daar $\frac{d^2\psi}{dv^2}$ (zie fig. 14) positief is, is $\left(\frac{dq}{dx}\right)_p$ positief buiten de spinodale lijn en negatief daarbinnen. Langs $p$-lijn is dus, van kleinere waarde van $x$ uitgaande, de waarde van $q$ toenemend,

---

[1]) Dezelfde opmerking geldt voor alle punten, die snijpunten zijn van verschillende takken der $p$-lijn in fig. 20 en fig. 21. In zulk een snijpunt is $p$ en $v$ gelijk, en dat kon alleen voorkomen als de phasen door zulk een snijpunt voorgesteld ter wederzijde liggen van de lijn $\frac{dp}{dx} = 0$.

maximaal op de spinodale lijn, dan afnemend, minimaal op de spinodale lijn, om dan weder voortdurend te stijgen, gelijk in fig. 22 is voorgesteld.

Nu moet:

$$p\,(v_c - v_e) - \int_e^c p\,dv = -\left\{ q\,(x_1 - x_2) - \int_2^1 q\,dx \right\}$$

of

$$\int_e^c p\,dv - p\,(v_c - v_e) = -\left\{ \int_2^1 q\,dx - q\,(x_1 - x_2) \right\}.$$

Voor de strik-$q$-lijn vallen $x_1$ en $x_2$ samen, en voor een $q$-lijn welke maar weinig lager is dan deze is $\int_2^1 q\,dx$ grooter dan $q\,(x_1 - x_2)$. Trouwens daar $x_1$ steeds links gelegen is van de waarde van $x$ waarvoor $q$ minimum-waarde heeft, geldt altijd $\int_2^1 q\,dx > q\,(x_1 - x_2)$. Daaruit volgt dat voor het benedenste paar coëxisteerende phasen van fig. 21 de rechte lijn zoo getrokken zou moeten zijn dat de inhoud van het gearceerde gedeelte boven deze lijn vermeerderd met den inhoud van het gearceerde gedeelte van fig. 22 gelijk is aan het gearceerde van fig 21, dat beneden deze lijn zou liggen. De druk van het onderste paar coëxisteerende phasen voor deze $q$-lijn is dus grooter dan uit de toepassing van den regel volgen zou als het snijpunt van $c, g$ en $d, f$ een identisch punt was, of liever een zelfde phase voorstelde. Maar wij zullen op dezen weg niet verder voortgaan. Nu wij toch genoodzaakt zijn de grootheid $\int x\,dq$ in onze beschouwing op te nemen, kunnen wij de coëxisteerende phasen voor de vloeistofvolumes met behulp van deze grootheid wel op eenvoudiger wijze vinden. Zulke volumes liggen toch op een $p$-lijn, welke zonder onderbreking kan gevolgd worden, als men zich van het eene punt van het paar coëxisteerende phasen naar het tweede punt zou heenbewegen. En als men zich langs een $p$-lijn beweegt is $d\,M_1\,\mu_1 = -x\,dq$, en dus $(M_1\,\mu_1)_2 - (M_1\,\mu_1)_1 = -\int_1^2 x\,dq$. Men behoeft dus op de gekozen $p$-lijn slechts 2 punten te kiezen, welke aan den eisch voldoen dat $-\int_1^2 x\,dq = 0$ is, of

$$q\,(x_2 - x_1) = \int_1^2 q\,dx.$$

Wij hebben dan op de $q$-lijn dezelfde constructie uit te voeren, welke hierboven op de $p$-lijn uitgevoerd werd, en dus voor de $p$-lijn, voor welke fig. 22 den loop der $q$-lijn zou voorstellen, een rechte lijn

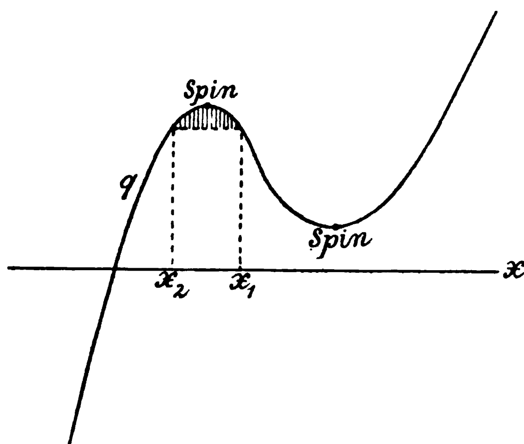



Fig. 22.

zoodanig te trekken dat de hoogte daarvan de middenwaarde is van de ordinaten der $q$-kromme. Dat wij dezen weg ter bepaling van de coëxisteerênde phasen, waarbij de waarden van $x_2$ en $x_1$ voor gegeven waarde van $p$ bepaald worden, niet van den beginne af gevolgd zijn, heeft zijn grond daarin, dat deze wijze van bepaling weder alleen zonder correctieterm mogelijk is als de geheele $p$-lijn tusschen de twee coëxisteerende phasen zonder onderbreking in het $v,x$-diagram aanwezig is; en daar voor het evenwicht tusschen damp- en vloeistofphasen deze voorwaarde in den regel niet vervuld is, en het slechts bij uitzondering voorkomt dat de $q$-lijn in twee takken is uiteengevallen, kan de bepaling van coëxisteerend evenwicht door den eerstgevolgden weg in den regel als mogelijk voorgesteld worden. Maar dit neemt niet weg, dat in sommige gevallen ook de bepaling door middel van de eigenschappen der waarde van $q$, een $p$-lijn volgende, te verkiezen is. Doen wij dit in het besproken geval voor de bepaling van de coëxistentie van een vloeistofphase met een tweede vloeistofphase, dan moeten wij telkens andere $p$-lijnen kiezen, en volgens elk dier $p$-lijnen is de gang van $q$ als functie van $x$ zooals in fig. 22 geteekend is; er is bij de eenvoudige gedaante van zulk een $q$-lijn slechts sprake van een enkele rechte lijn volgens welke $q_c\,(x_2 - x_1) = \int_1^2 q\,dx$. De binodale lijn voor de coëxistentie van

vloeistof met vloeistof heeft dus een eenvoudig verloop en beperkt zich tot het stabiele gebied.

Dit was ook wel reeds af te leiden uit de $p$-figuur (fig. 20), waar de takken $f$ en $g$ hooger liggen moeten dan de takken $c$ en $d$, en dus nimmer met elkander in combinatie kunnen treden ter toepassing van den regel voor coëxistentie; maar dan slechts voor die $q$-lijnen welke van hoogeren graad zijn dan de strik-$q$-lijn; terwijl de regel om de coëxistentievoorwaarden te vinden uit de waarden van $q$, als men een $p$-lijn volgt, voor alle $p$-waarden zonder uitzondering geldt. Denken wij het geval, dat dit gedeelte der plooi zich geheel als lengteplooi heeft afgesnoerd van de dwarsplooi, en de beide realiseerbare plooipunten bezit, dan is er een hoogste en een laagste $p$-lijn te trekken, volgens welke het maximum en het minimum in de $q$-lijn zijn samengevallen, en in het punt waar zij samenvallen de waarde van $x$ leveren voor de twee plooipunten.

Wij hadden vroeger reeds meermalen gelegenheid op wederkeerigheid te wijzen tusschen $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2}$ en tusschen $q$ en $p$ of $\frac{d\psi}{dx}$ en $\frac{d\psi}{dv}$. Doen wij dit ook in het besproken geval. Daarbij hebben wij snijding in twee punten van $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ en $\frac{d^2\psi}{dxdv}=0$, en bleek het dat er dan afgescheiden gedeelten van $q$-lijnen voorkomen, zoodat het niet altijd mogelijk was om zonder sprong van het eene gedeelte eener $q$-lijn op een ander gedeelte van zulk een lijn te komen. Dan is het ter bepaling van de coëxisteerende phasen wenschelijk niet zulk een $q$-lijn te volgen, maar integendeel een $p$-lijn langs te gaan en de bijbehoorende waarde van $q$ te bezigen. Het reciproque geval hebben wij bij de snijding van $\frac{d^2\psi}{dv^2}=0$ en $\frac{d^2\psi}{dvdx}=0$, in welk geval de $p$-lijnen loopen zooals in de middenstrook der algemeene $p$-figuur is aangewezen. Dan zijn er $p$-lijnen, en wel die van hoogeren rang dan de strik-$p$-lijn, welke in twee gescheiden gedeelten zijn uiteengevallen, en volgden wij ook dan een $p$-lijn, om door middel van de waarden van $q$ tot de coëxisteerende phasen te besluiten, dan zouden wij op dezelfde moeielijkheden stuiten, welke wij nu bij het volgen der $q$-lijn ontmoet hebben. Teekent men dan voor een $p$-lijn van lageren graad dan de strik-$p$-lijn de waarde van $q$, dan volgt uit

$$\left(\frac{dq}{dx}\right)_p=\frac{\frac{d^2\psi}{dx^2}\frac{d^2\psi}{dv^2}-\left(\frac{d^2\psi}{dxdv}\right)^2}{\frac{d^2\psi}{dv^2}},$$ in aanmerking nemende, dat zulk een

$p$-lijn 4 malen door de spinodale lijn gaat, in welk geval $\left(\frac{dq}{dx}\right)_p = 0$ is, en ook 4 malen door de lijn $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ gaat, in welk geval $\left(\frac{dq}{dx}\right)_p = \infty$ is, voor den gang van $q$ een loop, zooals in fig. 23 geteekend is, waarin de 1ste, 3de en 5de tak in het stabiele gebied, en de 2de en 4de tak in het labiele gebied liggen. Eerst voor de strik-$p$-lijn valt

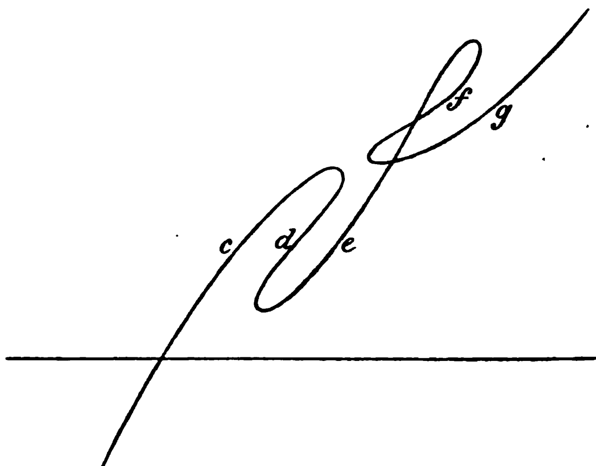



Fig. 23.

het tweede minimum samen met het eerste maximum, maar voor lagere $p$-lijnen ligt het zooals in de teekening hooger. Wij hebben volkomen dezelfde gedaante voor $q$ als functie van $x$, als in fig. 20 voor $p$ als functie van $v$. Alleen moet de eene figuur omgeslagen worden om de andere te kunnen bedekken, in overeenstemming met de omstandigheid dat $q = \frac{d\psi}{dx}$ is en $p = -\frac{d\psi}{dv}$. De combinatie $c$, $d$ en $e$ levert nu een paar coëxisteerende phasen, en de combinatie $e$, $f$ en $g$ een tweede paar. Geen andere combinaties zijn mogelijk; en wij zouden recht hebben te besluiten dat de binodale lijn een eenvoudig beloop heeft en beperkt blijft tot het stabiele gebied. Maar dit besluit zou dan toch alleen maar met zekerheid gelden voor alle drukkingen niet hooger dan die der strik-$p$-lijn, terwijl er toch ook coëxisteerende phasen zijn met grooter waarde van $p$. In dat geval is het zeker te verkiezen een $q$-lijn te volgen en $p$ als functie van $v$ te construeeren, wat wij dan ook reeds hierboven om andere redenen verkieselijk hebben genoemd. Wij weten dat er dan voor de coëxisteerende phasen een grootste drukking bestaat, en wel als $x_1 = x_2$ is; dit is alleen mogelijk als de gekozen $q$-lijn door de lijn

$\frac{dp}{dx} = 0$ gaat, want dan alleen is voor waarden van $x$ binnen zekere grenzen dit het geval. Uit deze omstandigheid van het reciproque geval besluiten wij dat in het geval, dat wij nu beschouwen, waarbij $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ door $\frac{dp}{dx} = 0$ gesneden wordt, er een minimumwaarde van $q$ voor de coëxisteerende phasen bestaat, en wel als $v_2 = v_1$ is. Dan loopt de lijn welke deze phasen verbindt evenwijdig aan de $x$-as, gelijk zij in het reciproque geval evenwijdig aan de $v$-as loopt. Ook dit kan slechts plaats grijpen, als de coëxisteerende phasen ter weder-zijde van de lijn $\frac{dp}{dx} = 0$ liggen; de isobare, die door de twee punten van coëxistentie gaat, kan toch alleen twee gelijke waarden van $v$ hebben als daartusschen maximum- of minimumwaarde voor het volume voorkomt. De gelijkheid van $v_1$ en $v_2$ voor minimumwaarde van $q$, tot welke wij uit het beginsel van reciprociteit hebben besloten, volgt uit de eenvoudige vergelijking, welke voor twee opvolgende punten van een binodale geldt, n.l.:

$$(v_2 - v_1)\, dp = (x_2 - x_1)\, dq.$$

Voor een paar coëxisteerende phasen is $M_1\mu_1$ gelijk, en voor een volgende tweede paar van zulke phasen is ook $dM_1\mu_1$ gelijk; maar uit $dM_1\mu_1 = v_1 dp - x_1 dq = v_2 dp - x_2 dq$ volgt bovenstaande vergelijking. Is $x_2 - x_1 = 0$ en $v_2 - v_1$ verschillend van nul, dan moet $dp = 0$ zijn; evenzoo eischt $dq = 0$, als $dp$ niet gelijk 0 is, de gelijkheid van $v_2$ en $v_1$. Wij kunnen ook uit deze vergelijking afleiden, hoe de nodelijnen ter wederzijde van de bijzondere nodelijn waarbij of $x_2 = x_1$ is of $v_2 = v_1$, liggen, d.w.z. naar welke zijde zij waaiervormig uiteengaan. Nemen wij eerst het geval $x_2 = x_1$, dus maximumdruk op de damp-vloeistofbinodale. Links van deze nodelijn is aan de dampzijde het teeken van $v_2 - v_1$ positief, en het teeken van $dp$, als wij ons niet tot een oneindig kleine waarde van $dp$ beperken, negatief. Dan moet ook het teeken van $(x_2 - x_1)\, dq$ negatief zijn — en daar het teeken van $dq$ dan negatief is, moet $x_2 - x_1$ positief zijn. Rechts van deze nodelijn is het teeken van $v_2 - v_1$ en van $dp$ gelijk aan wat het in het vorige geval was; maar daar $dq$ nu positief is, is $x_2 - x_1$ negatief. De nodelijnen convergeeren dus naar de dampzijde toe. Juist andersom zou het zijn als de druk minimaal was voor $x_2 = x_1$, want dan is $dp$ positief. Nemen wij nu het geval $v_2 = v_1$, dus minimumwaarde van $q$ op de vloeistof-vloeistofbinodale. Kiezen wij de zijde rechts, dus waar $x_2 > x_1$ is, en gaan wij naar boven, dus stellen wij $dp$ positief, dan zal daar $q$ minimaal was, $dq$ positief zijn. Het tweede lid is positief en dus vinden wij $v_2 - v_1$ positief,

terwijl bij negatieve $dp$ de waarde van $v_2 - v_1$ negatief zou zijn. De nodelijnen convergeeren dus naar de rechterzijde, terwijl wij de nodelijn, waarvoor $v_2 = v_1$ is, als as van zulk een convergeerenden bundel kunnen beschouwen. Te gelijkertijd toont ons dit hoe en waar de plooipunten moeten gelegen zijn. Daar de raaklijn aan de binodale in het plooipunt als de limietrichting der nodelijnen te beschouwen is, moeten dus in het bovenste plooipunt zoowel de $p$-lijn als de $q$-lijn zoo loopen dat zij naar rechts gaande dalen, wat trouwens à priori kon gesteld worden. Elke $q$-lijn toch als zij nog boven de lijn $\frac{dp}{dx} = 0$ ligt en niet door $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ gaat, daalt als zij zich rechts beweegt. Maar in het benedenste plooipunt, d.w.z. in het plooipunt met het grootste volume, dat beneden de lijn $\frac{dp}{dx} = 0$ ligt, moet in overeenstemming met den loop der nodelijnen, de $q$-lijn welke in dat plooipunt raakt, dalen als zij zich naar kleinere waarde van $x$ beweegt. Wij zouden evenzeer bevestiging van dezen loop der nodelijnen gevonden hebben als wij op den loop der $p$-lijnen gelet hadden.

Aan alles wat wij in deze V^de^ mededeeling besproken hebben is fig. 14 ten grondslag gelegd; dus hebben wij gedacht dat $\frac{dp}{dx} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ elkander snijden. De mogelijkheid bestaat echter ook, en zelfs zal dit regel zijn, dat de beide krommen aanwezig zijn, maar elkander niet snijden. Er zijn dan twee gevallen te onderscheiden, n.l. dat $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ beperkt blijft tot kleinere volumes dan die van $\frac{dp}{dx} = 0$, of tot grootere. [1]) Bij het teekenen van de twee krommen ten opzichte van elkander moet dan in acht genomen worden dat de punten, waarin aan $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ raaklijnen evenwijdig aan de $v$-as getrokken kunnen worden, liggen op de lijn $\frac{d^2p}{dx^2} = 0$ en dat het punt waarin $\frac{dp}{dx} = 0$ minimumvolume bezit eveneens op deze lijn ligt. Nu heeft de lijn $\frac{dp^2}{dx^2} = 0$ een eenvoudig beloop. De waarde van $\frac{dv}{dx}$ voor deze lijn is gelijk aan $\frac{db}{dx}\frac{3}{1+2\frac{b}{v}}$. Hieruit volgt dat deze lijn $\frac{d^2p}{dx^2} = 0$

[1]) Zie Verslag 26 April 1907, bladz. 923 enz.

uit een enkelen tak bestaat, welke van een punt van de 1ste as zich regelmatig naar rechts beweegt telkens naar punten van grooter volume. Snijdt dus de lijn $\frac{dp}{dx} = 0$ de lijn $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, dan moeten de 2 punten, waarin aan $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ raaklijnen evenwijdig aan de $v$-as getrokken kunnen worden, en het punt waar $\frac{dp}{dx} = 0$ minimum-volume heeft, zoodanig liggen, dat het laatste punt tusschen de twee eerstgenoemde inligt. Is de lijn $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ beperkt tot kleinere volumes dan $\frac{dp}{dx} = 0$, dan moet $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ ook bij kleinere $x$ liggen dan het punt waar $\frac{dp}{dx} = 0$ het kleinste volume heeft, en omgekeerd; dit is

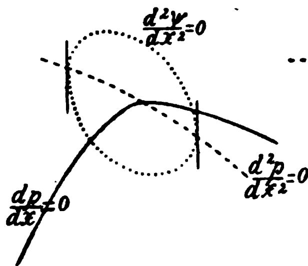



Fig. 24$a$

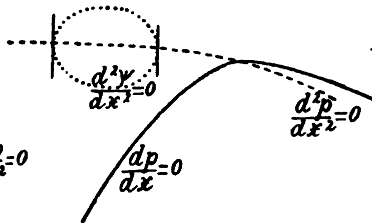



Fig. 24$b$

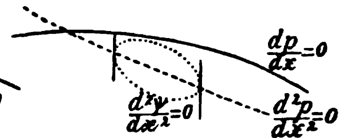



Fig. 24$c$

in fig. 24$a$, fig. 24$b$ en fig. 24$c$ voorgesteld; maar is in de vroegere schematische figuren die voor het voorstellen van andere bijzonderheden ontworpen waren niet altijd in het oog gehouden.

Na deze opmerkingen kunnen wij meer in bijzonderheden nagaan wat er gebeurt als $\left(\frac{dp}{dx}\right) = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ elkander snijden en de temperatuur verhoogd wordt. Bij verhooging van $T$ trekt $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ samen naar het punt waarin deze kromme verdwijnen moet. Ook de kromme $\frac{dp}{dx} = 0$ trekt samen. Ligt nu het punt waarin $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ verdwijnen moet bij kleiner volume dan $\frac{dp}{dv} = 0$, dan zal bij het samentrekken van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, het rechts gelegen punt, waar zij // $v$-as

gericht is, door het minimumvolume van $\frac{dp}{dx}=0$ moeten gaan. Ook dan is er nog snijding, maar bij verder samentrekken zullen de twee krommen elkander raken en elkander loslaten. Boven de temperatuur, waarbij zij elkander raken, is de gecompliceerde loop der $q$-lijnen verdwenen, in zooverre dat er geen $q$-lijnen meer voorkomen, die in twee gescheiden takken uiteengevallen zijn; dan loopen een groep van $q$-lijnen, zooals in fig. 3 Verslag 30 Maart 1907 geteekend is met een maximum- en een minimumvolume, maar bovendien als zij later $\frac{dp}{dx}=0$ snijden met een maximumwaarde van $x$. Maar als het punt, waarin $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ verdwijnen moet, bij grooter volume ligt dan $\frac{dp}{dx}=0$, dan zal bij verhooging van $T$ het linksgelegen punt, waar $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ evenwijdig aan de $v$-as gericht is, door het punt gaan waar $\frac{dp}{dx}=0$ minimumvolume heeft. Ook dan is er nog snijding, maar bij verdere verhooging van $T$ komt er raken en loslaten — en dan loopen de $q$-lijnen zooals in fig. 5 geteekend is. Er kan dus tweeërlei raking zijn van $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ en $\frac{d^2\psi}{dx\,dv}=0$, en daartoe kan ook reeds besloten worden uit de voorwaarde voor raking. Uit de gelijkheid van $\frac{dv}{dx}$ voor beide krommen volgt n.l.:

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2}\frac{d^2p}{dx\,dv}=\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)^2.$$

En daar voor de punten van $\frac{dp}{dx}=0$ de waarde van $\frac{d^2p}{dxdv}$ negatief is, moet bij de raking $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ positief zijn. Dat wil zeggen, dat voor de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ het raakpunt rechts moet liggen van de lijn die minimum- en maximumvolume vereenigt. Alleen bij de tweeërlei raking welke wij beschreven hebben kan deze voorwaarde vervuld zijn. Heeft de eerst beschreven raking plaats, dan moet het minimumvolume van $\frac{dp}{dx}=0$ rechts liggen van het raakpunt. Bij het tweede

geval van raking moet dat punt links liggen, of zelfs geheel in de figuur ontbreken, in welk geval de lijn $\frac{dp}{dx}=0$ in alle punten $\frac{dv}{dx}$ positief heeft.

Uit dit alles volgt dat als de spinodale lijn de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ in een gesloten figuur geheel omgeeft en deze geheel tot kleiner volume beperkt blijft dan de volumes van $\frac{dp}{dx}=0$, er nog wel twee realiseerbare plooipunten op deze spinodale lijn aanwezig zijn, maar dat in deze geheele lengteplooi de nodelijnen loopen zooals in de bovenhelft van de hier boven besproken lengteplooi het geval was — zoodat dan ook in beide plooipunten de rakende $p$-lijn en de rakende $q$-lijn naar rechts dalen. Voor deze geheele lengteplooi is dan als $v_2$ het rechtsgelegen punt van coëxistentie voorstelt $v_2 > v_1$. Maar blijft $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ beperkt tot volumes grooter dan die van $\frac{dp}{dx}=0$, dan loopen de nodelijnen zóó dat $v_2 < v_1$, en ligt het plooipunt zoodanig dat voor de $p$- en de $q$-lijn, welke door het plooipunt gaat, $\frac{dv}{dx_p}$ en $\frac{dv}{dx_q}$ negatief is. Ik spreek hier van het plooipunt, omdat ik meen te kunnen aantoonen dat er dan niet van twee realiseerbare plooipunten en dus ook niet van een afgesnoerde lengteplooi sprake kan zijn. Immers als een spinodale lijn zich splitst, is in dat splitsingspunt niet alleen $\frac{dv}{dx_p}=\frac{dv}{dx_q}$, maar ook $\frac{d^2v}{dx^2_p}=\frac{d^2v}{dx^2_q}=0$. Eigenlijk heb ik (Verslag 26 April 1907 pag. 938) dit punt reeds besproken, maar wegens het groote belang van deze kwestie is misschien nadere verduidelijking niet overbodig. Daartoe diene het volgende.

Denken wij in de eerste plaats een mengsel, voorgesteld door een rechtsgelegen strook van de algemeene $p$-figuur, en wel zoo ver rechts dat het punt, waar $\frac{dp}{dx}=0$ minimumvolume heeft, niet meer aanwezig is, of bij zeer kleine waarde van $x$ ligt. Dan ligt het punt waar $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ bij $T=T_g$ verdwijnt, omdat het op de lijn $\frac{d^2p}{dx^2}=0$ moet liggen, bij kleiner volume dan dat der lijn $\frac{dp}{dx}=0$; en is dan bij temperaturen beneden $T_g$ deze kromme nog aanwezig, dan liggen

de punten waarin deze kromme de lijn $\frac{dp}{dv}=0$ snijdt, in het gebied waar $\frac{dp}{dx}$ negatief is. Stellen wij nu dat de temperatuur stijgt, en dat de spinodale lijn zich zou kunnen splitsen, dan zal dat splitsingspunt moeten liggen tusschen de grootere volumes van $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ en de volumes van $\frac{dp}{dv}=0$, dus ook in het gebied waarin $\frac{dp}{dx}$ negatief is. De vraag is nu of in dat gebied een buigpunt van de $p$-lijnen en van de $q$-lijnen liggen kan. Uit hetgeen over de plaats dezer buigpunten is opgemerkt (Verslag 30 Maart 1907 pag. 833) blijkt dat dit voor de $q$-lijnen mogelijk is. Maar uit hetgeen over den loop der buigpunten van de $p$-lijnen is opgemerkt (Verslag 23 Febr. 1907 pag. 693 enz.) blijkt dat in het stabiele gedeelte van dat gebied geen buigpunt voor deze lijnen kan voorkomen.

Nemen wij nu het andere geval, nl. dat het punt met minimumvolume van $\frac{dp}{dx}=0$ aanwezig is en zich niet bevindt bij zeer kleine waarde van $x$. Heeft de spinodale zich in twee deelen gesplitst, dan is er een gedeelte dat wij zouden kunnen beschouwen, als te behooren bij $\frac{dp}{dv}=0$, en een ander gedeelte dat $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ omringt. Het splitsingspunt ligt nu, ten minste als $\frac{dp}{dx}=0$ de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ nog snijdt, weder in het gebied waar $\frac{dp}{dx}$ negatief is, maar in een gedeelte van dat gebied waar zoowel buigpunten van de $p$-lijnen als van de $q$-lijnen kunnen voorkomen. Er gaan van uit het punt, waarin $\frac{dp}{dx}=0$ de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ snijdt twee takken uit, waarop $\frac{d^2v}{dx^2_q}=0$ is. Een dezer takken loopt door het gebied waarin $\frac{d^2\psi}{dv^2}$ negatief is en verlaat dat gebied eerst in het punt, waarin $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ het maximumvolume bezit. De tweede tak loopt rechts van de strik-$q$-lijn naar grootere volumes. Maar ook is er een meetkundige plaats, waarop $\frac{d^2v}{dx^2_p}=0$ is, welke rechts van $\frac{dp}{dx}=0$ loopt en door de twee volgende punten gaat. 1° het punt waar $\frac{dp}{dx}=0$ minimumvolume heeft, en

2° het punt waar $\frac{dp}{dx}=0$ de lijn $\frac{dp}{dv}=0$ snijdt. Splitst zich de spinodale dan zal dat moeten geschieden in het snijpunt van de lijn, waarop $\frac{d^2v}{dx^2}_p=0$ is, met den in de tweede plaats genoemden tak, waarop $\frac{d^2v}{dx^2}_q=0$ is. Komt dat geval van splitsing voor, dan wordt de afgesnoerde lengteplooi door de lijn $\frac{dp}{dx}=0$ gesneden, en heeft deze plooi de hierboven besproken plooipunten.

Maar al ontmoeten wij bij de onderstelling van deze wijze van splitsing geen bepaalde tegenspraak, toch is er ééne omstandigheid, die mij doet betwijfelen of zij veelvuldig of algemeen zal voorkomen. Teekent men het snijpunt der genoemde meetkundige plaatsen, waarop $\frac{d^2v}{dx^2}_p=0$ en $\frac{d^2v}{dx^2}_q=0$ is, dan vindt men een punt dat zich aan de linkerzijde van $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ bevindt, terwijl men, na de afsnoering, de plaats van het plooipunt met het grootste volume, volgens den loop der nodelijnen, eerder aan de rechterzijde van $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ zou verwachten. Er is dan ook nog een andere wijze van afsnoering mogelijk. De splitsing kan geschieden in een punt links van $\frac{dp}{dx}=0$. Dan moet $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$, welke kromme verdwijnen moet in een punt van $\frac{d^2p}{dx^2}=0$ zich reeds zoo ver hebben samengetrokken, dat zij geheel ligt in het gebied waar $\frac{dp}{dx}$ positief is. Ook daar loopt, zooals wij vroeger hebben opgemerkt, een tak waarop $\frac{d^2v}{dx^2}_p=0$ is, en moet er voor de striklijn, waarop $\frac{d^2v}{dx^2}=0$ is, (Verslag 30 Maart 1907 p. 833) een kringvormige figuur zijn, die van den tak rechts van $\frac{dp}{dx}=0$ zich heeft losgemaakt omdat het strikpunt, het punt waarin $\frac{dp}{dx}=0$ en $\frac{d^2\psi}{dx_2}=0$, niet meer bestaat. Dan hebben wij wel weder een afge-

snoerde lengteplooi, maar die niet gesneden wordt door $\frac{dp}{dx} = 0$, en die twee plooipunten heeft, waarin de $p$- en $q$-lijnen welke raken, in overeenstemming met den loop der nodelijnen, $\frac{dv}{dx_p} = \frac{dv}{dx_q} =$ positief hebben. In fig. 25 zijn de omstandigheden na de splitsing voor dit geval voorgesteld. Vooreerst komt in de figuur voor de lijn $\frac{dp}{dx} = 0$

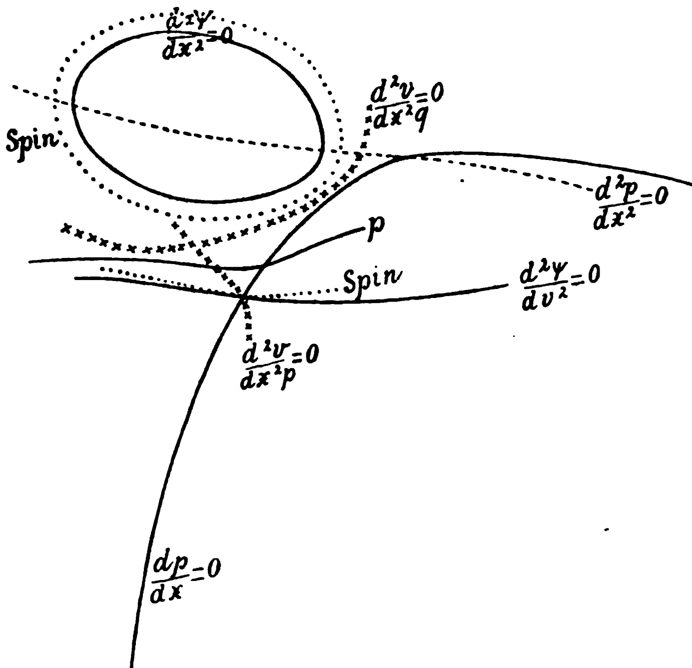



Fig. 25.

en $\frac{dp}{dv} = 0$; verder is geteekend $\frac{d^2p}{dx^2} = 0$, welke door het punt gaat waar $\frac{dp}{dx} = 0$ minimumvolume heeft. Links van $\frac{dp}{dx} = 0$ en bij kleinere volumes is ook geteekend $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$. Waar deze kromme door $\frac{d^2p}{dx^2} = 0$ gaat heeft zij raaklijnen // $v$-as. De spinodale lijn heeft zich gesplitst en de twee deelen zijn, ten behoeve van duidelijk overzicht, ver van elkander geteekend. Het eene deel omgeeft $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, en het andere deel raakt aan $\frac{dp}{dv} = 0$, in het punt waarin deze kromme door $\frac{dp}{dx} = 0$ gesneden wordt. Verder is geteekend een $p$-lijn met twee buigpunten.

Het rechtsgelegen buigpunt is voor ons geval van geen belang. En eindelijk is de afgesnoerde tak van de meetkundige plaats van de buigpunten der $q$-lijnen geteekend. Ook nu is het punt waarin $\frac{d^2v}{dx^2}_p = 0$ en $\frac{d^2v}{dx^2}_q = 0$ elkander snijden aan de linkerzijde van de spinodale, welke zich afgesnoerd heeft, te verwachten. Maar voor dit geval is voor alle nodelijnen van de lengteplooi $v_2 > v_1$ en is het tweede plooipunt ook inderdaad links te verwachten. Ik heb een vermoeden dat deze tweeërlei wijze van afsnoering samenhangt met de tweeërlei reeks van waarden van $x_q$, voor welke $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ verdwijnt in het gebied waar $\frac{dp}{dx}$ positief is (Verslag 26 April 1907 pag. 923) — òf voor zeer ongelijke molekuulgrootte der componenten, òf voor weinig verschillende molekuulgrootte. In het laatste geval zijn de hoogste en de laagste punten van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ bijna bij dezelfde waarde van $x$ te vinden. Maar dit is een van de vele bijzonderheden welke aan nader onderzoek moeten worden overgelaten.

Vooral de laatst beschreven wijze van splitsing der spinodale lijn geschiedt vèr links van het punt waar $\frac{dp}{dx} = 0$ minimumvolume heeft en dus bij een waarde van $x_1$ niet veel verschillend van die, waarvoor op de dampbinodale $x_2 = x_1$ is en maximumdruk aanwezig is; en dit voert dus tot de meening dat deze afsnoering van een lengteplooi te zoeken is bij mengsels met minimumdruk en zeer ongelijke molekuulgrootte; ook dit vermoeden moet nog door nader onderzoek scherper gepreciseerd worden.

Tot geheele kenschetsing van den loop der spinodale lijn vóór en na de splitsing nog het volgende. Vóór de splitsing denke men de lijn $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ elkander snijdende, zooals in fig. 8 (verslag 30 Maart 1907 p. 840), maar de lijn $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ naar kleinere volumes bewogen. Deze figuur geldt wel voor een linksgelegen strook der $p$-figuur, maar deze figuur zou weinig in haar wezenlijke trekken veranderen als wij er ook de lijn $\frac{dp}{dx} = 0$ in opnemen, maar deze rechts plaatsen, zóó dat $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ niet meer door haar gesneden wordt. Een naar rechts verbreede strook van den linkerkant valt toch samen

met een naar links verbreede strook van den rechterkant. Snijden $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ elkander dan is er een samengestelde plooi, met het verborgen plooipunt aan den rechterkant. Gaan nu bij verhooging der temperatuur beide krommen uit elkander, wijl zij beide inkrimpen, dan is er nog niet dadelijk splitsing der spinodale lijn. Om dit tot stand te brengen moeten zij tamelijk ver van elkander verwijderd zijn, en moet tusschen beide krommen snijding van $\frac{d^2v}{dx^2_p} = 0$ en $\frac{d^2v}{dx^2_q} = 0$ aanwezig zijn, en moet de temperatuur bereikt zijn, waarop dat snijpunt op de spinodale lijn ligt. Dan valt een punt van den linkerkant van de spinodale lijn met een punt van den rechterkant dezer lijn samen, maar niet in het verborgen plooipunt. Men kan hierbij ook fig. 17 (Verslag 24 Mei 1907 pag. 24) raadplegen. Er zijn dan 4 plooipunten aanwezig en wel $P_1$, $P_2$ en het dubbelplooipunt in het splitsingspunt der spinodale lijn. De loop der binodale lijn aan den vloeistofkant wordt voorgesteld in fig. 26.

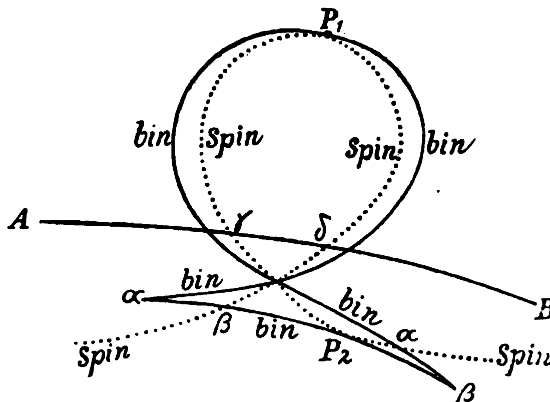



Fig. 26.

Aan den vloeistofkant gaat de binodale lijn van de dampvloeistofevenwichten nog in twee punten $\gamma$ en $\delta$ door de spinodale lijn. En dus blijkt van het zich afsnoeren van de lengteplooi nog niets voor het experiment. Eerst bij hoogere temperatuur zal de afgesnoerde binodale lijn, en dan met haar nieuw verkregen plooipunt, door de binodale lijn $AB$ gaan, en bij nog hoogere waarde van $T$ is de binodale lijn in twee geheel van elkander gescheiden takken gesplitst.

*(Wordt vervolgd).*

**Natuurkunde.** — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. N°. 99[a] uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden, H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: „*Isothermen van twee-atomige gassen en hunne binaire mengsels.* VI. *Isothermen van waterstof tusschen* — 104° C. *en* — 217° C." (Vervolg).

§ 14. *Overzicht der bepalingen.*

De bepalingen in deze Mededeeling vermeld, vormen een geheel met die van Mededeeling N°. 97[a]. Zij kunnen ten deele dienen om de vroegere bepalingen bij — 104° en — 136°, die als zijnde de oudste waarnemingen een geringere betrouwbaarheid bezitten dan de overige, te controleeren. Voor de isotherme-bepalingen bij lagere temperaturen zijn ze een gewenschte aanvulling voor de kleinere dichtheden van 70 tot 100 maal de normale. Met uitzondering van de isotherme van — 217° kunnen de nu medegedeelde bepalingen ook als een op zichzelf staand geheel worden beschouwd. Om dit af te ronden ontbreekt bij deze laatste nog een gedeelte voor de dichtheid van ongeveer 170 maal de normale. De aanvullende bepalingen, die hierop betrekking hebben, hopen wij spoedig mede te deelen. Aan de standaard-temperaturen bij welke wij de isothermen bepaalden hebben wij nog toegevoegd — 164° C. Uit de in Med. N°. 97[a] vermelde gegevens kan worden afgeleid (zie § 13 van genoemde Mededeeling), dat het punt waar de helling der *pv*-lijnen voor uiterst geringe dichtheden gelijk aan nul wordt, ongeveer bij deze temperatuur is gelegen. De bedoeling van de bepalingen bij — 164° is dit punt, dat we het BOYLE-*punt* zullen noemen, nader vast te stellen.

De bepalingen geschiedden, met uitzondering van die bij — 140° bij temperaturen, die weinig van de standaard-temperaturen van Med. N°. 97[a] afwijken. Zij zijn door een eenvoudige correctie tot deze standaardtemperaturen terug te brengen. (Zie Med. 97[a] § 6). Voor de hieronder medegedeelde isothermen is deze reductie nog niet uitgevoerd. Men vindt in Tabel XVI de temperaturen waarbij de metingen plaats hadden. Zij zijn op volkomen dezelfde wijze vastgesteld als die van Med. N°. 97[a], ook moet de correctie van Tabel XVIII Med. 97[b] even als aan deze laatste nog worden aangebracht.

Omtrent de drukmeting kan nog worden opgemerkt, (verg. § 3), dat voor de laagste drukken een directe aansluiting met den open manometer noodig was, daar de gesloten hulp-manometer niet beneden 20 atm. is te gebruiken.

§ 15. *Opmerkingen omtrent de manometers en de piëzometers.* Na afloop der bepalingen werd de hulp-manometer opnieuw met den open standaard-manometer vergeleken. Het bleek, dat het normaalvolume opnieuw een geringe vermindering had ondergaan en wel van 0.00026 van de oorspronkelijke waarde. Deze vergelijking werd uitgevoerd bij ongeveer 22, 28 en 55 atmosferen. Voert men de drukberekeningen uit met het gecorrigeerde normaalvolume, dan zijn de overblijvende verschillen tusschen de aanwijzingen van den open- en den gesloten manometer kleiner dan $\frac{1}{10000}$ van den totalen druk.

Het stalen overpijpje met zeskant op de steel van den piëzometer $b_4$ (verg. fig. 2 Pl. II Med. N°. 69, het detail boven aan de buis kan ontleend worden aan fig. 4 ibid $f_1$, $f_2$, $f_4$) was op de wijze van Med. N°. 94$^b$ aan de glazen steel $b_5$ gesoldeerd. De pakking kon nu steviger worden aangedrukt (verg. § 4 Med. N°. 97$^a$) zonder gevaar te loopen, dat het blokje van de steel afschoof.

De afmetingen van de verschillende deelen van den piëzometer waren ongeveer dezelfde als bij de bepalingen van Serie I van Med. N°. 97$^a$. De glazen steel had een grootere lengte en een volume van ongeveer 12 cm$^3$. waardoor een grooter gedeelte der isothermen kon worden bepaald dan in serie I mogelijk was. Het reservoir bezat het iets geringere volume van 5.1583 cm$^3$.

§ 16. *Tweede groep van waarden van $pv_A$.* In onderstaande Tabel (p. 164), zijn overeenkomstig Tabel XII van Med. 97$^a$ de resulaten der bepalingen weergegeven.

Ten slotte betuigen wij onzen hartelijken dank aan den Heer J. Clay voor zijne hulp bij dit onderzoek.

TABEL XVI. $H_2$. Serie IV. Waarden van $pv_A$.

| N°. | $t$ | $p$ | $pv_A$ | $d_A$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | —103°.71 | 28.423 | 0.63208 | 44.967 |
| 2 | | 38.154 | 0.63648 | 59.944 |
| 3 | | 48.682 | 0.64143 | 75.897 |
| 4 | | 58.317 | 0.64638 | 90.222 |
| 5 | —139°.88 | 25.432 | 0.49452 | 51.428 |
| 6 | | 33.774 | 0.49697 | 67.960 |
| 7 | | 41.273 | 0.49967 | 82.600 |
| 8 | | 48.558 | 0.50232 | 96.667 |
| 9 | | 25.380 | 0.49466 | 51.308 |
| 10 | —164°.04 | 22.818 | 0.40065 | 56.952 |
| 11 | | 28.688 | 0.40164 | 71.427 |
| 12 | | 34.387 | 0.40253 | 85.427 |
| 13 | | 39.947 | 0.40276 | 98.936 |
| 14 | —183°.18 | 20.409 | 0.32562 | 62.677 |
| 15 | | 24.705 | 0.32550 | 75.898 |
| 16 | | 28.374 | 0.32521 | 87.248 |
| 17 | | 32.416 | 0.32522 | 99.673 |
| 18 | | 20.400 | 0.32557 | 62.663 |
| 19 | —195°.17 | 18.554 | 0.27867 | 66.581 |
| 20 | | 23.337 | 0.27765 | 84.[illegible]55 |
| 21 | | 27.879 | 0.27622 | 100.933 |
| 22 | —204°.69 | 16.752 | 0.24040 | 69.684 |
| 23 | | 20.456 | 0.23880 | 85.658 |
| 24 | | 24.019 | 0.23695 | 101.367 |
| 25 | —212°.82 | 15.416 | 0.20644 | 74.679 |
| 26 | | 18.038 | 0.20430 | 88.296 |
| 27 | | 20.643 | 0.20228 | 102.051 |
| 28 | —217°.40 | 14.638 | 0.18742 | 78.103 |
| 29 | | 16.787 | 0.18495 | 90.766 |
| 30 | | 18.857 | 0.18293 | 103.080 |

**Natuurkunde.** — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N°. 99$^b$, uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: H. KAMERLINGH ONNES en J. CLAY: „*Over de meting van zeer lage temperaturen. XIV. Calibratie van eenige platinaweerstandsthermometers.*"

§ 1. *Inleiding.* Het voor vele jaren (zie Med. N°. 77 § 1 Zittingsverslag Febr. 1902) te Leiden aangevangen onderzoek omtrent de verandering van den weerstand van metalen (zuivere en zulke met bekende bijmengselen) omvat behalve het bepalen van den galvanischen weerstand van geleiders vervaardigd uit de verschillende metalen ook de bepaling van de uitzetting voor elk dier metalen. Met het laatste deel van dit onderzoek zijn wij nog slechts weinig gevorderd, de uitzetting is alleen nog voor het als standaard metaal gekozen platina en dan nog slechts tot — 182° onderzocht. [1]) Wij hopen eerlang eene Mededeeling over de uitzetting tot — 252° C. te kunnen doen. Voor 't oogenblik is echter de kennis van die uitzetting voor het onderzoek van de verandering van den soortelijken weerstand met de temperatuur nog niet van groot belang. Wanneer wij met dit onderzoek tot zeer lage temperaturen afdalen, wordt de correctie voor de uitzetting zoo klein in verhouding tot de storing door andere invloeden, die nog nader moeten worden onderzocht, dat wij haar voorloopig buiten rekening mogen laten. [2])

Het onderzoek komt dan neer op het calibreeren van verschillende weerstandsthermometers. Daar de draden over welke deze Mededeeling handelt, voor ons voornamelijk als weerstandsthermometers van belang waren, hebben wij de calibratie er van in deze Serie opgenomen.

§ 2. *Bijzonderheden over de vergelijking en over de onderzochte draden.* Bij deze calibraties hebben wij den platinadraad, die in Med. No. 95$^c$ (24 Versl. Juni '06) met den waterstofthermometer werd

[1]) In Med. N°. 85 (Zittingsversl. Juni 1903) werd het eerst bemerkt dat om de uitzetting van glas van — 180° tot 0° voor te stellen een tweede graads formule met andere constanten dan voor 0° tot + 100° noodig was. Wij vonden dit in Med. N°. 95$^b$ (Zittingsversl. Juni '06) bevestigd en ook van toepassing op platina, voor hetwelk een derde graads formule, gelijk wij er eene voor het glas gaven, tusschen — 180° en + 100° noodig bleek. Later (Dec. '07) heeft SCHEEL, die eerst (Zeitschr. f. Instr.k. April '06) van meening was dat een tweedegraads formule voor platina tusschen — 190° en + 100° kon worden gevonden, zich bij onze opvatting aangesloten en voor platina de drie constanten gegeven. Onze door SCHEEL aangehaalde formule van den tweeden graad voor platina tusschen 0° en — 180° werd door ons gebruikt om aan te toonen, dat voor platina tusschen — 180° en + 100° een tweede graadsformule *niet voldoende* is, maar een derdegraads formule noodig is. Om dit aan te toonen schijnen bij gegeven + 100°, 0° en — 190° waarnemingen bij eene temperatuur ongeveer midden tusschen 0° en — 190°, zooals onze — 87°, meer geschikt dan waarnemingen bij eene temperatuur tusschen 0° en + 100°, zooals die bij + 56°, van SCHEEL.

[2]) Hiermede wordt geheel in 't midden gelaten of niet de verandering van den weerstand met de temperatuur in nauw verband staat met de uitzetting.

vergeleken en dien wij $Pt_I$ zullen noemen, als standaard genomen. De verandering van den weerstand der andere draden hebben wij bepaald door ze samen met $Pt_I$ op de gewenschte temperatuur te brengen en dan den weerstand er van met dien van $Pt_I$ te vergelijken. De twee platinadraden $Pt_{III}$ en $Pt_V$ werden samen met $Pt_I$ in denzelfden cryostaat (zie § 4 Med. 95[c]) gebracht en terwijl met den eenen weerstand de temperatuur naar de aanwijzing van de WHEATSTONE-brug standvastig werd gehouden, werd de verhouding van den weerstand van den andere tot $Pt_I$ met behulp van den differentiaalgalvanometer bepaald. $Pt_V$ werd ook afzonderlijk met de WHEATSTONE-brug gemeten. Het verschil der uitkomsten volgens beide methoden bedroeg op de laagste temperaturen slechts 0,02 $^0/_0$.

$Pt_{III}$ en $Pt_V$ waren even als $Pt_I$ geleverd door HERAEUS; zij behooren tot een zelfde latere zending als $Pt_I$. De doorsnede was van alle drie 0.1 m.M. Zij werden nadat zij op dezelfde wijze behandeld en op het glas (zie Med. n°. 95[c] § 3) gewonden waren langen tijd in een glaskoeloven gegloeid. $Pt_I$ en $Pt_{III}$ verschilden slechts hierin, dat $Pt_V$ na het gloeien gedeeltelijk afgewikkeld en op nieuw opgewikkeld werd en daarna niet opnieuw in den koeloven was gegloeid.

Om ook een weerstandsthermometer van zeer kleine afmetingen te hebben werd nog een platinadraad van 0,05 m.M. doorsnede gewonden op een buisje van 1 c.M. doorsnede en ongeveer 8 c.M. lang. De dunne platinadraad werd vastgesmolten aan dikke platinatoeleidingsdraden, die in het glas vastgesmolten waren. De thermometer kon dus zoo noodig met zuren worden schoongemaakt. De voor dezen thermometer gebruikte dunne draad, $Pt_d$, was eveneens door HERAEUS geleverd.

Een vierde draad werd onderzocht om een oordeel te verkrijgen over de

§ 3. *Onveranderlijkheid der weerstand-thermometers voor lage temperaturen met den tijd*, nl. de weerstand-thermometer, met welke de waarnemingen in 1902 door MEILINK vericht werden en dien wij $Pt_M$ zullen noemen. Het nulpunt bleek tot op een 300000ste onveranderd te zijn gebleven[1]). Dit was ook het geval bij $Pt_I$ nadat anderhalfjaar metingen bij zeer lage temperaturen met den weerstand-thermometer waren verricht.

Herhaling van de calibratie bij lage temperaturen van 1902 gaf minder goede overeenstemming. Gevonden werd:

---

1) De thermometer was in 't ongereede geraakt door 't springen der glazen cylindertjes. Hoe voorzichtig de herstelling ook werd uitgevoerd, zij gaf toch aanleiding tot een lengtevermindering van den draad met 3 m.M. of 0,039 $^0/_0$, waarvoor eene corectie werd aangebracht.

| TABEL IV. | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Waterstofth. | 1902 | 1907 | Afwijking in $\Omega$ | Afwijking in ° C. |
| 0° | 110.045 | 110.048 | — 0.003 | |
| —182,63 | 28,692 | 28.605 | + 0.087 | + 0°.25 |
| —197,08 | 21.877 | 21.999 | — 0.022 | — 0.05 |
| —209.93 | 16.025 | 15.934 | + 0.089 | + 0.25 |

Wij meenen er geen andere gevolgtrekking uit te mogen maken dan dat de betrouwbaarheid van de metingen met den waterstofthermometer in 1902 nog niet zoo groot was als zij thans blijkens Med. No. 95[d] geworden is.

§ 4. *Uitkomsten.* De metingen hebben geleverd voor den weerstand van elk der draden uitgedrukt in dien bij 0° als eenheid :

| TABEL V. Vergelijking van verschillende platina weerstandthermometers. | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Temperatuur | $Pt_I$ | $Pt_{III}$ | $Pt_V$ | $Pt_M$ | $Pt_d$ |
| 0° | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. |
| — 30.53 | 0.87892 | 0.87846 | 0.87799 | | |
| — 58.58 | 0.76685 | 0.76632 | 0.76643 | | |
| — 87.55 | 0.64991 | 0.64918 | 0.65039 | | |
| —103.83 | 0.58345 | | | 0.58720 | |
| —109.09 | 0.56204 | 0.56025 | 0.56126 | | |
| —140.19 | 0.43311 | 0.43195 | 0.43182 | | |
| —159.11 | 0.35368 | 0.35240 | 0.35214 | 0.35979 | |
| —182.75 | 0.25283 | 0.25141 | 0.250[illegible]9 | 0.26022 | 0.27374 |
| —195.10 | 0.20045 | 0.19894 | 0.19858 | 0.20812 | 0.22298 |
| —204.68 | 0.15974 | 0.15816 | 0.15880 | | 0.18355 |
| —212.20 | 0.12816 | 0.12653 | 0.12625 | 0.13622 | 0.15285 |
| —216.63 | 0.11024 | 0.10853 | 0.10824 | | |
| —252.82 | 0.01421 | | | | 0.040637 |
| —255.18 | 0.01244 | | | | 0.03766 |
| —259.10 | 0.01053 | | | | 0.03645 |

Het blijkt dat draden van de zelfde zending tot op een klein bedrag hetzelfde verloop aanwijzen. Een belangrijk verschil in vervorming van den draad heeft bij $Pt_V$ slechts een geringen invloed gehad. Het groote verschil met draden van andere zendingen wijst er op, dat het oorspronkelijk gebruikte materiaal en de behandeling bij het trekken beslissen over de verandering van den weerstand. Hoe grooten invloed de behandeling bij het trekken heeft blijkt uit de vergelijking van $P_{III}$ en $Pt_d$. Zij werden in denzelfden tijd door HERAEUS geleverd en zullen dus wel afkomstig zijn van platina van denzelfden graad van zuiverheid. Toch neemt de dunnere draad $Pt_d$ veel minder in weerstand af dan de dikkere. Bij de temperatuur van vloeibare waterstof worden de verschillen zeer groot. Lettende op de uitkomsten bij goud verkregen, die in de volgende Mededeeling (N°. 99$^c$) zijn opgenomen, schijnt de meest ongedwongen verklaring deze, dat de verontreiniging van het platina der door HERAEUS gezonden draden, hetzij deze oorspronkelijk aanwezig was of door het trekken veroorzaakt is, bij latere zendingen minder is dan bij vroegere. Wij komen hierop in Med. N°. 99$^c$ terug. Hier vermelden wij nog, dat DEWAR's draad gaf 0,30521 tegen onze 0,25344 bij — 182° en dat van HOLBORN's draden alleen de dikste (0,2 m.M.) een kleiner getal dan de onze gaf, n.l. 0,21253 tegen onze 0,21786 bij — 191°.

§ 5. *Calibratie-formules voor de nieuwe draden.* Evenals bij $Pt_I$ hebben wij ook voor ieder der draden $Pt_{III}$ en $Pt_V$ de constanten berekend in eene calibratie-formule, die veroorlooft met de waterstoftemperaturen rekening te houden en tot — 217° aan te sluiten. Om ook bij de waterstoftemperaturen aansluiting te verkrijgen zijn formules van anderen vorm noodig. De zooeven bedoelde formules van den vorm ($A$)

$$\frac{W_t}{W_0} = 1 + a.t.10^{-2} + b.t.10^{-4} + c.t.10^{-6} + d\left(\frac{10^2}{T} - \frac{10^2}{(273.09)^2}\right)$$

geven voor de aansluiting, die wij met $A_I$ onderscheiden

| $A_I$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $Pt_V$ | +0.401819 | +0.0007403 | +0.0052641 | +0.020666 |
| $Pt_{III}$ | +0.393291 | —0.0026645 | +0.0039442 | +0.016843 |

De middelbare fout bleek grooter, bij $Pt_V$ zelfs aanzienlijk grooter dan bij de calibratie in Med. 95$^c$, hetgeen slechts gedeeltelijk aan de indirecte methode van weerstandsbepaling kan worden geweten.

**Natuurkunde.** — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. N°. 99[c] uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: „H. KAMERLINGH ONNES *en* J. CLAY. *Over de verandering van den weerstand der metalen bij zeer lage temperaturen en den invloed, dien kleine bijmengselen hierop hebben.*" I.

§ 1. *Inleiding.* In Med. N°. 99[b] hebben wij de aandacht gevestigd op de bijzonder groote verschillen in de verandering van den galvanischen weerstand met de temperatuur welke verschillende platinadraden vertoonen, wanneer men tot de met vloeibare waterstof te bereiken lage temperaturen afdaalt. Nog duidelijker traden zulke verschillen in het licht bij verschillende gouddraden, die wij onderzochten. Wij hadden met dit metaal (zie Med. 95[d]) Zitt. Versl. Juni '06) het in Med. N°. 77 aangekondigde onderzoek van den invloed van kleine bijmengselen ter hand genomen omdat de invloed van bijmenging van zilver waarschijnlijk belangrijk zou zijn en het gehalte aan zilver zeer nauwkeurig bepaald zou kunnen worden, terwijl de mogelijkheid om draden van de verschillende goudsoorten te trekken en het hooge smeltpunt van goud dit metaal boven het anders zeer aan te bevelen kwik deden verkiezen.

Eindelijk kwam het onderzoek naar den invloed van kleine bijmengselen op de verandering van den weerstand van goud met de temperatuur ons al dadelijk te pas waar wij meenden, dat de goudweerstandsthermometer boven den platinaweerstandsthermometer te verkiezen zou zijn. Dr. C. HOITSEMA die ons reeds vroeger verplichtte (zie Med. 95[d]) door ons zuiver goud ter beschikking te stellen, heeft de vriendelijkheid gehad ons wederom verschillende monsters van goud van hooge zuiverheid te verschaffen, verder voor ons verschillende alliages met nauwkeurig bekende kleine gehalten aan bijmengsel te bereiden en de verontreiniging, welke in de draden na omsmelten ten slotte aanwezig was, te bepalen. Voor al deze belangrijke hulp en voor de voorlichting met zijne ervaring brengen wij Dr. HOITSEMA hier onzen hartelijken dank.

Het onderzoek van de verschillende gouddraden met zeer kleine bijmengselen kan natuurlijk ook als de calibratie van verschillende goudweerstandthermometers beschouwd worden. (Verg. Med. 99[b] § 1) Wij hebben er echter de voorkeur aan gegeven het op te vatten als een deel van ons in Med. N°. 77 aangegeven meer algemeen onderzoek naar de verandering van den weerstand met de temperatuur bij zuivere metalen en naar den invloed, dien kleine bijmengselen hierop hebben.

Wat de verandering van den soortelijken weerstand bij de zui-

vere metalen in den meest normalen toestand gebracht, betreft, daarbij trekken de aandacht de temperatuur van het *inflexiepunt* $\frac{d^2r}{dT^2} = 0$, de temperatuur van het *evenredigheidspunt* $\frac{dr}{dT} = \frac{r}{T}$ en de temperatuur van het *minimum* $\frac{dr}{dT} = 0$. Het is duidelijk, dat de ligging dezer punten alsmede overeenkomst [1]) en verschil hunner ligging en van den temperatuurcoefficient van den weerstand in 't algemeen bij verschillende metalen van verschillende klassen belangrijke gegevens voor de electronentheorie moet verschaffen.

Het geheele onderzoek naar deze punten is slechts mogelijk met behulp van vloeibare waterstof. Het inflectiepunt, waarvan het bestaan door DEWAR werd aangegeven werd slechts in enkele gevallen, — en bij deze laat de zuiverheid van het metaal nog twijfel, — hoog genoeg gevonden om het ook zonder metingen bij waterstoftemperaturen te kunnen vaststellen. Het evenredigheidspunt ligt bij metalen, in den meest zuiveren normalen toestand waarschijnlijk nog beneden de met vloeibare waterstof te bereiken temperaturen. Wel leidde DEWAR uit zijne metingen bij twee waterstoftemperaturen af, dat het bij enkele zijner metaaldraden reeds overschreden werd. Onze metingen wijzen er echter op, dat men, naarmate eenzelfde metaal in meer zuiveren en normalen toestand wordt gebracht, het evenredigheidspunt lager vindt. De metaaldraad, die het meest tot dien *idealen* toestand naderde is een onzer gouddraden geweest. Bij dien draad werd ook bij de laagste temperatuur het evenredigheidspunt nog niet bereikt. De draden van DEWAR waren van den idealen toestand waarschijnlijk verder verwijderd.

Bij de lage ligging, die wij voor het evenredigheidspunt vinden, kan men niet met metingen bij twee waterstof-temperaturen volstaan, doch hebben wij bepalingen bij minstens *drie* waterstoftemperaturen verricht, daar deze noodig zijn om met behulp van $\frac{d^2r}{dt^2}$ de waarschijnlijke ligging van het evenredigheidspunt op te sporen. Zoolang wij het evenredigheidspunt nog niet bereikt hebben behoeven wij over het minimumpunt niet uit te wijden.

Voor alles moeten wij bij het onderzoek naar de eigenschappen der metalen in den idealen toestand weten in hoeverre het metaal zich in dien toestand bevindt en anders hoe men kan afleiden, wat in dien toestand zou worden gevonden. De invloed van kleine af-

---

[1]) In dit opzicht is reeds iets te leeren uit de door ons in deze en in de vorige Mededeelingen opgestelde formules.

wijkingen in den aard der metalen op de verandering van den weerstand met de temperatuur, wordt bij de waterstoftemperaturen zoo bijzonder groot, dat een bijzonder onderzoek hierover noodig is. Hierbij is op tweeërlei te letten, op kleine bijmengselen en op verschil in hardheid enz. Dit laatste hebben wij voorloopig laten rusten, bij het onderzoek naar den invloed der bijmengselen werd de invloed van de hardheid echter zooveel mogelijk geëlimineerd door bij de vergelijking van verschillende metaalmonsters deze geheel op dezelfde wijze te behandelen en ze in denzelfden toestand van weekheid te brengen.

Het geheel der tot nog toe verkregen uitkomsten (in deze en de vorige Mededeeling) wordt het meest ongedwongen verklaard door de afwijkingen bij verschillende draden van eenzelfde metaal toe te schrijven aan verontreinigingen van het metaal, die ook bij het trekken opgenomen kunnen worden, indien het niet gelukt dit door geschikte voorzorgen te voorkomen, en die reeds in zeer kleine hoeveelheid een zeer grooten invloed hebben op den temperatuurcoëfficient van den weerstand.

De invloed van het trekken valt geheel weg bij het kwik, waarin men ook gemakkelijk kleine hoeveelheden bijmengsel gelijkmatig kan verdeelen. Daardoor krijgt de studie van dit metaal voor het onderzoek van den invloed van bijmengselen weder verhoogde beteekenis. Wij hebben in de eerste plaats den weerstand er van bij waterstoftemperaturen, die nog niet bepaald was, gemeten, hij wordt in § 4 opgegeven. Het bleek, dat zelfs het inflexiepunt bij — 263° bij zuiver kwik [1]) nog niet bereikt wordt; voor het onderzoek naar de verandering van den weerstand met de temperatuur bij zuivere metalen is dit een nadeel.

Evenals de gouddraad $Au_V$ (zie § 2) zijn ook de zilverdraad $Ag_I$ en de platinadraden der vorige Mededeeling waarschijnlijk zuiverder dan de draden van dezelfde metalen bij Dewar. Bij bismuth heeft Dewar daarentegen waarschijnlijk een zuiverder preparaat gehad dan wij. De door hem nog niet gemeten weerstandsverandering bij waterstoftemperaturen voor dit metaal is in § 5 opgegeven. In § 6 zijn ook de tot nog toe ontbrekende waarnemingen voor lood bij die temperaturen gegeven.

De groote mate van zuiverheid bij eenige der metalen, die ons ten dienste stonden en de lagere temperaturen, tot welke wij afdaalden, (vaste waterstof bij 2,5 mM. druk verdampende) maken, dat de

---

1) Misschien in verband met het laag gelegen smeltpunt. Misschien wordt bij osmium het evenredigheidspunt het eerst bereikt.

afname van den weerstand in eenige gevallen vele malen grooter is dan die door DEWAR werd waargenomen. Daaraan is het ook toe te schrijven, dat wij den grooten invloed, dien zeer kleine veranderingen in den aard van het metaal bij waterstoftemperaturen op den temperatuurscoëfficient van den weerstand verkrijgen, hebben opgemerkt. Men kan zich hiervan rekenschap geven, door te letten op het verschil van den weerstand van een draad van zuiver metaal, $r_{iT}$ bij de temperatuur $T$ met dien van een draad van hetzelfde metaal met een gehalte aan bijmengsel $x$ by dezelfde temperatuur $r_{xT}$. Volgens een stelling van MATTHIESSEN [1]) afgeleid uit waarnemingen tusschen 0° en 100° is dit verschil (de stelling heeft betrekking op een verschil, dat nagenoeg hetzelfde is als het thans beschouwde) bij verschillende temperaturen standvastig. FLEMING [2]) vond deze stelling nagenoeg bevestigd tot —200°. Nu geldt, zooals wij gevonden hebben, deze stelling niet meer bij waterstoftemperaturen. Maar de afwijking is niet van dien aard, dat onze gevolgtrekkingen daaronder lijden. Stellen wij dus om ons een denkbeeld over den invloed der bijmengselen te vormen $r_T = r_{iT} + px$, verder $p$ standvastig en groot dan is het duidelijk, dat — wanneer $r_{iT}$ zoo klein wordt als dit (zie Tab. I $Au_V$) bij zuivere metalen en waterstoftemperaturen het geval is, — de weerstand van een metaal voor het geval dat $x$ een merkbaar bedrag krijgt, nagenoeg alleen aan het bijmengsel te wijten zal zijn. De kleine bijmengselen verkrijgen een merkwaardigen invloed.

Analoga liggen hier voor de hand in den belangrijken invloed van kleine bijmengselen op de dichtheid in de nabijheid van de kritische temperatuur van eene stof, in het ondoorzichtig worden van een ruimte door het neerslaan van nevel op een minimale hoeveelheid stof. Doch voor hierop verder in te gaan, dient het systematisch onderzoek naar den invloed van kleine bijmengselen verder te zijn voortgezet. In allen gevalle blijkt de temperatuurcoëfficient van den weerstand bij waterstoftemperaturen een hoogst gevoelig criterium voor de beoordeeling van den aard van een metaal.

§ 2. *Goud.* De verschillende monsters zuiver goud zijn ons alle door Dr. C. HOITSEMA verschaft. De draden werden met uitzondering van twee er van, alle volkomen gelijk behandeld, door HERAEUS op 0.1 mM. doorsnede getrokken en bij elken trek met verdund zwavelzuur en salpeterzuur behandeld. De gouddraad $Au_{VI}$ werd op andere wijze getrokken en hierbij sterk verontreinigd. Het juiste bedrag is

1) Pogg. Ann. Bd. CXXII.

2) Proc. Royal Institution June 1893 p. 9.

nog niet bepaald. $Au_0$ is de draad welke in 95[d] werd gecalibreerd. Na omsmelten vond Dr. HOITSEMA 0,03°/₀ verontreiniging. Wat de draden $Au_{III}$, $Au_{IV}$ en $A_V$ betreft zoo vond Dr. HOITSEMA bij $A_{III}$ ongeveer 0.015°/₀ bij $A_{IV}$ en $A_V$ ongeveer 0.005°/₀ bijmengsel, $Au_{Agl}$ was vervaardigd uit een alliage, dat na oversmelten van den draad 0.4°/₀ bijmengsel (waarschijnlijk hoofdzakelijk zilver) bevatte. Alle draden behalve $Au_0$ en $Au_{Agl}$ waren tegelijk op denzelfden glascylinder gewonden gedurende langen tijd in een glaskoeloven gegloeid en langzaam afgekoeld, gelijk ook met $Au_0$ en $Au_{Agl}$ was geschied, zoodat ze volkomen week waren.

In tabel I zijn de weerstanden opgegeven uitgedrukt in die bij 0° als eenheid. Deze waren ongeveer 9Ω.

TABEL I.

Verandering van den weerstand van verschillende gouddraden met de temperatuur.

| Temperatuur | $Au_{III}$ | $Au_{IV}$ | $Au_V$ | $Au_{VI}$ | $Au_O$ | $Au_{AgI}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| —103.83 | 0.59601 | 0.59389 | 0.59306 | 0.64827 | 0.60545 | 0.64549 |
| —183.00 | 0.27653 | 0.27177 | 0.27096 | 0.37053 | 0.30070 | 0.37099 |
| —197.87 | 0.21456 | 0.20963 | 0.20871 | 0.31659 | 0.23908 | |
| —205.01 | | | 0.17897 | | 0.20992 | |
| —215.34 | 0.14058 | 0.13407 | 0.13337 | 0.168[illegible]2 | 0.16681 | |
| —252.93 | 0.01602 | 0.008743 | 0.0[illegible]8103 | 0.13669 | 0.04554 | 0.13942 |
| —255.13 | | | 0.005691 | | | |
| —258.81 | 0.01095 | 0.004265 | 0.003601 | 0.13241 | 0.03982 | 0.[illegible]3288 |
| [—261] | | | 0.002713 | | | |
| [—262] | | 0.003257 | 0.002526 | | | |

Ter vergelijking zij opgemerkt, dat DEWAR vond 0.03290 tegen ons 0.00725 bij — 252°.93 van $Au_V$.

§ 3. *Kwik.* Het werd dubbel gedistilleerd en gebracht in een glazen spiraaltje. Dit was beschermd door een omhulling van pentaun, hetwelk van onderen af zeer langzaam afgekoeld werd voor het in het bad van den cryostaat gedompeld werd. Gevonden werd:

| TABEL II. Verandering van den weerstand van zuiver kwik met de temperatuur. | |
|---|---|
| Temp. | Weerstand |
| 0° | 97.126 |
| — 183.00 | 7.2650 |
| — 197.87 | 6.0103 |
| — 205.01 | 5.3900 |
| — 215.34 | 4.5057 |
| — 252.93 | 1.2613 |
| — 258.81 | 0.7534 |

§ 4. *Zilver*. Dit werd ons eveneens door Dr. C. HOITSEMA verschaft en door HERAEUS tot een draad van 0.1 mM. getrokken, waarbij het geheel als het goud en het platina behandeld werd. Nadat de weerstand bepaald was werd de samenstelling gecontroleerd; het zilver bevatte toen 0.18°/$_0$ verontreiniging. Het nulpunt van den zilverdraad (weerstand bij 0°) verandert iets door eene rekking ten gevolge van het verschil van uitzetting van zilver en glas. De volgende tabel geeft den weerstand uitgedrukt in dien bij 0° als eenheid. (De weerstand bij 0° was 21.519 Ω).

TABEL III.

Verandering van den weerstand van Zilver met de temperatuur.

| Temperatuur | Weerstand $Ag_I$ | $O-C_D$ | $O-C_{AIV}$ |
|---|---|---|---|
| 99°.76 | 1.41089 | 0 | 0 |
| 0 voor | 1 | 0 | 0 |
| 0 na | 1.00037 | | |
| — 103.81 | 0.58087 | — 0.00042 | — 0.00042 |
| — 139.87 | 0.43282 | + 42 | + 42 |
| — 183.57 | 0.24679 | — 17 | 0 |
| — 195.17 | 0.19703 | + 29 | — 2 |
| — 204.67 | 0.15528 | — 31 | |
| — 252.92 | 0.008913 | 0 | |
| — 259.22 | 0.006942 | 0 | |

In kolom $O—C_D$ zijn opgenomen de afwijkingen van eene van $+100°$ tot $-259°$ aangesloten formule van den nieuwen vorm :

$$\frac{W_t}{W_0} = 1 + a \,.\, 10^{-2} \,.\, t + b\, 10^{-4}\, t^2 + c\, 10^{-6}\, t^3$$

$$+ d\left(\frac{10^6}{T^3} - \frac{10^6}{(273.09)^3}\right) + e\left(\frac{10^{10}}{T^6} - \frac{10^{10}}{273.09^6}\right) \,.\,.\, (D)$$

die het best aansloot met de waarden:

| *D* | *a* | *b* | *c* | *d* | *e* |
|---|---|---|---|---|---|
| $Ag_I$ | +0.402746 | +0.004355 | +0.004806 | +0.00955 | —0.000013 |

De kolom $O—C_{A_{IV}}$ geeft ter vergelijking met platina en goud de afwijkingen van eene formule van den vorm *A* (zie Med. N°. 95[c] en N°. 95[d]):

$$\frac{W_t}{W^0} = 1 + a.t.10^{-2} + b.t^2.10^{-4} + c.t^3.10^{-6} + d\left(\frac{10^3}{T} - \frac{10^3}{(273.09)^3}\right)$$

met waarden, die wij wegens de andere wijze van aansluiting met $A_{IV}$ onderscheiden :

| $A_{IV}$ | *a* | *b* | *c* | *d* |
|---|---|---|---|---|
| $Ag_I$ | +0.40355 | +0.03968 | +0.005232 | +0.008662 |

§ 5. *Bismuth.* De gemeten weerstand, dien wij ook in het magnetisch veld zullen onderzoeken, was die van een bismuthspiraal van HARTMAN en BRAUN N°. 301. De weerstand uitgedrukt in die bij 0° als eenheid (de weerstand bij 0° was 17.3138 Ω) was :

TABEL IV.

Verandering van den weerstand van Bismuth met de temperatuur.

| Temperatuur | Weerstand $Bi_I$ | $O-C_{AIII}$ |
|---|---|---|
| 12°64 | 1.05148 | 0 |
| 12°70 | 1.05165 | |
| 0 | 1 | |
| — 103.71 | 0.63649 | + 0.00952 |
| — 139.88 | 0.52865 | — 127 |
| — 164.05 | 0.46246 | — 144 |
| — 182.73 | 0 41435 | — 69 |
| — 195.17 | 0.38478 | + 144 |
| — 204.68 | 0.36064 | + 127 |
| — 216.01 | 0.33014 | — 69 |
| — 253.01 | 0.22329 | — 92 |
| — 255.34 | 0.21388 | — 2 |
| — 258.86 | 0 19574 | 0 |

Deze kolom $O—C_{AIII}$ geeft de verschillen met eene formule van den vorm $A$, (zie § 4) met waarden, die wij wegens de aansluiting bij twee waterstoftemperaturen en over 't gebied tot 0° met $A_{III}$ zullen aangeven:

| $A_{III}$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $Bi_I$ | +0.399037 | +0 051928 | +0.0038155 | —0.0079700 |

§ 6. *Lood.* De kennis van den weerstand van lood is vooral van belang met het oog daarop, dat dit metaal het THOMSON-effect niet vertoont. Het door ons gebruikte lood bevatte waarschijnlijk niet meer dan 0,015 °/₀ bijmengsel.

De weerstand van een smal uit het geplette lood gesneden lintje, door paraffine tegen chemische inwerking beschut, werd, in den weerstand bij 0° (3.18114 Ω) als eenheid uitgedrukt, gevonden:

TABEL V.

Verandering van den weerstand van lood met de temperatuur

| Temperatuur | Weerstand |
|---|---|
| + 16°.33 | 1.0652 |
| 0° | 1 |
| —103.63 | 0.59548 |
| —183.65 | 0.29439 |
| —195.15 | 0.25257 |
| —204.52 | 0.21742 |
| —216.61 | 0.17129 |
| —252.78 | 0.03032 |
| —255.07 | 0.02314 |
| —258.70 | 0.01311 |

**Plantenkunde.** — De Heer WENT biedt eene verhandeling aan van den Heer S. H. KOORDERS: „*Botanische Untersuchungen über einige in Java vorkommende Pilze, besonders über Blätter bewohnende, parasitisch auftretende Arten*", Abschnitt II—V.

De Heer LORENTZ. deelt namens de Commissie voor de bliksemafleiders op het Rijksmuseum mede dat het nader overleg met den Architect waarvan in het verslag der Commissie van 27 October 1906 sprake was, thans heeft plaats gehad. Er is nu vastgesteld in hoeverre de in het gebouw aanwezige metaalmassa's met de afleiders zullen worden verbonden, terwijl ook overeenstemming is verkregen omtrent de noodzakelijkheid om wat de in de muren besloten kettingankers betreft, van de voorstellen in het verslag af te wijken.

De Commissie legt thans een aan haar gericht schrijven van den waarnemenden Architect der Rijksmuseumgebouwen over, waarin alle veranderingen die zullen worden aangebracht, zijn aangegeven.

Voor de Boekerij wordt aangeboden door den Heer W. EINTHOVEN „*Onderzoekingen gedaan in het Physiologisch Laboratorium der Universiteit te Leiden*", 2de Reeks. Deel VI.

De vergadering wordt gesloten.

# ERRATUM.

p. 37, r. 9 v. b. staat : $\frac{d\Phi}{d\varkappa}$ lees : $\frac{d\Phi}{d\beta}$

p. 41, r. 3 v. o. staat : $\chi(\mu, T')$ lees : $\chi(\mu, T') = 0$

---

**(Juli 17, 1907).**

## KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

### VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 28 September 1907.

*Voorzitter:* de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
*Secretaris:* de Heer J. D. VAN DER WAALS.

### INHOUD.



Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van de Heeren EYKMAN, HOOGEWERFF en WEBER, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Dankzegging van de Kon. Akademie van Wetenschappen te Stockholm voor de betoonde belangstelling bij gelegenheid van de herdenking van den 200sten geboortedag van CAR. LINNAEUS.

3°. Bericht van het overlijden van het buitenlandsch lid der Akademie Prof. H. C. VOGEL te Potsdam op 13 Augustus ll. Is met een brief van rouwbeklag beantwoord.

Verder is ingekomen het bericht van het overlijden van

**Dr. WILLEM KOSTER,**

lid der Afdeeling.

Dit bericht is met een brief van rouwbeklag beantwoord.
Naar aanleiding hiervan zegt de Voorzitter het volgende:

*Mijne Heeren!*

Met WILLEM KOSTER verliezen we een onzer oudste medeleden, die sedert ruim 40 jaar deel uitmaakte van onze afdeeling.

Geboren in 1834, studeerde hij aan de klinische school te Rotterdam, waar hij onder MOLEWATER aan het ziekenhuis werkzaam was; promoveerde in 1859 te Leiden en werd kort daarna tot prosector bij den Hoogleeraar HALBERTSMA benoemd.

In deze betrekking bleef KOSTER slechts weinige jaren, daar hij in 1862 SCHROEDER VAN DER KOLK als Hoogleeraar in de anatomie, algemeene pathologie, pathologische anatomie en gerechtelijke geneeskunde te Utrecht opvolgde.

Niettegenstaande zijne zwakke gezondheid ontwikkelde hij zoowel te Leiden als te Utrecht eene groote werkzaamheid op het zoo ruime gebied, waarvan de studie aan hem was toevertrouwd, en jaar op jaar verschenen van zijn hand grootere en kleinere verhandelingen, tot hij in 1876 plotseling uit zijn werk werd gerukt door eene hevige infectie bij eene sectie opgedaan.

Jaren heeft hij een harden strijd tegen de hem ondermijnende ziekte gevoerd, en zooveel hij kon nog zijne betrekking als hoogleeraar waargenomen, tot hij in 1888 zich genoodzaakt zag, zich uit zijn werk terug te trekken en zijn ontslag als hoogleeraar aan te vragen.

Een rustig verblijf, eerst buiten, later weer in Utrecht, bracht gelukkig in menig opzicht verbetering en met groote

geestkracht vatte hij toen eene nieuwe werkzaamheid ter hand: in de „Wetenschappelijke bladen" belangrijke verhandelingen in populairen vorm over wetenschap en kunst, en in verschillende vlugschriften zijne heldere denkbeelden over onderwerpen uit het gebied van de natuurwetenschappen, van het onderwijs en van de wijsbegeerte aan het Nederlandsche volk mede te deelen. Tot voor een tweetal jaren bleef hij daarmede onvermoeid bezig, maar sedert dwong de slechte staat zijner gezondheid hem zijn werk neder te leggen en na een droevig lijden is hij den 7 Juli ontslapen.

Koster was een man toegerust met vele gaven, beschikkend over een zeldzaam geheugen en met groote belangstelling in al wat op het geestelijk leven van den mensch betrekking heeft. Hij kon zich dan ook niet beperken tot de studie van de ontleedkunde, maar van tal van onderwerpen buiten dat vak heeft hij studie gemaakt en de uitkomsten dezer studiën in kortere of langere verhandelingen medegedeeld, o.a. in de werken onzer Akademie, in de Archives Néerlandaises, in het Nederlandsch tijdschrift voor geneeskunde, en in het Nederlandsch archief van Genees- en Natuurkunde, dat van 1865 tot 1870 door Koster met Donders werd uitgegeven.

Deze veelzijdigheid laat zich, behalve uit de geestesrichting van Koster, ook voor een deel verklaren uit den stand der medische wetenschap in het midden van de voorgaande eeuw, toen bij het onderwijs vele deelen der geneeskunde, die nu afzonderlijk naast elkander staan, met elkander nauw waren verbonden. Tijdens het verblijf van Koster in Leiden dacht men er daar b.v. nog niet aan de physiologie als een afzonderlijk leervak te beschouwen, en was het onderwijs daarin aan Halbertsma, den hoogleeraar in de ontleedkunde, toevertrouwd; het duurde tot 1866 eer een afzonderlijke leerstoel voor de physiologie aan Heynsius werd aangeboden.

Koster was dus van zelf genoodzaakt zich met verschillende onderwerpen bezig te houden, die buiten de eigenlijke ontleedkunde liggende toch in hooge mate zijne belangstelling wekten, en zoo behoeft het ons niet te verwonderen dat hij, de anatoom, in Nederland de eerste was die de proeven van

EMIL DU BOIS REYMOND over zenuwstroomen bij zijne lessen demonstreerde.

KOSTER's veelzijdigheid en groote algemeene ontwikkeling, gepaard aan een scherpen kritischen geest, verklaren voor een deel, waarom hij, niettegenstaande zijn groote talenten en zijne groote werkzaamheid zich niet tot het schrijven van een uitgebreid werk over een geneeskundig onderwerp geroepen gevoelde. Diezelfde eigenschappen gaven hem echter een open oog voor den gebrekkigen toestand waarin de praktische geneeskunde verkeerde, en deden hem inzien, zooals ons medelid PEKELHARING het uitdrukte, dat alleen de strenge met scherpe kritiek beoefende natuurwetenschap de kliniek kon helpen uit het moeras waarin zij was verzonken. In zijn krachtigen tijd heeft hij door zijn woord en door zijne talrijke geschriften veel daartoe bijgedragen, en ongetwijfeld neemt hij, volgens dien zelfden bevoegden beoordeelaar, eene hooge plaats in onder de hervormers der geneeskunde in Nederland. Brengen we hem voor wat hij in dit opzicht gedaan heeft de hulde onzer afdeeling, zijne vrienden brengen den geestigen beminnelijken man hun dank voor wat hij voor hen is geweest.



**Physiologie.** — De Heer ZWAARDEMAKER spreekt: „*Over geurverwantschappen*".

De groote menigte geuren, die natuur en techniek aanbieden, laat zich op grond van in de literatuur gangbare meeningen in 9 klassen verdeelen, die met historische namen, grootendeels aan Linaeus ontleend, aangeduid kunnen worden. [1]) Deze klassen zijn: aetherische geuren, aromatische geuren, odores fragrantes, moschusgeuren, uienluchten, empyreumatische luchten, caprylluchten, narcotische luchten, odores nauseosi. Ik heb uit elke klasse een vertegenwoordiger gekozen, die, chemisch goed gekenmerkt, op eenvoudige wijze voor olfactometrisch onderzoek geschikt kan worden gemaakt (door de chemisch zuivere reukstof in paraffinum liquidum[2]) op te lossen, met één uitzondering n.l. muscon, dat in op zich zelf reukloos paraffine reukloos is en daarom met myristinezuur vermengd is gebezigd). Het zijn:

| | |
|---|---|
| isoamylacetaat | 0.5°/₀ |
| nitrobenzol | 5°/₀ |
| terpineol | 2.5°/₀ |
| muscon | 0.627°/₀ |
| Aethylbisulfide | 1°/₀₀₀ |
| guajacol | 1°/₀₀ |
| valeriaanzuur | 1°/₀₀₀ |
| pyridine | 1°/₀ |
| scatol | 1°/₀₀. |

Wanneer men in den dubbelen olfactometer telkens twee dezer reukstoffen samenvoegt, komen onder de 36 aldus verkregen combinaties geen eigenlijke menggeuren voor, maar wordt door een juist tegen elkaar opwegen òf reukloosheid van het mengsel òf wedstrijd verkregen. Reukloosheid, resp. onbepaaldheid van geur, met overgang in reukloosheid door verdunning van het luchtmengsel, wordt aangetroffen, wanneer men de prikkels zwak neemt; wedstrijd, d.w.z. het afwisselend op den voorgrond treden van den eenen of van den anderen der beide onderling gemengde geuren, doet zich voor, wanneer de prikkels sterk zijn. Intusschen, ook in het laatste geval is de indruk, dien het mengsel maakt, ontzaglijk veel zwakker dan de indrukken, die elke geur, op zichzelf genomen, teweegbrengt.

Als eenheid van geurkracht bezig ik de „olfactie", d.w.z. de kleinste

---

1) H. ZWAARDEMAKER, Physiologie des Geruchs. Leipzig 1895 p. 207.

2) Niet water, doch paraffinum liquidum is als oplosmiddel gekozen, omdat het wenschelijk is maanden achtereen met dezelfde cylinders te kunnen werken, zonder dat omzetting der oplossing te vreezen is.

hoeveelheid geur van een bepaalde qualiteit, die door een normaal reukorgaan kan worden herkend („Erkennungsschwelle", „recognising-limit").

Wanneer men de straks genoemde paraffineuse oplossingen bij kamertemperatuur laat verdampen en reukstof laat afstaan aan een luchtstroom, die met een snelheid van 75 cub. cm. per sec. voorbijstrijkt, dan wordt aan deze laatste, per 50 à 100 cub. cm. lucht, één olfactie meegedeeld door het cylindervormig, verdampend oppervlak tot op een bepaalde cylinderlengte uit te schuiven. Deze cylinderlengte bedroeg gemiddeld :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| voor | de | isoamylacetaat-oplossing | 0.2 | cm. |
| „ | „ | nitrobenzol-oplossing | 0.03 | „ |
| „ | „ | terpineol-oplossing | 1.1 | „ |
| voor | het | muscon-mengsel | 0.15 | „ |
| „ | de | aethylbisulfide-oplossing | 0.015 | „ |
| „ | „ | guajacol-oplossing | 0.3 | „ |
| „ | „ | valeriaanzuur-oplossing | 0.03 | „ |
| „ | „ | pyridine-oplossing | 0.02 | „ |
| „ | „ | scatol-oplossing | 0.003 | „ |

Bij de beoordeeling der tabel zal men er op hebben te letten, dat de getallen soms verkregen zijn, door de cylinderlengten tijdens de proef feitelijk 10 of 100 maal grooter te nemen en de lucht in het reservoir, waaraan geroken wordt, 10 of 100 maal te verdunnen. Door deze kunstgreep werd het bezwaar ontweken, eensdeels dat kleine cylinderlengten niet nauwkeurig af te lezen zouden zijn, andersdeels, dat de verdamping uit zeer smalle stroken niet regelmatig zou plaats hebben.

De vermenging der twee aan twee samen te voegen geuren vond in een gemeenschappelijk reservoir plaats, dat, met glazen kranen afsluitbaar, stroomafwaarts van den dubbelen reukmeter was aangebracht. De symmetrie van dezen laatsten, met het oog op den aan den luchtstroom geboden weerstand, werd vooraf met een luchtbrug nagegaan, terwijl de reiniging van aanhangende adsorptiegeuren tusschen elke twee proeven door permanent luchtspoelen en electrische verwarming van den reservoirwand heeft plaats gehad. Aan het mengreservoir werd door middel van een afzonderlijk buisje, bij stroomafwaarts geopende kraan, geroken.

De 36 combinaties verschaften onbepaaldheid van geur of wedstrijd, wanneer $p$ olfactiën van den eenen en $q$ olfactiën van den anderen geur een verhouding $p/q$ aanboden, van het volgende bedrag :

TABEL.

| Mengsel | | | p/q [1] | graad van volkomenheid der compensatie [2] |
|---|---|---|---|---|
| isoamylacetaat | en | nitrobenzol | 0 44 | onbepaaldheid * |
| „ | „ | terpineol | 1.32 | zuurachtige bijreuk |
| „ | „ | muscon | 0.0625 | onbepaaldheid |
| „ | „ | aethylbisulfide | 0.244 | volkomen compensatie * |
| „ | „ | guajacol | 3 | onbepaaldheid |
| „ | „ | valeriaanzuur | 0.01 | wedstrijd |
| „ | „ | pyridine | 3.6 | onbepaaldheid * |
| „ | „ | scatol | 0.0037 | onbepaaldheid |
| nitrobenzol | „ | terpineol | 1.375 | onbepaaldheid * |
| „ | „ | muscon | 0.434 | „ |
| „ | „ | aethylbisulfide | 0.111 | „ |
| „ | „ | guajacol | 0 65 | „ |
| „ | „ | valeriaaazuur | 0.03 | „ |
| „ | „ | pyridine | 3. | „ |
| „ | „ | scatol | 0.012 | onbepaaldheid * |
| terpineol | „ | muscon | 0.125 | „ |
| „ | „ | aethylbisulfide | 0.067 | iets aromatisch overblijfsel * |
| „ | „ | guajacol | 1. | wedstrijd. |
| „ | „ | valeriaanzuur | 0 05 | bijna volkomen conpensatie |
| „ | „ | pyridine | 0.53 | „ „ „ |
| „ | „ | scatol | 0.12 | „ „ „ |
| muscon | „ | aethylbisulfide | 1 | onbepaaldheid * |
| „ | „ | guajacol | 0.03 | tamelijk bevredigend |
| „ | „ | valeriaanzuur | 2.7 | bijna volkomen compensatie |
| „ | „ | pyridine | 1.2 | wedstrijd |
| „ | „ | scatol | 0.2 | onbepaaldheid * |
| aethylbisulfide | „ | guajacol | 0.056 | wedstrijd * |
| „ | „ | valeriaanzuur | 1.2 | onbepaaldheid |
| „ | „ | pyridine | 3 2 | zwakke machinelucht * |
| „ | „ | scatol | 0 0075 | onbepaaldheid |
| guajacol | „ | valeriaanzuur | 0.03 | „ |
| „ | „ | pyridine | 0.016 | onbepaaldheid * |
| „ | „ | scatol | 0.0007 | „ |
| valeriaanzuur | „ | pyridine | 4 | „ |
| „ | „ | scatol | 1.2 | „ |
| pyridine | „ | scatol | 0.42 | onbepaaldheid * |

De bijzonderheden dezer proeven en met name de absolute hoeveelheden, die aan elk der combinaties der geuren ten grondslag werden gelegd, zullen spoedig in een omvangrijker verhandeling elders worden meegedeeld.

Het in de tabel opgegeven verhoudingsgetal is van kracht, behalve voor een bepaalde gemiddelde combinatie, ook voor een groep sterkere, resp. zwakkere prikkels, die zich onmiddellijk aansluiten. Voor deze breedte geldt de regel, dat wanneer *p* olfactiën van een geur door *q* olfactiën van een anderen geur worden gecompenseerd, dit

---

1) $p < q$.

2) Met een sterretje zijn de gevallen aangeduid, waarin door een opzettelijke proef is aangetoond, dat het verhoudingsgetal over zekere breedte van prikkels toepasselijk is.

voor $np$ en $nq$ olfactiën eveneens het geval zal moeten zijn. FECHNER noemde de intensiteiten van prikkel en gewaarwording, die onderling evenredig toe- en afnemen, de cardinale waarden van prikkel en gewaarwording. Per analogiam zou men hier van cardinale waarden der elkaar compenseerende prikkels kunnen spreken, daargelaten de vraag of deze evenredigheid zoo eenvoudig verklaarbaar zal blijken als die, waarop FECHNER doelt. De zone, waarvoor het verhoudingsgetal der tabel geldt, moge dus zone van cardinale proporties heeten!

Uit het feit, dat bij gelijktijdigen indruk twee geuren elkaar kunnen opheffen, volgt, dat men de werking dezer prikkels op het zintuig zal mogen voorstellen door twee vectoren, als het ware twee krachten vertegenwoordigend, die elkaar in het algemeen min of meer tegenwerken. Daarbij zal men de richting van den vector van sterksten geur (beantwoordend aan $q$ in de tabel) zoodanig moeten kiezen, dat de cosinus van den hoek, dien hij met het verlengde van den vector van zwaksten geur (beantwoordend aan $p$ in de tabel) maakt, juist gelijk zij aan de verhouding, die in de betrokken combinatie voor $p/q$ is gevonden. Immers in dat geval zal men zich den vector van sterksten geur kunnen denken als vervangen door de som van twee andere vectoren: één vallend in het verlengde van den vector van zwaksten geur, doch tegengesteld van richting en één loodrecht op dezen (in het vlak der oorspronkelijke vectoren). Wanneer men dan verder de twee oorspronkelijke vectoren gelijke lengte geeft, elk met zoodanige lengte-eenheid als het verhoudingsgetal meebrengt, d.w.z. voor den vector $q$ en zijne ontbondenen van $q/p$ maal meer gewicht dan voor den vector $p$, dan zal de opheffing van werkingen, die door de oorspronkelijke vectoren moet worden gesymboliseerd, getrouw zijn aangegeven. Immers de vector $p$ en een der ontbondenen van vector $q$ zullen gelijke, maar tegengestelde krachten voorstellen. Men zal nog slechts de richting van de andere ontbondene van vector $q$ als richting van reukloosheid hebben te beschouwen, om van het volslagen gemis van sensatie behoorlijk rekenschap te hebben gegeven.

Een tweede stel vectoren zal in hetzelfde stelsel kunnen plaats vinden, mits de beide stellen één vector gemeen hebben. Dan zal men op grond van een nieuw verhoudingsgetal $p'/q'$ den nieuw ingevoerden derden geurvector een bepaalde richting ten opzichte van den eersten geurvector kunnen geven en ook den tweeden en derden geurvector onderling kunnen richten met behulp van een derde verhoudingsgetal $p''/q''$. In het laatste geval zullen wel is waar twee liggingen kunnen voldoen, een die in een rechtsschroefdraaiing, een die in een linksschroefdraaiing van den aan $p$ beantwoordenden

vector wordt bereikt, maar tusschen deze twee zal men bij afspraak één kunnen kiezen. Bij de combinatie $p'/q'$ behoort een vector van reukloosbeid, loodrecht op den vector van zwaksten geur en bij de combinatie $p''/q''$ een vector van reukloosheid loodrecht op den vector, die dan vector van zwaksten geur is. De lengte-eenheden dezer vectoren zullen in het algemeen nooit dezelfde zijn en ook verschillen al naar gelang de combinatie, die men in het oog vat. Daar wij intusschen nimmer drie, maar steeds twee geuren tegelijkertijd onderling hebben gecomponeerd, zal het nimmer noodig zijn ons met de lengteeenheden van de drie gelijktijdig bezig te houden en levert deze wisseling van eenbeden al naar het geval, dat beschouwd wordt, ook geen bezwaar op. Zelfs voor ons verder betoog brengt dit geen moeilijkheid met zich, daar wij nimmer vectoren onderling zullen vergelijken, dan wanneer zij ten opzichte van een tevens beschouwden onafhankelijken vector dezelfde richting hebben, m. a. w. ten opzichte van dezen ongeveer gelijke lengteeenheden bezitten [1]).

Een derde stel vectoren zal in het algemeen niet in hetzelfde stelsel kunnen worden gebracht, ook al heeft het één vector met de beide voorafgaande stelsels gemeen, want den vierden vector zullen in het algemeen verschillende richtingen moeten worden toegewezen, al naar gelang men hem in verband met den eersten en tweeden, met den eersten en derden of met den tweeden en derden beschouwt. Maar wat in het algemeen onmogelijk is, kan in bijzondere gevallen toch zeer wel uitvoerbaar blijken. Dit willen wij nagaan.

Nummeren wij onze negen standaardgeuren met de cijfers 1 tot 9 en de aan deze beantwoordende vectoren eveneens, dan zal men telkens twee dezer vectoren op grond van hun verhoudingsgetal (zie tabel) kunnen vastleggen en ten opzichte van deze twee in hun ligging bepaalde vectoren de overige kunnen rangschikken. De vraag, die wij zooeven stelden, komt hierop neer: is de onderlinge betrekking tusschen de geuren ook zoodanig, dat sommige dezer laatste zeven vectoren samenvallen? Van een volmaakt samenvallen zal tengevolge van de fouten der proefneming wel nimmer sprake kunnen zijn, doch gaan wij na of dit binnen een foutengrens van hoogstens 1 °/₀ van $2\pi$ richtingsverschil ($= 3.6°$) het geval is. Tot dit doel

[1]) De verhoudingsgetallen, zooals die empirisch zijn samengesteld en in onze tabel worden saamgevat, vormen 252 mogelijke constellaties van drie vectoren. Daaronder is er slechts één, die volledig, ook wat de eenheden betreft, voor alle drie proporties gelijktijdig voldoet. Het is de constellatie, waarbij terpineol, scatol en valeriaanzuur zijn gecombineerd. De door een gemeenschappelijke lengte-eenheid gemeten lengte der vectoren bedraagt in dit geval voor den terpineol-vector 1, voor den scatolvector 8, voor den valeriaanzuurvector 20 eenheden.

hebben wij eerst 1 en 2 gecombineerd, alle overige ten opzichte van deze twee beschouwend; daarna 1 en 3 vastgelegd, de overige hiernaar rangschikken, vervolgens 1 en 4 vooraf bepaald, de overige daarnaar plaatsend, enz., totdat alle combinaties, te weten 36, zich hebben voorgedaan. In elk der combinaties werden zeven vectoren aangetroffen, wier ligging ten opzichte van de twee vooraf gekozen vectoren moest worden gezocht en die in hun al of niet samenvallen moesten worden nagegaan. Voor elk stel van twee, vooraf bepaalde, vectoren geeft dit aanleiding tot 42 beoordeelingen, zoodat in het geheel voor alle 36 combinaties 1512 oordeelvellingen zijn noodig geweest. Daar elk geval zich echter eens herhaalt, zijn het in werkelijkheid 756 afzonderlijke beoordeelingen,

Straks hebben wij den eisch gesteld, dat nimmer andere dan ongeveer gelijk gerichte vectoren, die dus ten naaste bij dezelfde lengteeenheid bezitten, onderling vergeleken zouden worden. Houden wij dit in het oog, dan zijn tot op 1 °/₀ nauwkeurig identisch:

| | |
|---|---|
| isoamylacetaat en nitrobenzol<br>valeriaanzuur en scatol | elk viermaal |
| isoamylacetaat en guajacol<br>nitrobenzol en guajacol<br>muscon en scatol<br>aethylbisulfide en valeriaanzuur | elk driemaal |
| isoamylacetaat en terpineol<br>isoamylacetaat en aethylbisulfide<br>nitrobenzol en terpineol<br>terpineol en guajacol<br>muscon en aethylbisulfide<br>muscon en valeriaanzuur<br>aethylbisulfide en scatol | elk éénmaal |

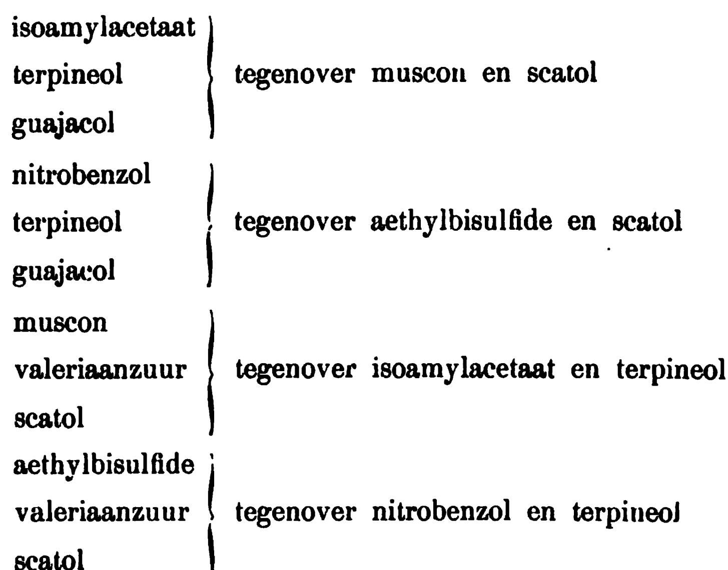
te zamen 27 constellaties [1]).

Sommige dezer 27 constellaties geven tot wederkeerigheid aanleiding, in dien zin, dat de vectoren, die identiek zijn tot twee vooraf vastgelegde vectoren, deze laatste identiek maken, wanneer zij zelve vooraf in hun onderlinge ligging zijn bepaald. Dit komt voor bij:

[1]) Dit cijfer 27 stijgt tot 42, wanneer men behalve volkomen coincidenties ook nog coincidenties met reciproque waarden in den kring zijner beschouwingen trekt.


isoamylacetaat en terpineol ← → ten opz. van muscon en scatol → ← ten opz. van isoamylacetaat en guajacol

Is het samenvallen van twee geurvectoren, wanneer men ze ten opzichte van twee andere geurvectoren beschouwt, reeds zeer merkwaardig, nog interessanter is een samenvallen van drie vectoren. Dit is in de volgende gevallen gerealiseerd, wanneer wij de foutengrens tot 2°/₀ uitbreiden:

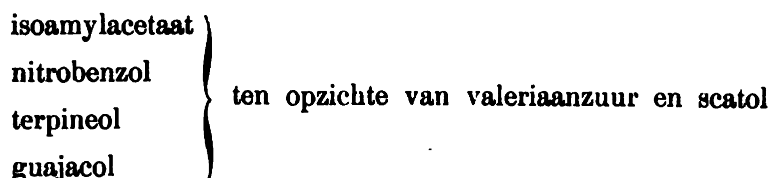

isoamylacetaat, terpineol, guajacol — tegenover muscon en scatol

nitrobenzol, terpineol, guajacol — tegenover aethylbisulfide en scatol

muscon, valeriaanzuur, scatol — tegenover isoamylacetaat en terpineol

aethylbisulfide, valeriaanzuur, scatol — tegenover nitrobenzol en terpineol

Zelfs een samenvallen van vier vectoren, tot op 2°/₀ van $2\pi$ nauwkeurig, is éénmaal aangetroffen en wel voor:


isoamylacetaat, nitrobenzol, terpineol, guajacol — ten opzichte van valeriaanzuur en scatol

De vlakken waarin de bij deze geuren behoorende vectoren van reukloosheid samenkomen, hebben den kegelvorm, resp. met den vector voor valeriaanzuur en dien voor scatol tot as.

Slaan wij een blik op het geheel der verworven uitkomsten, dan is het vooral de coincidentie van meerdere vectoren tegelijkertijd, die onze aandacht trekt: 4 vectoren tegenover valeriaanzuur en scatol, 4 stellen van 3 vectoren telkens ten opzichte van twee anderen. Kennelijk heerscht tusschen de samenvallende vectoren overeenstemming in werking op het bewustzijn voor die bepaalde gevallen. Maar

sommige der samenvallende vectoren vinden wij herhaaldelijk in elkaars gezelschap. Hun onderlinge overeenkomst moet dus van intimeren aard zijn, anders zou zij zich niet zoo dikwijls en onder zooveel verschillende omstandigheden kunnen openbaren. Dit nadere verband bestaat b.v. tusschen isoamylacetaat en nitrobenzol, die in niet minder dan 4 gevallen tot op 1°/₀ van den cirkelomtrek nauwkeurig onderling identiek worden; een slechts weinig losser verband tusschen nitrobenzol en terpineol, nitrobenzol en guajacol en isoamylacetaat en guajacol, die dit in 3 gevallen doen; een niet geheel ontbrekend verband tusschen isoamylacetaat en terpineol en terpineol en guajacol, waar ook deze eenmaal tot op 1°/₀ nauwkeurig blijken samen te vallen.

Doch ook de vectoren, ten opzichte waarvan het samenvallen van meerdere vectoren tot stand komt, staan tot elkaar in nauwe betrekking. Valeriaanzuur en scatol, ten opzichte waarvan niet minder dan vier vectoren identiek worden, hebben onderling 4 coincidenties tot op 1°/₀ nauwkeurig en ook de vectoren, ten opzichte waarvan het samenvallen van drie vectoren plaats heeft, hebben in 3 van de 4 gevallen meervoudige identiteit aan te wijzen. In hun werking op het bewustzijn moeten zij alzoo, van bepaalde gezichtspunten beschouwd, iets gemeen hebben.

Vraagt men zich af, welke physische beteekenis de gevonden betrekking zou kunnen hebben, dan moet het deze zijn, dat geurmengsels opgebouwd uit de samenvallende vectoren gemeenschappelijke fixants bezitten en deze fixants gezocht zullen moeten worden in de geurklassen, waartoe de vectoren, waartegenover zij gesteld zijn, behooren. In de parfumerie zijn een aantal van zulke fixants, die nuttige diensten bewijzen ten opzichte van bepaalde parfummengsels, welke anders niet duurzaam zouden zijn, bekend. In mijne „Physiologie des Geruchs" heb ik een reeks voorbeelden van deze soort gegeven. Hier zij er een geciteerd, dat ik uit G. Cohn's „die Riechstoffe" ontleen. Kunstmatige jasmijn wordt verkregen door samenvoeging van benzylacetaat, linalylacetaat linalool en benzylalkohol, waarbij nog een weinig indol wordt gemengd, dat „als Fixiermittel und zur Auffrischung des Geruchs" dient en desverkiezende door methylketol, scatol, propyldimethylindol, propylaethylindol, allylmethylindol, enz. vervangen kan worden. Met behulp van de door ons afgedrukte tabel moet het mogelijk zijn mengsels uit te denken, die met vooraf aan te wijzen fixants bruikbare bouquets zullen geven. Hun geschiktheid voor de praktijk der parfumerieindustrie zal intusschen behalve van de zuivere compensatie-verhoudingen nog afhangen van de verdampingsnelheid en de diffusie-snelheid der gebezigde stoffen.

In een praktisch bruikbaar parfum mogen deze laatste niet te zeer uiteenloopen.

Het meerdimensionaal karakter van den reukzin belet helaas een aanschouwelijke voorstelling van alle verhoudingen der verschillende qualiteiten in haar werking op het bewustzijn te ontwerpen. Dit is slechts partieel mogelijk, voor afzonderlijke vectoren, die men uit het geheel isoleert. Toch blijkt in het algemeen een tegenstelling te bestaan tusschen

| | | |
|---|---|---|
| isoamylacetaat | | |
| nitrobenzol | | aethylbisulfide |
| terpineol | tegenover | valeriaanzuur |
| guajacol | | scatol |

De eerste groep zou men van uit een phylogenetisch standpunt de voedselgeuren, de tweede de bederfgeuren kunnen noemen, ware het niet, dat in menig geval ook muscon bij de laatste rubriek moet worden aangesloten en het daarom wellicht veiliger is ons van elke naamgeving te onthouden. De rangschikking in elke groep, wordt door de straks vermelde wederkeerigheden beheerscht.

**Physiologie.** — De Heer HAMBURGER biedt eene mededeeling aan: *„Over een methode om enzymen en pro-enzymen uit de mucosa van het spijsverteeringskanaal te extraheeren en de topische verbreiding er van vast te stellen.”*

## I. INLEIDING; BEGINSEL DER METHODE.

De methode, die tot dusverre wordt aangewend om enzymen en pro-enzymen uit de mucosa van maag en darmkanaal te verwijderen, bestaat daarin, dat men het slijmvlies uitpraepareert en in fijnverdeelden toestand zonder of onder toevoeging van bederfwerende stoffen extraheert; vervolgens wordt door herhaald neerslaan en oplossen de te onderzoeken stof in meer of minder zuiveren toestand afgescheiden.

Wenscht men de verdeeling van het enzym over verschillende deelen van het slijmvlies te leeren kennen, m. a. w. de topische verbreiding van het enzym na te gaan, dan pleegt men van gelijke gewichtshoeveelheden of van gelijke oppervlakten extracten te vervaardigen en van deze de specifieke werking quantitatief te bepalen.

Het behoeft wel nauwelijks gezegd te worden, dat deze methoden

tamelijk gecompliceerd zijn en ook tijdroovend. Een groot nadeel is vooral, dat bij het extraheeren het enzym met zooveel andere bestanddeelen der mucosa verontreinigd wordt.

Nu hebben wij ons sedert eenigen tijd bezig gehouden met de vraag, door welke kracht de enzymen (pro-enzymen) naar de oppervlakte van het slijmvlies bewogen worden, en bepaaldelijk getracht uit te maken, of men hier te doen heeft met kataphorese, m. a. w. of in het normale leven de enzymen (pro-enzymen) meegevoerd worden met den electrischen stroom, welke ontstaat, wanneer de secerneerende zenuwvezelen langs natuurlijken weg worden geprikkeld. [1]) Over de resultaten dier onderzoekingen zullen wij thans niet uitweiden. Alleen zij hier opgemerkt, dat de proef zoo werd ingericht, dat op het slijmvlies een kolommetje gestolde agar-agar werd gelegd, waarin een platinumelectrode was ingesmolten; dan werd nagegaan of onder den invloed van een zwakken electrischen stroom, die zich van de muscularis-zijde der mucosa naar de slijmvliesoppervlakte bewoog, enzym of pro-enzym overging uit de epitheliumcellen in den agar-agar.

Dat, indien het enzym of pro-enzym inderdaad door kataphorese werd meegevoerd, het ook in den agar-agar zou overgaan, hadden wij reden te verwachten na de onderzoekingen van GRAHAM [2]), VOIGTLÄNDER [3]) e.a., volgens welke immers de diffusie-snelheid in colloïden even groot is als in het water, waarin het colloïd is opgelost. Mocht daartegen aangevoerd worden, dat deze proeven slechts genomen werden met kristalloïden, uit de onderzoekingen van C. EYKMAN [4]) is ten duidelijkste gebleken, dat colloïden in andere colloïden kunnen diffundeeren (gelatine in agar-agar).

Doch alvorens te trachten, den invloed van een constanten stroom op den overgang van enzym in agar-agar vast te stellen, wenschten wij te weten, in hoeverre ook zonder doorvoeren van een stroom, ferment in den agar-agar zou diffundeeren.

Het bleek nu met groote duidelijkheid, dat zulk een overgang plaats vond. In dit feit scheen ons een middel te zijn gelegen, om enzymen en wellicht ook pro-enzymen op gemakkelijke wijze in niet te onzuiveren toestand uit slijmvliezen te verkrijgen. Wel zou daarmede niet een volkomen extractie te bereiken zijn, maar er bestond

---

[1]) HAMBURGER. Osmotischer Druck u. Ionenlehre. Bd. II. S. 433 ff.

[2]) GRAHAM, Liebig's Annalen 121, 1862 S. 1.

[3]) VOIGTLÄNDER, Zeitschr. f. physik. Chemie. 3, 1889 S. 316.

Vergel. voor de literatuur over dit onderwerp, COHEN, Vorträge für Aerzte über Physikalische Chemie 2e Aufl. 1907 S. 128.

[4]) C. EYKMAN, Centralbl. f. Bakteriol. 29, 1901, S. 841.

toch hoop, dat de methode gebruikt zou kunnen worden om het enzymgehalte van verschillende deelen van een slijmvlies langs eenvoudigen weg vergelijkenderwijze te kunnen bepalen.

## II. Uitvoering der methode.

Stukken glazen buis, die in onze experimenten een inwendige middellijn hadden van 22 mm. en een hoogte van 30 mm., werden aan eene zijde met behulp van amaril vlak geslepen, en met die zijde geplaatst op een glazen plaat, liefst van spiegelglas. In ieder der glazen cylindertjes bracht men met behulp van een pipet, 3 cc. vloeibaren agar-agar. Over de bereidingswijze van deze vloeistof zal ik hier niet spreken; men vindt die trouwens in de handboeken over bacteriologische techniek. Alleen zij hier opgemerkt, dat het aanbevelenswaardig is, de vloeibare agar-agaroplossing, alvorens haar in de pipet af te meten, tot ± 45° te laten afkoelen; anders heeft men de kans, dat wegens de grootere vloeibaarheid der solutie, deze voor een deel onder den glazen cylinder door wegvloeit.

Na eenigen tijd zijn de agarkolommetjes vast geworden, en plaatst men ze, nog omgeven door het glazen omhulsel, op de te onderzoeken gedeelten van het uitgespreide zoo noodig gereinigde slijmvlies. Voor die reiniging, welke ook ten doel heeft, eventueel aanwezig slijm te verwijderen, plegen wij NaCl 0,9°/₀ te gebruiken. Uit opzettelijk daarvoor ingestelde onderzoekingen aan het maagslijmvlies is echter gebleken, dat althans voor dit orgaan, afspoeling met water ook goede resultaten geeft.

Op het zoo noodig gereinigde slijmvlies dan, blijven de agarkolommetjes 8 of meer uren staan, ten einde den enzymen en pro-enzynen gelegenheid te geven in den agar te diffundeeren.

Geldt het onderzoek het *pepsine incl. pepsinogeen van het maagslijmvlies*, dan worden de agar-kolommetjes, die er op gestaan hebben, fijngehakt en vermengd met 3 cc. HCl van 0.4°/₀. Wij gebruiken hiervoor cylindrische fleschjes met ingeslepen glazen stop; zij hebben een diameter van 24 mm. en een hoogte van 48 mm. In de fleschjes brengt men eiwitkolommetjes, bereid volgens de methode van Mett. Nadat deze 10 of meer uren bij lichaamstemperatuur met de agarsuspensie in aanraking zijn geweest, wordt, met behulp van een millimetermaat, aan beide zijden van het eiwitkolommetje bepaald, hoeveel er van verteerd is; vervolgens worden de eiwitkolommetjes er weder ingelegd en de metingen eenige uren later herhaald. In ieder fleschje hadden wij gewoonlijk twee eiwitbuisjes. Wellicht zal men de opmerking maken, dat de aanwezigheid van vaste partikeltjes

agar de inwerking van de pepsine op het eiwit moet belemmeren. Dit blijkt echter niet het geval te zijn: vooreerst neemt men waar, dat aan alle vier zijden der twee eiwitbuisjes steeds nagenoeg hetzelfde kolommetje eiwit verteerd is, wat allicht niet het geval zou zijn, indien nu en dan een agarpropje den toegang van het verterende vocht belemmerde. En in de tweede plaats is ons gebleken, dat wanneer de proef gedaan wordt met vloeistof, waaruit de agarpartikeltjes door filtratie zijn verwijderd, de graad van vertering precies dezelfde is als wanneer de agarpartikeltjes nog in de vloeistof aanwezig zijn.

Geldt het onderzoek alleen het *pepsinogeen* van het maagslijmvlies, dan wordt in plaats van neutralen agar alkalische er op geplaatst, en wel een agarmassa van 2°/₀ in $Na_2CO_3$ van 3 p. mille. Uit de onderzoekingen van LANGLEY[1]) is namelijk gebleken, dat door $Na_2CO_3$ in deze concentratie de pepsine ontleed wordt, het pepsinogeen daarentegen niet.

Het ligt voor de hand, dat behalve pepsine en pepsinogeen, ook *chymosine* en *prochymosine* in den neutralen agar zal trekken. Inderdaad blijkt dan ook, dat de agar-massa de eigenschap heeft verkregen om melk te doen stollen.

Op soortgelijke wijze als het maagslijmvlies laat zich ook het *darmslijmvlies* onderzoeken. Het blijkt, dat de neutrale agar zoowel *enterokinase* als *erepsine* in zich opneemt. De hoeveelheid enterokinase, aanwezig in den agar, wordt bepaald door den agar fijn te hakken, met water te vermengen, af te filtreeren en het aldus verkregen extract met inactief perssap van een versche pancreasklier en twee eiwitbuisjes in aanraking te brengen.

De aandachtige lezer zal opmerken, dat hier geen agar-partikeltjes bij de vertering van het eiwit aanwezig zijn, zooals bij het maagsap het geval was; zij werden vóór de inwerking van het vocht op de eiwitbuisjes verwijderd. Het was ons namelijk gebleken, dat de omzetting van eiwit door *trypsine*, door de tegenwoordigheid van agar-agar in hooge mate belemmerd wordt.

Voor de bepaling van de hoeveelheid in den agar getrokken *erepsine* hebben wij eveneens den agar-agar verwijderd en dus op het pepton het *helder* extract laten inwerken.

Wij laten thans de resultaten van eenige onderzoekingen volgen, die met de hier in korte trekken beschreven methode zijn verricht. Uitvoeriger mededeelingen zullen elders gepubliceerd worden. Enkele

---

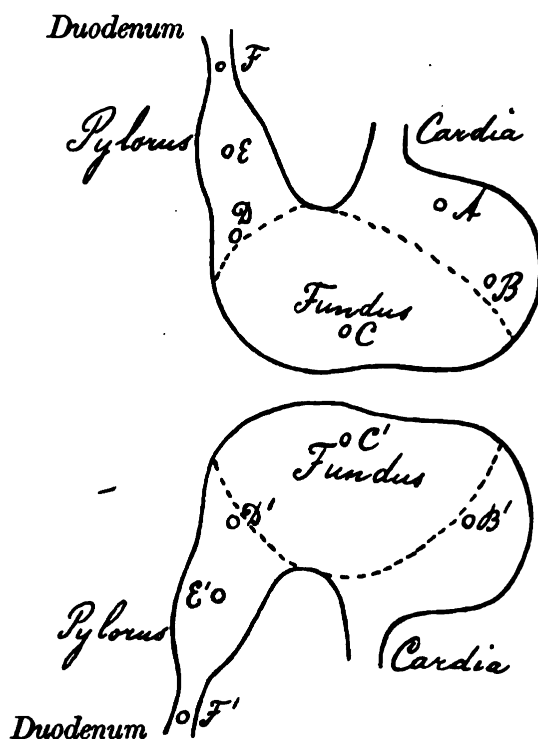
1) LANGLEY Journal of Physiology 3 1882 p. 253.
LANGLEY and EDKINS Ibid 7 1886 p. 371.

bijzonderheden bij de wijze van proefneming worden nog hieronder vermeld.

## III. Eenige Experimenten.

### 1. *Verbreiding der pepsine (incl. pepsinogeen) over de maagmucosa.*

Een varkensmaag werd langs de groote en kleine curvatuur in twee symmetrische helften geknipt en met NaCl 0.9 °/₀ afgespoeld. Vervolgens werden de beide helften vlak uitgespreid en op de hieronder aangeduide plaatsen *A*, *B*, *C*, enz. kolommetjes van neutralen agar-agar van 2 °/₀ gezet.




Gelijk men ziet, ligt *A* in de cardiastreek,
*B* in het grens-gebied van cardia- en fundus-gedeelte,
*C* in de fundusstreek,
*D* in het grensgebied van fundus- en pylorus-gedeelte,
*E* in de pylorusstreek,
*F* op het duodenum nabij den pylorus.

Merken wij omtrent deze figuur nog op, dat voor *al* onze proeven met maagslijmvlies de letters dezelfde beteekenis hebben.

In het experiment, waarvan tabel I de resultaten geeft, bleven de agar-kolommetjes van 3 cc gedurende 14½ uren op het slijmvlies staan. Vervolgens werd de agar fijngehakt, met 3 cc 0.4 % HCl vermengd en ieder van de aldus verkregen mengsels in de gelegenheid gesteld om op twee buisjes met eiwit den verterenden invloed uit te oefenen.

De vier getallen, die in de volgende tabel telkens door een + teeken zijn verbonden, stellen de lengten der eiwit-kolommetjes voor, die aan de 4 zijden der twee buisjes zijn verteerd.

TABEL I.

Verteerd na 12½ uren.

| | |
|---|---|
| *A* . . . . ½ + ½ + ½ + ½ = 2 m.M. | *A'* . . . ½ + ¼ + ½ + ½ = 1¾ m.M. |
| *B* . . . . ¾ + ¾ + ½ + ¾ = 2¾ „ | *B'* . . . ¾ + ¾ + ¾ + ¾ = 3 „ |
| *C* . . . . 2 + 2 + 2 + 2¼ = 8¼ „ | *C'* . . . 2 + 2 + 2 + 2 = 8 „ |
| *D* . . . . 1½ + 1¼ + 1½ + 1½ = 5¾ „ | *D'* . . . 1½ + 1½ + 1½ + 1½ = 6 „ |
| *E* . . . . 1¼ + 1¼ + 1½ + 1¼ = 5¼ „ | *E'* . . . 1¼ + 1¼ + 1¼ + 1½ = 5¼ „ |
| *F* . . . . ½ + ½ + ½ + ½ = 1½ „ | *F'* . . . ½ + ½ + ½ + ½ = 1½ „ |

Uit deze tabel blijkt:

1o. *dat in de cardiastreek* (*A* en *A'*) *het pepsinegehalte gering is, naar den fundus* (*B* en *B'*) *toeneemt, daar* (*C* en *C'*) *zijn hoogtepunt bereikt om naar den pylorus toe* (*D* en *D'*) *af te nemen. In het duodenum is ook nog pepsine aanwezig, doch de hoeveelheid daarvan is gering*;

2o. dat in de beide maaghelften op overeenkomstige plaatsen het pepsinegehalte gelijk was.

Wanneer wij hier spreken van pepsine, dan bedoelen wij pepsine + pepsinogeen. Gelijk toch boven reeds is medegedeeld en hieronder nog uit een experiment nader zal blijken, gaat ook pepsinogeen in den agar over. Zij wordt door vermenging met zoutzuur omgezet in pepsine en dus met de reeds vrije pepsine quantitatief bepaald.

## 2. *Verbreiding van het pepsinogeen.*

Gelijk reeds gezegd, is door onderzoekingen van LANGLEY [1]) ge-

[1]) LANGLEY, l. c.

bleken, dat in tegenstelling met pepsine het pepsinogeen een $Na_2CO_3$-solutie van 0.3°/₀ verdraagt, zonder te worden ontleed. Wij hebben daarvan gebruik gemaakt om te trachten aan het slijmvlies pepsinogeen te onttrekken.

Tot dit doel werden op het slijmvlies agarkolommetjes geplaatst van 2°/₀ agar in $Na_2CO_3$-oplossing van 0.3°/₀. De kolommetjes hadden weder een middellijn van 22 mM. en een inhoud van 3 cc.

In het voorbijgaan zij opgemerkt, dat door afzonderlijke proeven ons gebleken was, dat in zulke alkalische agar-agarmassa de pepsine terstond haar verterend vermogen voor goed verliest.

Wij hebben aan de wijze van experimenteeren niet veel meer toe te voegen. Slechts zij hier nog vermeld, dat de alkalische agar, na met het slijmvlies in aanraking te zijn geweest, werd fijngehakt, met verdund zoutzuur geneutraliseerd en daarna vermengd met 3 cc. HCl van 0.4°/₀. Hierdoor moest de pepsine uit het pepsinogeen vrijkomen. De verteringsproeven met eiwitbuisjes leverden het resultaat op, dat in de navolgende tabel is opgeteekend. Hier zijn de lengten der 4 verteerde eiwitkolommetjes in de twee buisjes telkens bij elkander opgeteld.

## TABEL III.

**De agar-kolommetjes zijn 20 uur op het slijmvlies gehouden.**

| Eiwitvertering na 8 uren | Eiwitvertering na 18 uren |
|---|---|
| *A* . . . 0 m.M.; *A'* . . . 0 m.M. | *A* . . . 0 m.M.; *A'* . . . 0 m.M. |
| *B* . . . 0 „ ; *B'* . . . 0 „ | *B* . . . 1½ „ ; *B'* . . . 1½ „ |
| *C* . . . 8 „ ; *C'* . . . 8 „ | *C* . . . 10 „ ; *C'* . . . 9½ „ |
| *D* . . . 4.4 „ ; *D'* . . . 4.2 „ | *D* . . . 6.2 „ ; *D'* . . . 6.9 „ |
| *E* . . . 4 „ ; *E'* . . . 4 „ | *E* . . . 5 „ ; *E'* . . . 5.2 „ |
| *F* . . . 0 „ ; *F'* . . . 0 „ | *F* . . . 1 „ ; *F'* . . . 1 „ |

Men ziet, *dat uit het cardiagedeelte* (*A* en *A'*) *geen pepsinogeen geextraheerd is;* trouwens in verscheiden proeven kon met neutralen agar ook geen pepsine er aan onttrokken worden.

*In het grensgebied van cardia en fundus bleek pepsinogeen voorhanden, doch in geringe hoeveelheid. Aanzienlijk was de quantiteit in den fundus* (*C*)*; zij nam langzamerhand naar den pylorus af* (*D* en *E*).

### 3. *In hoeverre heeft de tijdsduur, dien de agar-kolommetjes op het slijmvlies staan, invloed op de hoeveelheid van het aan te toonen enzym en pro-enzym?*

Voor deze proeven werd de maag in twee symmetrische helften verdeeld. Op de eene helft werden bij *A*, *B*, *C* enz. twee *neutrale* agar-kolommetjes geplaatst, en op de overeenkomstige plaatsen *A'*, *B'*, *C'* enz. van de andere helft, twee kolommetjes *alkalischen* agar. Een der kolommetjes bij *A*, bij *B*, bij *C* enz. als ook bij *A'*, *B'*, *C'* enz. werd weggenomen en verwerkt, na 18 uren op het slijmvlies te hebben gestaan, de andere reeks *A*, *B*, *C* enz. *A'*, *B'*, *C'* enz. werd 36 uren op het slijmvlies gelaten. In beide proevenreeksen werd den aldus actief geworden agar gelegenheid gegeven, 20 uren op de eiwitbuisjes in te werken. De tabellen zullen thans zonder nadere verklaring duidelijk zijn.

TABEL IV.

Bepaling van de hoeveelheid pepsine + pepsinogeen, overgegaan in den neutralen agar nadat deze op het slijmvlies gestaan heeft gedurende

| | 18 uren | 36 uren |
|---|---|---|
| *A* | 0 m.M. verteerd | 2½ m.M. verteerd |
| *B* | 1 " " | 3½ " " |
| *C* | 4.8 " " | 16 " " |
| *D* | 3.4 " " | 7 " " |
| *E* | 3 " " | 5.4 " " |
| *F* | 0 " " | 2 " " |

TABEL V.

Bepaling van de hoeveelheid pepsinogeen, overgegaan in den alkalischen agar, nadat deze op het slijmvlies gestaan heeft gedurende

| | 18 uren | 36 uren |
|---|---|---|
| *A'* | 0 m.M. eiwit verteerd | 1½ m.M. eiwit verteerd |
| *B'* | 0 " " " | 2¼ " " " |
| *C'* | 3.8 " " " | 10 " " " |
| *D'* | 2.4 " " " | 5½ " " " |
| *E'* | 1.2 " " " | 3 " " " |
| *F'* | 0 " " " | 1 " " " |

Uit de beide tabellen blijkt, dat na 36 uren meer pepsine en ook meer pepsinogeen in den agar is overgegaan dan na 18 uren.

Verder leert een vergelijking tusschen de tabellen IV en V, dat de vertering van eiwit in de proeven waar neutrale agar is gebruikt, aanzienlijker is dan daar waar alkalische agar is aangewend. Dit resultaat kan nog als een bevestiging van de betrouwbaarheid der methode dienen; immers in den neutralen agar kan pepsine en pepsinogeen dringen, welke laatste onder den invloed van zoutzuur pepsine laat vrijkomen, terwijl in den alkalischen agar alleen pepsinogeen wordt gevonden. En gelijk wij bij al onze onderzoekingen zonder uitzondering hebben gezien, doet zich het gehalte aan enzym en pro-enzym op identische punten van de twee symmetrische maaghelften als hetzelfde kennen.

Ik wil hierbij nog opmerken, dat de vertering van serumeiwit veel sneller plaats heeft dan van het hier gebruikte eiereiwit. Glässner heeft op dit voordeel van gestold serum het eerst de aandacht gevestigd, en ik kan het uit eigen ervaring bevestigen. Het serumeiwit heeft bovendien het voordeel, dat het zonder voorbereiding, zooals fijnknippen en filtreeren, dus na eenvoudige stolling, in glazen buizen te gebruiken is.

Door toevallige omstandigheden is juist voor de in dit opstel beschreven proeven het serumeiwit niet aangewend.

### 4. *Verdeeling van het lebferment.*

Om het lebferment aan te toonen, en de verdeeling er van in het maagslijmvlies te leeren kennen, werd nagenoeg dezelfde methode toegepast als voor de studie van pepsine en pepsinogeen. Alleen bezaten de agar-kolommetjes hier een grootere middellijn (35 mm., in plaats 22) dan voor de pepsineproeven. Dienovereenkomstig was dan ook de inhoud 5 cc. in plaats van 3 cc. Voorts moest ook uit den aard der zaak het lebferment op een andere wijze gedoseerd worden. Nadat namelijk de kolommetjes eenige uren op het slijmvlies hadden vertoefd, werd de agar fijngehakt en in de reageerbuis vermengd met $^1/_2$ cc. HCl 0.4°/₀ en daarna met 10 cc. melk. Dan werd de reageerbuis gedompeld in een waterbad van 37.5° en werd na iedere halve minuut aangeteekend, waar stolling had plaatsgegrepen.

De aanwezigheid van een weinig zoutzuur werkte hier niet schadelijk op het experiment; door contrôleproeven was uitgemaakt, dat in een mengsel van 5 cc. neutralen agar, $^1/_2$ cc. HCl van 0.4°/₀ en 10 cc. melk, de stremming langer dan een uur uitbleef. Zooals

uit de thans volgende proevenreeks blijkt, kan de toevoeging van slechts $^1/_2$ cc. HCl nauwelijks invloed hebben uitgeoefend op de stremmende werking van het lebferment.

TABEL VI.

Stremming is zichtbaar:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| door | *A* | na | 3 | minuten; | door | *A'* | na | 3 | minuten. |
| „ | *B* | „ | 2 | „ | „ | *B'* | „ | 2 | „ |
| „ | *C* | „ | 1 | „ | „ | *C'* | „ | 1 | „ |
| „ | *D* | „ | 1½ | „ | „ | *D'* | „ | 1½ | „ |
| „ | *E* | „ | 2½ | » | „ | *E'* | „ | 2½ | „ |

*Deze proef leert, dat de verdeeling van chymosine (incl. prochymosine) met die van de pepsine (incl. propepsine) parallel gaat,* een resultaat dat met de waarnemingen van anderen overeen komt. [1])

In de tweede plaats leert het experiment, dat op overeenkomstige plaatsen in de twee symmetrische maaghelften de lebwerking gelijk is.

5. *Verdeeling der enterokinase over de darmmucosa.*

Op het slijmvlies van het in de lengterichting opengeknipte duodenum, jejunum, ileum, coecum en colon werden agarkolommetjes van 3 cc inhoud geplaatst. Nadat deze 24 uren daarop gestaan hadden, werd de agar-agar fijn gehakt, en met 3 cc Na Fl-oplossing van 2°/₀ geextraheerd. Vervolgens werd bij 2 cc van het filtraat 6 cc verdund pancreassap gevoegd. Het laatste was verkregen door een pancreasklier van een pas geslacht varken uit te persen en het aldus verkregen dikke vocht met Na Fl-oplossing van 2°/₀ te vermengen en het mengsel te filtreeren.

In het mengsel van 6 cc van het aldus verkregen verdund pancreasvocht en 2 cc agar-filtraat werden twee eiwitbuisjes gelegd.

Daarnaast werden nog controleproeven ingezet met 2 cc agarfiltraat en 6 cc Na Fl-oplossing, in plaats van 6 cc van het verdunde pancreasvocht. De vertering van het eiwit werd opgeteekend na 19 en 44 uren.

De volgende tabel geeft het resultaat van een der genomen proevenreeksen.

---

[1]) Nencki u. Sieber. Zeitschr. f. physiol. chemie 32 1901 S. 291; Pekelharing. Ibid. 35 1902 S.8; Pawlow u. Parastschuk. Ibid 42 1904 S. 415; Sawjalow. Ibid 46 1905 S. 307.

TABEL VII.

| | 2 cc duodenum-agar extract | | 2 cc jejunum-agar extract | | 2 cc ileum-agar extract | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | + 6 cc pankreas vocht | + 6 cc NaFl. oplossing | + 6 cc pankreas vocht | + 6 cc NaFl. oplossing | + 6 cc pankreas vocht | + 6 cc NaFl. oplossing |
| Eiwit verteerd na 19 uur | 7.2 m.M. | 0 m.M. | 6.4 m.M. | 0 m.M. | 5.6 m.M. | 0 m.M. |
| Eiwit verteerd na 44 uur | 12.4 " | 0 " | 11.2 " | 0 " | 10 " | 0 " |

Uit deze proevenreeks blijkt, *dat de hoeveelheid enterokinase van boven naar beneden geleidelijk afneemt, een resultaat dat overeenkomt met hetgeen verkregen werd door* CHEPOWALNIKOW, DELEZENNE, FROUIN *en door* FALLOISE.

Over de experimenten, waaruit gebleken is, dat bij de vertering van eiwit door trypsine, de aanwezigheid van agar een remmenden invloed uitoefent, zal ik hier niet spreken, ook niet over den invloed, dien de duur der aanraking van den agar met het darmslijmvlies heeft op den overgang der enterokinase. Over een en ander nader in de uitvoeriger mededeeling.

Alleen zij nog een proef vermeld, waaruit blijkt, hoe zich de in den agar gediffundeerde enterokinase, na fijnhakken van den agar en vermengen daarvan met water, over agar en water verdeelt.

5 cc vloeibare agar wordt vermengd met 2 cc waterig extract van darmslijmvlies. Van dit mengsel worden 2 $\times$ 3 cc afgemeten en in de bekende cylindrische buisjes gegoten. Nadat de agar is gestold, wordt deze fijngehakt en vermengd telkens met 2 cc water. Het mengsel blijft een uur bij lichaamstemperatuur staan om den agar de gelegenheid te geven, enterokinase af te staan.

Na afkoeling wordt gefiltreerd, tweemaal 1 cc afgemeten en met 2 cc inactief pancreasvocht (1 : 25) vermengd. In beide mengsels I en II worden twee eiwitbuisjes gebracht.

Naast de genoemde proef wordt een andere gedaan die volkomen gelijkluidend is, doch alleen van de vorige verschilt, doordien in plaats 5 cc. agar, 5 cc. water wordt genomen. Van fijnhakken is hier natuurlijk geen sprake. De kwantiteiten blijven echter dezelfde.

TABEL VIII.

| Vloeistof | Vertering na | Proef I | Proef II |
|---|---|---|---|
| 5cc **agar**+2cc darmextract; hiervan 2×3cc fijngehakt; ieder vermengd met 2 cc water; hiervan 2×1cc vermengd ieder met 2cc pankreasvocht. | 4 uur | 1 + 1 + 1 + 1 = 4 m.m. | 1 + 1 + 1 + ¾ = 3¼ m.m. |
| | 16 uur | 3½+4½+3½+4=15½ m.m. | 3½+3½+3½+4=14½ m.m. |
| | 25 uur | 6 + 5 + 6 + 5 = 22 m.m. | 5 + 5 + 6 + 5 = 21 m.m. |
| 5 cc **water** + 2cc darmextr.; hiervan 2× 3 cc; ieder vermengd met 2 cc water; hiervan 2×1cc vermengd ieder met 2 cc pankreasvocht. | 4 uur | 1¼ + 1¼ + 1 + 1=4½ m.m. | 1¼ + 1 + 1½ + 1¼ = 5 m.m. |
| | 16 uur | 4 + 4½ + 4 + 4 = 16½ m.m. | 4 + 3½ + 4 + 4½ = 17 m.m. |
| | 25 uur | 6 + 5 + 5 + 6 = 22 m.m. | 5 + 5 + 5 + 6 = 21 m,m. |

Deze tabel laat wel geen twijfel, of de methode, volgens welke de agar met water geëxtraheerd wordt, geeft betrouwbare resultaten. *Zij blijken dezelfde te zijn alsof de agar zelf water was. De enterokinase moet zich gelijkelijk over agar en water verdeelen.*
Hetzelfde namen wij ook waar bij pepsine.

Eindelijk nog een proevenreeks, waaruit blijkt, dat ook de *erepsine* in den agar-agar over gaat en dat men daarin een middel heeft, om haar verdeeling over het darmslijmvlies vast te stellen.

## 6. *Verdeeling der erepsine.*

De hier gebruikte 2°/₀ agar werd niet opgelost in water, doch in NaFl van 2°/₀, en wel, omdat de hoeveelheid erepsine, die uit den darm in den agar overgaat, in den tijd, bij de vorige experimenten beschikbaar gesteld, niet groot genoeg was. Het bleek dus gewenscht, den agar minstens 2 × 24 uren op het slijmvlies te laten, doch dan diende ook gezorgd te worden, dat zooveel mogelijk rotting voorkomen werd.

Gelijk bekend is, bestaat de werking van erepsine, in haar ver-

mogen, hemialbumose en pepton om te zetten in producten, die niet meer de biureetreactie geven.

VERNON [1]) heeft daarop een colorimetrische methode gegrondvest, om de mate van omzetting, die erepsine teweegbrengt, te bepalen, en o.a. FALLOISE [2]) heeft van die methode met goed gevolg gebruik gemaakt. Ook wij hebben die methode in toepassing gebracht, evenwel in eenigszins gewijzigden vorm. In hoofdzaak bestond zij daarin, dat een oplossing van $CuSO_4$ vermengd werd met een solutie van $NaOH$; met de aldus verkregen vloeistof geeft pepton een paarsroode verkleuring. Hoe meer van de pepton-oplossing, waarvan men is uitgegaan, door erepsine is omgezet, des te zwakker zal de paarsroode verkleuring zijn. Men beproeft nu, met hoeveel water de standaardvloeistof verdund moet worden, om de waargenomen paarsroode kleur te geven.

Zoo heeft dan een onzer proeven het volgende geleerd.

In de pepton-oplossing (WITTE), waarop het *duodenaal*-agar extract heeft ingewerkt, zijn nog **46.2°/₀** van de oorspronkelijke hoeveelheid pepton voorhanden. In de pepton-oplossing, waarop het *jejunum*-agar extract gedurende denzelfden tijd heeft ingewerkt, zijn nog **16°/₀** van de oorspronkelijke hoeveelheid pepton voorhanden en eindelijk waar *ileum*-agar extract gedurende denzelfden tijd heeft ingewerkt, **14°/₀** van de oorspronkelijke hoeveelheid pepton.

*Hieruit volgt, dat in jejunum en ileum meer erepsine aanwezig was dan in duodenum,* hetgeen in zooverre overeenkomt met de resultaten, verkregen door FALLOISE [1]), dat ook wij veel meer erepsine waarnemen in jejunum dan in duodenum. In ileum echter is bij ons de hoeveelheid erepsine veel grooter dan in het duodenum, bij FALLOISE ligt het verschil wel in dezelfde richting, doch het is slechts gering. Intusschen dient in het oog te worden gehouden, dat onze proeven betrekking hebben op het varken en die van FALLOISE op den hond.

Laat ik nog toevoegen, dat in de PEYER'sche plâques nauwelijks erepsine of enterokinase werd gevonden.

Een aantal van de voor het hierboven beschreven onderzoek verrichte proeven zijn uitgevoerd door den Heer R. A. B. OOSTERHUIS, Med. cand., assistent aan het physiologisch laboratorium.

---

1) VERNON. Journal of Physiology. 30, 1903, p. 330.
2) FALLOISE. Archives internat. de Physiol. 2, 1903/4, p. 299.

BESLUIT.

Uit bovenstaande onderzoekingen is gebleken:

1°. Dat wanneer men agarkolommetjes op het slijmvlies van maag en darmkanaal plaatst, enzymen en pro-enzymen daaruit worden opgenomen en in den agar binnendringen. Als zoodanig werden onderzocht pepsine, incl. pepsinogeen chymosine en prochymosine, enterokinase en erepsine.

2°. Genoemde fermenten laten zich, althans voor een deel, door water uit den agar-agar extraheeren. Uit quantitatieve onderzoekingen is zelfs gebleken, dat pepsine + pepsinogeen en ook enterokinase zich over den agar-agar en het water gelijkelijk verdeelen.

3°. De sub 1 en 2 genoemde feiten geven een eenvoudig middel aan de hand, om genoemde fermenten uit het slijmvlies te verwijderen en ook om de verdeeling er van quantitatief vast te stellen.

Hiertoe heeft men slechts kolommetjes gestolden agar-agar van gelijke afmeting denzelfden tijd op verschillende deelen van het slijmvlies te laten liggen en daarna van het waterig extract van den agar de specifieke werking van het te onderzoeken enzym vergelijkend quantitatief te bepalen.

4°. De resultaten met deze nieuwe methode verkregen ten aanzien van de verdeeling van gemelde fermenten in het spijsverteringskanaal van het varken, stemmen overeen met die, welke met behulp van de gebruikelijke extractie-methoden door het meerendeel der onderzoekers bij den hond zijn verkregen.

5°. De voordeelen der methode boven de gebruikelijke zijn gelegen, behalve in den grooteren eenvoud, ook nog in de omstandigheid, dat het te onderzoeken enzym veel minder verontreinigd wordt door ontledingsproducten der slijmvlieselementen.

Vooral ook voor het onderzoek naar de verbreiding van enzymen bij individuen, die tijdens het leven aan ziekte van maag of darmkanaal hebben geleden, (maagzweren, darmzweren, enz.) schijnt mij de methode van nut te kunnen zijn.

Verder laat zich voorzien, dat behalve de tot nu toe onderzochte fermenten, ook andere in den agar-agar zullen overgaan en op soortgelijke wijze zullen kunnen gedoseerd worden.

Eindelijk schijnt mij de methode zeer aanbevelenswaardig bij collegeproeven, vooral ook omdat men na bedeeling van den agar met congorood of dergelijken indicator, het zuur- of alkaligehalte op demonstratieve wijze er mede kan aantoonen.

*Groningen*, September 1907.

**Wiskunde.** — De Heer KORTEWEG biedt eene mededeeling aan van den Heer J. A. BARRAU: „*De uitbreiding der Configuratie van* KUMMER *op Ruimten van* $(2^\nu-1)$ *Afmetingen.*"

(Mede aangeboden door den Heer P. H. SCHOUTE).

§ 1. Stelt men door $S_1$ voor het schema $\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}$, opgebouwd uit twee letters en door $S_2$ hetzelfde schema, uitgevoerd in twee nieuwe letters $c$ en $d$; stelt men evenzoo door $T$ voor het teekenschema $\begin{smallmatrix} + & + \\ + & - \end{smallmatrix}$ en door $-T$ het tegengestelde $\begin{smallmatrix} - & - \\ - & + \end{smallmatrix}$, dan verkrijgt men door de samenvoeging:

$$\begin{matrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{matrix} \quad \text{en} \quad \begin{matrix} T & T \\ T & -T \end{matrix}$$

de beide schema's:

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{matrix} \quad \text{en} \quad \begin{matrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{matrix}$$

Door nu *elke* rij van vier letters beurtelings te voorzien met de teekens uit *elke* rij van het teeken-schema, ontstaan 16 viertallen algebraïsche getallen, die, zooals welbekend is [1]), opgevat zoowel als homogene coördinaten van punten, alsook als coëfficienten van vlakken in $R_3$, de elementen der $Cf\,(16_6)$ van KUMMER voorstellen. Immers met elk element zijn incident de elementen van andere soort, voorgesteld door de 3 gepermuteerde *letter*-viertallen en wel voor elk daarvan met de helft der teekencombinaties.

§ 2. Noemt men nu het letter- en het teeken-schema van 4 resp. $S_1$ en $T$ en herhaalt men de beschreven samenvoeging, dan ontstaan dergelijke schema's van 8, waarvan dat der letters de permutaties geeft eener *regelmatige*, uitsluitend uit binaire substituties bestaande $G_8$ van den graad 8 [2]), terwijl dat der teekens *anallagmatisch* is [3]), d. w. z. elk tweetal rijen vertoont evenveel teekenveranderingen als teeken-

[1]) Zie bijv. JESSOP *Line-Complex* p. 23 of HUDSON *Kummer's Surface* p. 5.

[2]) Bijv. MILLER *Quart. Journ.* 28 p. 255, groep 8 No. 4.

[3]) LUCAS *Récréations Mathématiques* II p. 113; *Nieuw Archief voor Wiskunde* 7 p. 256.

permanenties. De schema's worden (dat der teekens eenigszins anders gerangschikt):

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* | *g* | *h* |
| II | *b* | *a* | *d* | *c* | *f* | *e* | *h* | *g* |
| III | *c* | *d* | *a* | *b* | *g* | *h* | *e* | *f* |
| IV | *d* | *c* | *b* | *a* | *h* | *g* | *f* | *e* |
| V | *e* | *f* | *g* | *h* | *a* | *b* | *c* | *d* |
| VI | *f* | *e* | *h* | *g* | *b* | *a* | *d* | *c* |
| VII | *g* | *h* | *e* | *f* | *c* | *d* | *a* | *b* |
| VIII | *h* | *g* | *f* | *e* | *d* | *c* | *b* | *a* |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + | + | + | + | + | + | + | + |
| 2 | + | + | + | + | − | − | − | − |
| 3 | + | + | − | − | + | + | − | − |
| 4 | + | − | + | − | + | − | + | − |
| 5 | + | − | − | + | − | + | + | − |
| 6 | + | − | − | + | + | − | − | + |
| 7 | + | − | + | − | − | + | − | + |
| 8 | + | + | − | − | − | − | + | + |

Door elk der letterrijen van elk der teekencombinaties te voorzien, ontstaan 64 achttallen van algebraïsche getallen, die we de notaties I 1, I 2, .... VIII 8 toekennen. Vatten wij deze getallen op, zoowel als homogene coördinaten van punten, alsook als cöefficienten van vergelijkingen van $R_6$ in $R_7$, dan is elk element incident met $7 \times 4 = 28$ van andere soort, n.l. met de helft der teekencombinaties voor elke letterpermutatie; er ontstaat dus eene *Cf.* $(64_{28})$, die wij als $K^{VII}$ zullen aanduiden.

Evenals bij $K^{III}$ gelukt het op meerdere wijzen de *Cf.*elementen te vereenigen tot simplexen *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*. Zulk eene indeeling is bijv.:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | I 1 | II 4 | III 5 | IV 3 | V 7 | VI 8 | VII 6 | VIII 2 |
| *B* | I 2 | II 7 | III 6 | IV 8 | V 4 | VI 3 | VII 5 | VIII 1 |
| *C* | I 3 | II 6 | III 7 | IV 1 | V 5 | VI 2 | VII 4 | VIII 8 |
| *D* | I 4 | II 1 | III 8 | IV 6 | V 2 | VI 5 | VII 3 | VIII 7 |
| *E* | I 5 | II 8 | III 1 | IV 7 | V 3 | VI 4 | VII 2 | VIII 6 |
| *F* | I 6 | II 3 | III 2 | IV 4 | V 8 | VI 7 | VII 1 | VIII 5 |
| *G* | I 7 | II 2 | III 3 | IV 5 | V 1 | VI 6 | VII 8 | VIII 4 |
| *H* | I 8 | II 5 | III 4 | IV 2 | V 6 | VI 1 | VII 7 | VIII 3 |

De tabel beduidt, dat de 8 hoekpunten van bijv. het simplex *A* resp. de punten I 1, II 4 enz. volgens de oude notatie zijn, terwijl tevens de 8 overstaande zij-$R_6$ van het simplex door diezelfde notaties werden voorgesteld.

De samenhang van de $Cf$-elementen laat zich nu weergeven door een diagram (plaat I), waarvan de rijen de $R_6$, de kolommen de punten aangeven, terwijl incidentie van eene $R_6$ met een punt door het merken (arceeren) van de snijding der betreffende rij en kolom wordt aangegeven.

Wij zien, dat het diagram zich in meer gecondenseerden vorm laat brengen als:

| | *A* | *B* | *C* | *D* | *E* | *F* | *G* | *H* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | *S* | *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* | *g* |
| *B* | *a* | *S* | *g* | *f* | *e* | *d* | *c* | *b* |
| *C* | *b* | *g* | *S* | *e* | *f* | *c* | *d* | *a* |
| *D* | *c* | *f* | *e* | *S* | *g* | *b* | *a* | *d* |
| *E* | *d* | *e* | *f* | *g* | *S* | *a* | *b* | *c* |
| *F* | *e* | *d* | *c* | *b* | *a* | *S* | *g* | *f* |
| *G* | *f* | *c* | *d* | *a* | *b* | *g* | *S* | *e* |
| *H* | *g* | *b* | *a* | *d* | *c* | *f* | *e* | *S* |

Hierin stelt $S$ eene simplex-vulling voor, elk der andere letters een schema $(8_3)$, dat het incidentie-verband tusschen de elementen van twee simplexen aangeeft. Deze schema's $(8_3)$ zijn alle gedegenereerd in twee $(4_3)$, elk paar onzer simplexen is dus op gelijke wijze verbonden en vormt eene $Cf\,(16_{10})$ van hetzelfde type.

§ 3. Naar analogie met de bekende ontbinding der $K^{III}$ in 4 paarsgewijze in Möbius-ligging verkeerende viervlakken, ligt het voor de hand ook de ligging van twee der simplexen, bijv. $A$ en $B$, met dien naam te bestempelen. Elke zij-$R_6$ van het eene $S$ bevat 3 punten, dus een zijvlak, van het andere; elk hoekpunt van het eene ligt in 3 zij-$R_6$, dus in een zij-$R_4$ van het andere; de toevoeging is zoó, dat tegenoverliggende elementen van $A$, bijv. hoekpunt $A_1$ en zijruimte $A_1$ ook overstaande elementen van $B$ opleveren, namelijk resp. de zij-$R_4$: $B_1 B_5 B_6 B_7 B_8$ en het zijvlak $B_2 B_3 B_4$, evenals dit bij viervlakken in Möbius-ligging het geval is.

Er bestaat echter reeds eene, met dezelfde eigenschap toegeruste, uitbreiding van dit begrip, die van Berzolari [1]), waarbij elke zij-$R_6$ van het eene $S$ één hoekpunt van het andere bevat, en die ontstaat door operatie met een nulsysteem op een willekeurig simplex; noemen wij deze ligging $M\,I$, dan is blijkbaar de besprokene meer speciale $M\,II$ als eene drievoudige $M\,I$ te beschouwen.

[1]) *Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo* 22.

De elementen van twee simplexen $A$ en $B$ in $M\,II$ kunnen nog slechts op ééne andere wijze tot twee zulke simplexen worden gegroepeerd en wel als:

eerste simplex $P$: $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $B_5$, $B_6$, $B_7$, $B_8$
tweede „ $Q$: $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $A_5$, $A_6$, $A_7$, $A_8$.

Beschouwt men nu zulk een nieuw simplex in verband met $C$, $D$, .... $H$, dan toont het met elk van deze eene nieuwe wijze van ligging; voor alle echter van hetzelfde type, dat analogie vertoont met de viervlakparen in STEINER'sche ligging, die op gelijke wijze uit de $K^{III}$ kunnen worden afgezonderd [1]). Er komt voor de $cf\,(16_{10})$ van twee zulke simplexen een diagram van den vorm:

$$\begin{matrix} S & x \\ x & S, \end{matrix}$$

waarin $x$ weder een schema $(8_3)$ voorstelt, dat nu echter niet degenereert, doch identisch is met het cyclische schema, dat men uit de aanvangsrij: 1 2 . . 5 . . . verkrijgt.

Overstaande elementen van het eene simplex leveren nu, evenals in $R_3$, geene overstaande van het andere.

§ 4. De 28 operaties, welke in elke $cf$-ruimte de ermede incidente $cf$-punten, en reciprook, bepalen, zijn *nul-correlaties*; zoo gaat bijv. de $R_6 : A_1$

$$(+a, +b, +c, +d, +e, +f, +g, +h)$$

over in het daarin gelegen punt $A_2$:

$$(+b, -a, +d, -c, +f, -e, +h, -g)$$

door operatie met den scheef-symmetrischen transformatie-determinant:

$$\begin{vmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Deze nulsystemen zijn onderling in involutie, daar zoowel de groep der lettersubstituties, als die der teekenveranderingen ABEL'sche groepen zijn.

De 36 overige reciprociteiten zijn *polariteiten* ten opzichte van

1) MARTINETTI, *Rendic. Palermo* 16 p. 196.

een 36-tal quadratische $R_6$, die voor de $K^{VII}$ de rol vervullen van de 10 fundamentaal-opp. van den 2[den] graad voor de $K^{III}$.

Hunne vergelijkingen zijn van twee typen, namelijk een *achttal* van den vorm:

$$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2 \pm x_6^2 \pm x_7^2 \pm x_8^2 = 0,$$

waarin de teekencombinaties aan het teekenschema moeten worden ontleend; en een 28-*tal* van den vorm:

$$\pm x_1 x_2 \pm x_3 x_4 \pm x_5 x_6 \pm x_7 x_8 = 0,$$

waarin de samenvoeging der indices gegeven wordt door de 7 binaire substituties der reguliere $G_8$, terwijl de teekens moeten worden gekozen:

$$\begin{matrix} + & + & + & + \\ + & + & - & - \\ + & - & + & - \\ + & - & - & + \end{matrix}$$

De 63 operaties, welke een element in een ander derzelfde soort overvoeren zijn *collineaties*; wij verkrijgen dus, analoog aan de KLEIN'sche $G_{32}$ in $R_3$, *eene meetkundige* ABEL'*sche groep* $G_{128}$, *bestaande uit de identiteit en* 63 *collineaties,* 28 *nulsystemen in involutie en* 36 *polariteiten.*

§ 5. *De* 28 *punten in elke* $R_6$ *der* $K^{VII}$ *liggen op eene quadratische* $R_6$ *en reciprook.*

Voor het bewijs beschouwen wij den determinant op de termen van den tweeden graad, gevormd uit 7 van de 8 homogene coördinaten; deze is dus van de orde $7 + \binom{2}{7} = 28$. Het weglaten eener coördinaat toch is meetkundig het projecteeren uit een hoekpunt van het fundamentaal-simplex op de overstaande $R_6$, liggen de projecties van een 28-tal punten daarin quadratisch, dan evenzeer de punten zelf in hunne $R_6$.

Bepalen wij ons nu eerst tot de $R_6 : A_1$.

De 28 punten zijn te verdeelen in 7 viertallen met dezelfde lettervolgorde, de zuiver quadratische termen binnen zulk een viertal zijn in elke kolom gelijk, de gemengde kunnen van teeken verschillen. Noemen wij de 4 termen in eéne kolom $p, q, r, s$, dan doet de substitutie:

$$\begin{aligned} P &= p + q + r + s \\ Q &= p + q - r - s \\ R &= p - q + r - s \\ S &= p - q - r + s \end{aligned} \text{, welker } \Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

rie van de vier quadratische termen verdwijnen, de $\Delta_{28}$ splitst zich

in het product eener $\Delta_7$ van quadratische en eene $\Delta_{21}$ van gemengde termen.

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} b^2 & a^2 & d^2 & c^2 & f^2 & e^2 & h^2 \\ c^2 & d^2 & a^2 & b^2 & g^2 & h^2 & e^2 \\ d^2 & c^2 & b^2 & a^2 & h^2 & g^2 & f^2 \\ e^2 & f^2 & g^2 & h^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ f^2 & e^2 & h^2 & g^2 & b^2 & a^2 & d^2 \\ g^2 & h^2 & e^2 & f^2 & c^2 & d^2 & a^2 \\ h^2 & g^2 & f^2 & e^2 & d^2 & c^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

Dat in het algemeen $\Delta_7 \neq 0$ blijkt bijv. uit

$$h = 1, \; a = b = c = d = e = f = g = 0.$$

De $\Delta_{21}$ verkrijgt, na teekenverandering van sommige rijen, de gedaante:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | bh | 0 | 0 | 0 | 0 | −ah | 0 | df | −de | 0 | −cf | ce | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | bf | −be | 0 | 0 | 0 | −af | ae | 0 | 0 | 0 | 0 | dh | 0 | 0 | −ch | 0 | 0 | 0 |
| 0 | bd | −bc | 0 | 0 | 0 | −ad | ac | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | fh | −eh |
| 0 | 0 | 0 | 0 | ch | 0 | 0 | 0 | dg | 0 | −de | 0 | 0 | −ah | 0 | −bg | 0 | be | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | cg | 0 | −ce | 0 | 0 | 0 | dh | 0 | 0 | −ag | 0 | ae | 0 | −bh | 0 | 0 | 0 | 0 |
| −cd | 0 | bc | 0 | 0 | 0 | ad | 0 | 0 | 0 | 0 | −ab | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −gh | 0 | eh |
| 0 | 0 | 0 | dh | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | cg | −cf | 0 | 0 | −bg | bf | −ah | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | dg | −df | 0 | 0 | ch | 0 | 0 | 0 | −bh | 0 | 0 | 0 | −ag | af | 0 | 0 | 0 |
| cd | −bd | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −ac | 0 | 0 | 0 | ab | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | gh | −fh | 0 |
| 0 | 0 | −eh | 0 | 0 | 0 | −fg | 0 | 0 | 0 | cf | 0 | 0 | bg | 0 | ah | 0 | 0 | 0 | 0 | −bc |
| 0 | −eg | 0 | 0 | 0 | ce | 0 | −fh | 0 | 0 | 0 | 0 | ag | 0 | 0 | 0 | bh | 0 | 0 | −ac | 0 |
| −ef | 0 | 0 | 0 | be | 0 | 0 | 0 | af | 0 | 0 | −gh | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ch | −ab | 0 | 0 |
| 0 | −fh | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −eg | 0 | 0 | de | 0 | 0 | ah | 0 | bg | 0 | 0 | 0 | −bd | 0 |
| 0 | 0 | −fg | 0 | 0 | df | −eh | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | bh | 0 | 0 | 0 | ag | 0 | 0 | 0 | −ad |
| ef | 0 | 0 | −bf | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −ae | 0 | gh | 0 | 0 | −dh | 0 | 0 | 0 | ab | 0 | 0 |
| −gh | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ah | −ef | 0 | de | 0 | cf | 0 | 0 | −cd | 0 | 0 |
| 0 | 0 | fg | 0 | −dg | 0 | eh | 0 | −ch | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −af | 0 | 0 | ad |
| 0 | eg | 0 | −cg | 0 | 0 | 0 | fh | 0 | −dh | 0 | 0 | 0 | 0 | −ae | 0 | 0 | 0 | 0 | ac | 0 |
| gh | 0 | 0 | 0 | 0 | −bh | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ef | −df | 0 | 0 | 0 | −ce | 0 | cd | 0 | 0 |
| 0 | fh | 0 | 0 | −ch | 0 | 0 | eg | −dg | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −be | 0 | bd | 0 |
| 0 | 0 | eh | −dh | 0 | 0 | fg | 0 | 0 | −cg | 0 | 0 | 0 | 0 | −bf | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | bc |

De som der getallen in elke kolom bedraagt *nul*; dus

$$\Delta_{21} = 0.$$

Daar elk element, met de 28 daarmede incidente, in elk ander door eene rechtstreeksche of reciproke projectiviteit kan worden omgezet, is nu de quadratische ligging van elk 28-tal bewezen.

§ 6. Elk tweetal $R_6$ der *cf* heeft 12 punten gemeen, die dus in eene $R_5$ liggen. Daar geene andere $R_6$ dit 12-tal bevat, zijn al deze $R_5$ verschillend en is haar aantal $\left(\frac{2}{64}\right) = 2016$. De *cf*-punten vormen met haar eene *cf* $(64_{378},\ 2016_{12})$.

Er zijn drietallen $R_6$, die 6 punten, welke dus in eene $R_4$ liggen, gemeen hebben; en wel heeft elke *cf*-$R_5$ in nog 32 der $R_6$ *zes* harer punten. Zulk een 6-tal kan uit drie 12-tallen worden afgeleid, haar aantal is dus $\frac{2016 \times 32}{3} = 21504$; zij vormen met de *cf*-$R_5$ eene *cf* $(21504_3,\ 2016_{32})$.

Er zijn viertallen $R_6$, die 4 punten gemeen hebben, welke dus eene $R_3$ bepalen; elke *cf*-$R_4$ heeft namelijk in 15 andere *cf*-$R_4$ 4 van hare 6 punten. Elke $R_3$ kan uit 4 $R_4$ worden afgeleid, haar aantal is dus $\frac{21504 \times 15}{4} = 80640$. Ze vormen met de *cf*-$R_4$ eene *cf* $(80640_4,\ 21504_{15})$.

Er zijn zestallen $R_6$, die 3 punten der *cf* gemeen hebben, welke dus eene $R_2$ bepalen; elke *cf*-$R_3$ heeft namelijk in nog 8 andere *cf*-$R_3$ *drie* van hare 4 punten, deze 8 $R_3$ geven echter twee aan twee hetzelfde drietal; daar verder elke $R_2$ uit $\binom{2}{6} = 15$ $R_3$ kan worden afgeleid is haar aantal $\frac{80640 \times 4}{15} = 21504$. Dit was ook te verwachten, daar de geheele redeneering reciprook, uitgaande van de *cf*-punten had kunnen worden opgezet, en dan, wegens de zelfreciprociteit van het schema, tot dezelfde elementen zou hebben gevoerd: er komen dus nog 2016 $R_1$, de verbindingsrechten der puntenparen.

De verdere incidentie-aantallen der elementensoorten onderling kunnen nu gemakkelijk worden afgeleid, de notatie der $K^{VII}$ wordt ten slotte:

| | $R_0$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ | $R_5$ | $R_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 64 | 2016 | 21504 | 80640 | 21504 | 2016 | 64 |
| incid. met: | | | | | | | |
| $R_0$ | — | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 | 28 |
| $R_1$ | 63 | — | 3 | 6 | 15 | 66 | 378 |
| $R_2$ | 1008 | 32 | — | 4 | 21 | 160 | 2016 |
| $R_3$ | 5040 | 240 | 15 | — | 15 | 240 | 5040 |
| $R_4$ | 2016 | 160 | 21 | 4 | — | 32 | 1008 |
| $R_5$ | 378 | 66 | 15 | 6 | 3 | — | 63 |
| $R_6$ | 28 | 12 | 6 | 4 | 3 | 2 | — |

Door de methode van snijden en projecteeren zijn hieruit drietallen en tweetallen opvolgende elementensoorten om te zetten in elementen van $R_3$ of $R_2$; zoo ontstaan bijv. eene *cf* $(21504_{21})$ van punten en vlakken, met 80640 *cf*-rechten; en eene vlakke *cf* $(2016_{32}, 21504_3)$ van punten en rechten, of reciprook.

§ 7. Stelt men het letter- en het teeken-schema van 8 resp. voor door $S_1$ en $T$ en herhaalt men de samenvoeging

$$\begin{matrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{matrix} \quad \text{en} \quad \begin{matrix} T & T \\ T & -T, \end{matrix}$$

dan ontstaan bij elkander passende schema's voor 16, enz., de bewerking laat onbeperkte voortzetting toe, men verkrijgt steeds eene reguliere, ABEL'sche substitutie-groep $G_{2^p}$ en een passend anallagmatisch schema voor de teekens.

Deze leveren steeds in $R_{2^p-1}$ eene *Cf*, analoog met die van KUMMER, met de notatie:

$$Cf\left(2^{2p}_{(2^p-1).2^{p-1}}\right),$$

welke uit een willekeurig aanvangselement ontstaat door operatie met eene meetkundige ABEL'sche groep:

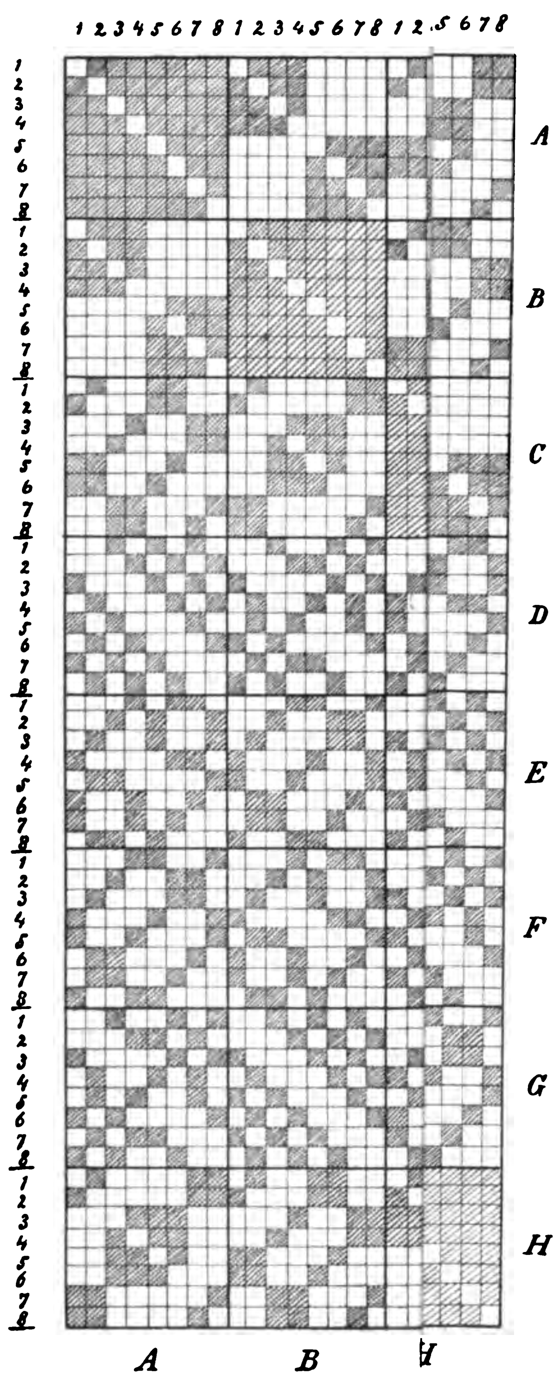
de *identiteit* en $2^{2p}-1$ *collineaties* eenerzijds

en $(2^p-1).2^{p-1}$ *nulsystemen*, onderling in involutie, met

$(2^{p+1}-2^p+1).2^{p-1}$ *polariteiten* anderzijds.

De quadratische ligging der met één element incidente elementen kan steeds door herleiding van den determinant naar het voorbeeld van § 5 bewezen worden [1]).

[1]) Eene uitvoeriger bespreking, ook voor ruimten van ander dimensietal, volgt in het te verschijnen proefschrift: J. A. BARRAU, *Bijdragen tot de theorie der cff.* (Amsterdam 1907).


1 2 3 4 5 6 7 8 1 2 3 4 5 6 7 8 1 2 5 6 7 8
A
B
C
D
E
F
G
H
A
B
H

**Wiskunde.** — De Heer SCHOUTE biedt aan, namens den Heer LUCIEN GODEAUX, te Morlanwelz (Henegouwen): „*Le théorème de* GRASSMANN *dans l'espace à n dimensions.*"

(Mede aangeboden door den Heer D. J. KORTEWEG).

Nous désignons par la lettre $E$ un espace linéaire et nous plaçons en indice le nombre de dimensions de cet espace.

La notation $V_i^j$ représente une variété lieu de $\infty^i$ éléments et d'ordre $j$.

L'ordre d'une variété lieu d'espaces $E_k$ en nombre $(n-k)(k+1)-1$ fois infini dans un espace $E_n$ est le nombre de $E_k$ d'un $E_{k+1}$ passant par un $E_{k-1}$ de cet $E_{k+1}$ et appartenant à la variété.

1. Dans un $E_2$ le théorème de GRASSMANN peut s'énoncer:

Le lieu d'un $E_0$ tel que les $E_1$ qui le joignent à trois $E_0$ fixes rencontrent trois $E_1$ fixes en trois $E_0$ d'un même $E_1$ est une variété $V_1^3$.

Dans un $E_3$ on lui a donné les deux formes suivantes:

Le lieu d'un $E_0$ tel que les $E_2$ qui le joignent à quatre $E_1$ fixes rencontrent quatre $E_1$ fixes en quatre $E_0$ d'un même $E_1$ est une $V_2^4$. (LE PAIGE, *Sur la génération de certaines surfaces par des faisceaux quadrilinéaires, Bul. de Belgique*, 1884, 3e *série, tome VIII*).

Le lieu d'un $E_0$ tel que les $E_1$ qui le joignent à quatre $E_0$ fixes rencontrent quatre $E_2$ fixes en quatre $E_0$ d'un même $E_2$ est une $V_2^4$.

2. Soient dans un $E_n$ $k$ $E_{r_i}$ que nous désignons par $A_i$ et $k$ $E_{s_i}$ que nous désignons par $B_i$, $(i=1,\ldots k)$.

Soit $p$ un nombre satisfaisant aux $2k$ inégalités

$$r_i + p + 1 \leqq n - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$r_i + s_i + p + 1 \geqq n, \quad (i=1,\ldots k) \quad . \quad . \quad (2)$$

Un espace $E_p$ détermine avec les $k$ espaces $A_i$ $k$ espaces $E_{r_i+p+1}$. Ces espaces rencontrent les espaces $B_i$ correspondants en $k$ espaces $E_{r_i+s_i+p-n+1}$.

Si ces $k$ espaces appartiennent à un $E_{\sum\limits_{i=1}^{i=n}(r_i+s_i)+k(p-n+2)-1}$, l'espace $E_p$ décrit une variété $V_{(n-p)(p+1)-1}$ dont nous allons rechercher l'ordre.

Nous supposons que l'on a

$$\Sigma\,(r_i + s_i) + k\,(p - n + 2) = n + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Soient $C$ un $E_{p+1}$ et $D$ un $E_{p-1}$ de $C$.

Désignons par $\Delta$ un $E_p$ passant par $D$ et situé dans $C$.

Prenons $k-1$ espaces $\Delta$ et numérotons les $1, \ldots j-1,\ j+1, \ldots k$.

Ces $k-1$ $\Delta$ déterminent avec $k-1$ espaces $A_i$ convenablement choisis $k-1$ espaces $E_{r_i+p+1}$. Ces espaces rencontrent les $k-1$ espaces $B_i$ correspondants suivant $k-1$ espaces $E_{r_i+s_i+p-n+1}$, $(i=1, \ldots, j-1, j+1, \ldots k)$.

Ces espaces déterminent un $E_{\sum_{i=1}^{i=j-1}(r_i+s_i)+\sum_{i=j+1}^{i=n}(r_i+s_i)+(k-1)(p-n+2)-1}$.

Cet espace a en commun avec $B_j$ un espace

$$E_{\sum_{i=1}^{i=j-1} r_i + \sum_{i=j+1}^{i=n} r_i + \sum_{i=1}^{i=n} s_i + (k-1)(p+2) - kn - 1}.$$

Celui-ci détermine à son tour avec $A_i$ un espace

$$E_{\sum_{i=1}^{i=j+1}(r_i+s_i)+(k-1)(p+2)-kn}.$$

A cause de l'égalité (3), ce dernier rencontre $C$ en un seul point. Ce point détermine avec $D$ un espace $\Delta j$.

Lorsque $j$ varie de 1 à $k$, on a $k$ séries d'espaces $\Delta$ entre lesquelles existe une correspondance $(1, 1, \ldots 1)$. Il y a $k$ coïncidences. La variété décrite par l'espace $E_p$ est $\overset{k}{V}_{(n-p)(p+1)-1}$.

Le lieu d'un $E_p$ tel que les $E_{r_i+p+1}$ qui le joignent à $k$ espaces $E_{r_i}$ fixes rencontrent $k$ $E_{s_i}$ en $k$ $E_{r_i+s_i+p-n+1}$ d'un même $E_{\Sigma(r_i+s_i)+k(p-n+2)-1}$, $(i=1, \ldots k)$, est une variété $\overset{k}{V}_{(n-p)(p+1)-1}$.

Les espaces $A_i$ sont visiblement des espaces principaux du lieu de $E_p$, espace principal ayant le même sens que point ou plan principal d'un complex réglé.

Dans $E_5$ on trouve le théorème suivant:

Le lieu d'un $E_1$ tel que les $E_3$ qui le joignent à quatre $E_0$ rencontrent quatre $E_1$ en quatre $E_0$ d'un même $E_3$ est une $V_7^4$ (complexe du quatrième ordre).

3. Si l'on considère l'espace ordinaire comme engendré par des droites, on a une géométrie à quatre dimensions. Nous allons exposer deux généralisations du théorème de Grassmann dans cette géométrie.

Soient $k$ congruences linéaires $G_1, \ldots G_k$, et $k$ faisceaux-plans $(P_1, \pi_1), \ldots (P_k, \pi_k)$. Soient en outre un système linéaire $C$ de complexes linéaires en nombre $\infty^{6-k}$.

Une droit $g$ quelconque détermine avec les $k$ congruences $G$ $k$ complexes linéaires. Ceux-ci ont en commun avec les $k$ faisceaux-plans correspondants $k$ droites $p_1, \ldots p_k$.

Proposons-nous de rechercher le lieu de la droite $g$, lorsque les $k$ droites $p$ appartiennent à un même complexe du système $C$.

Soit $(A, \alpha)$ un faisceau-plan quelconque. Prenons $k-1$ droites de ce faisceau et numérotons les $1, \ldots i-1, i+1, \ldots k$.

Chacunne de ces droites détermine avec la congruence $G$ correspondante un complexe linéaire. Celui-ci a en commun avec le faisceau-plan $(P, \pi)$ correspondant une droite $p$. Les $k-1$ droites $p$ ainsi trouvées déterminent un complexe du système $C$. Ce complexe a en commun avec le faisceau-plan $(P_i, \pi_i)$ une droite $p_i$. Cette droite détermine avec $G_i$ un complexe ayant en commun avec $(A, \alpha)$ une droite $a_i$. Lorsque $i$ varie de 1 à $k$, on a $k$ séries de droites $a$ entre lesquelles existe la correspondance $(1, 1, \ldots 1)$. Il y a $k$ coïncidences.

Le lieu d'une droite telle que les complexes linéaires qu'elle détermine avec $k$ congruences linéaires fixes rencontrent $k$ faisceaux-plans fixes en $k$ droites d'un complexe linéaire d'un système à $6-k$ termes, est un complexe de degré $k$ (ordre et classe), possédant les $k$ congruences linéaires données.

Si $k = 6$, on a un théorème de Grassmann.

4. Soient cinq groupes de trois droites $H_1, \ldots H_5$ et cinq gerbes de droites $R_1, \ldots R_5$.

Une droite quelconque $g$ détermine avec $H_1, \ldots H_5$ cinq congruences linéaires qui rencontrent les cinq réseaux correspondants en cinq droites. Si ces cinq droites font partie d'une même congruence linéaire, la droite $g$ décrit une congruence.

Soit $\pi$ un plan. Considérons dans ce plan cinq séries de droites $p_1, \ldots p_5$.

Entre les droites de ces séries, on voit facilement qu'il existe une correspondance telle qu'à quatre droites en correspond une cinquième.

Supposons que trois droites sont fixes, tandis que la quatrième décrit un faisceau. On vérifie alors très aisément que la cinquième décrit aussi un faisceau. D'après une extension du principe de Zeuthen, il y a quinze coïncidences.

Le lieu d'une droite telle que les congruences linéaires qu'elle détermine avec cinq systèmes de trois droites, ont en commun avec cinq gerbes cinq droites d'une même congruence linéaire, est une congruence de la quinzième classe.

On vérifie de la même manière que cette congruence est aussi du quinzième ordre et qu'elle contient les génératrices de même mode que les droites données des cinq quadriques déterminées par ces droites.

**Natuurkunde.** — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan: „*Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels.* VI. *De plooipuntslijn.*"

Door de plooipuntslijn verstaan wij de aaneengeschakelde reeks van punten, waarin het mengsel in plooipuntstoestand verkeert. Denken wij de punten van het verzadigingsvlak door de coördinaten $T$, $p$ en $x$ bepaald, dan is de plooipuntslijn een kromme op dat oppervlak gelegen, en zijn haar projecties op de coördinatenvlakken van de gedaante: $p = f_1(T)$, $p = f_2(x)$ en $x = f_3(T)$. Is het verzadigingsoppervlak door de coördinaten $T$, $v$ en $x$ gegeven, dan zijn haar projecties van de gedaante $v = f_4(T)$, $v = f_5(x)$ en $x = f_3(T)$. De twee genoemde verzadigingsvlakken kunnen uit elkander worden afgeleid met behulp der betrekking $p = \varphi(x, v, T)$. Heeft men het eerstgenoemde oppervlak, dan voert de substitutie van $p$ tot het tweede. Men zou echter ook $T$ hebben kunnen elimineeren, en een verzadigingsvlak van de gedaante $F(p, v, x) = 0$ kunnen verkrijgen — evenzoo een van de gedaante $F_1(p, v, T) = 0$. Daar een verzadigingspunt bepaald en geheel gekend is, als men de 4 grootheden $T$, $x$, $v$ en $p$ kent, en de toestandsvergelijking een betrekking tusschen deze 4 grootheden geeft, kan men zooveel verzadigingsoppervlakken denken als het aantal combinaties van 4 grootheden bedraagt 3 aan 3. Het aantal projecties van de plooipuntslijn is dan het aantal combinaties 2 aan 2. Voor de richting der projecties kunnen dan in beschouwing komen: $\frac{dT}{dx}$, $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dp}{dT}$, $\frac{dp}{dv}$ en $\frac{dv}{dT}$, die natuurlijk niet onafhankelijk van elkander zijn.

De meest bekende vorm van de plooipuntslijn is die, waarbij het beginpunt ligt in het kritisch punt van den eersten component, en het eindpunt in het kritisch punt van den tweeden component.

In dat geval is er een punt, waarin de plooipuntslijn begint en een ander waarin zij eindigt; maar zulke begin- en eindpunten liggen noodzakelijk in zulke plaatsen welke als natuurlijke grenspunten te beschouwen zijn. Zoo zouden misschien ook bij grensvolumes ($v = b$) begin- en eindpunten kunnen voorkomen — maar nimmer kan een plooipuntslijn bij willekeurig gekozen waarden van $v$ en $x$ een begin- of eindpunt vinden. Zoo zal de genoemde bekende vorm der plooipuntslijn, in het geval als er minimum- of maximum-$T_k$ is, wel bij gradueele verhooging of verlaging der temperatuur bij zekere bepaalde waarde van $T$ zich pas in zeker punt vertoonen — maar zulk een punt is dan noodzakelijk een dubbelplooipunt, en de plooipuntslijn zelve blijft haar karakter van continu verloopende reeks van punten behou-

den; het genoemde dubbelpunt is dan een homogeen dubbelplooipunt. Teekent men in de $v, x$-projectie dan de plooipuntslijn, dan loopt zij weder continu van den linker- naar den rechterkant — en dit blijft eveneens het geval als de genoemde plooipuntslijn meer ingewikkelde eigenschappen heeft en er twee heterogene dubbelplooipunten in aanwezig zijn zooals besproken is in „Bijdrage enz." en ook behandeld is in Verslag K. A. v. W. Deel XIII pag. 625 en Deel XIV pag. 176. Toch is behalve deze plooipuntslijn nog een andere mogelijk. Deze loopt niet van den linker naar den overkant. Dan blijft alleen de mogelijkheid over òf dat zij een gesloten kromme is in de $v, x$ projectie, òf dat zij begint en eindigt aan de grenzen $v = b$.

Wij zullen er toe overgaan eenige eigenschappen van de bijzondere punten dezer lijn te bespreken, in het bijzonder van de dubbelpunten dezer lijn. KORTEWEG heeft aangetoond dat deze dubbelpunten van tweeërlei aard zijn. Of het is een dubbelpunt waarin twee homogene plooipunten ontspringen of samenvallen — of het is een dubbelpunt waarin dit het geval is voor twee heterogene plooipunten. Al zijn zulke plooipunten physisch van zoo verschillend karakter — mathematisch voldoen zij aan dezelfde kenmerken, en op de plooipuntslijn is zulk een heterogeen dubbelpunt het overgangspunt voor een reeks van plooipunten, welke gerealiseerd zouden kunnen worden, en voor een reeks van niet realiseerbare plooipunten.

*Minimum- of maximumtemperatuur voor de plooipuntslijn.*

Denken wij dat bij zekere waarde van $T$ een dubbelplooipunt op het $\psi$-oppervlak ontstaat of verdwijnt, dan zijn bij iets hoogere of iets lagere waarde van $T$ twee plooipunten aanwezig. Dit geldt zoowel als het dubbelpunt een homogeen of een heterogeen dubbelpunt is, zooals wij kortheidshalve ze zullen betitelen. Voor de plooipuntslijn is dan $\frac{dT}{dx}$ en $\frac{dT}{dv} = 0$. Maar voor een homogeen dubbelpunt is bovendien $\frac{dT}{dp} = 0$. Uit de gedaante van $\frac{dp}{dT}$ welke afgeleid is (Verslag K. A. v. W. Deel IV p. 20 en p. 82) volgt deze eigenschap, omdat in een homogeen dubbelpunt $\frac{d^2v}{dx^2}_p = 0$ is (Bijdrage enz. Dl. XV p. 843). Voor een heterogeen dubbelpunt is $\frac{dT}{dp}$ niet gelijk 0, gelijk mede blijkt uit de voor $\frac{dp}{dT}$ gegeven waarde, daar voor zulk een dubbelpunt niet $\frac{d^2v}{dx^2}_p = 0$ is, maar $\frac{d^2v}{dx^2}_p = \frac{d^2v}{dx^2}_q$. Dat in een heterogeen dubbelpunt

$\frac{dT}{dp}$ niet gelijk 0 is, wordt ook onmiddellijk ingezien als men bedenkt, dat voor zulk een punt ook $dp = 0$ is en $\frac{dT}{dp}$ dus onder onbepaalde gedaante komt, waarvan wij de waarde straks zullen bepalen. Voor zulk een dubbelpunt is dan ook $\frac{dv}{dx} = \left(\frac{dv}{dx}\right)_p$ wat niet het geval is voor een homogeen dubbelpunt.

Voor een homogeen dubbelpunt zijn dan van de 6 differentiaalquotienten, waarvan sprake kan zijn, er drie gelijk 0, en blijven er drie over, waaarvan de waarde bepaald moet worden, n. l. $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dp}$ en $\frac{dp}{dx}$.

Schrijven wij:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\frac{dT}{dx}}{\frac{dT}{dv}}$$

$$\frac{dv}{dp} = \frac{\frac{dT}{dp}}{\frac{dT}{dv}}$$

en

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\frac{dT}{dx}}{\frac{dT}{dp}},$$

dan is in alle drie deze uitdrukkingen zoowel teller als noemer gelijk 0. Differentieeren wij in de eerste teller en noemer naar $x$, in de tweede naar $v$, en de derde naar $p$, dan vinden wij:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\frac{d^2T}{dx^2}}{\frac{d^2T}{dv^2}\frac{dv}{dx}}$$

$$\frac{dv}{dp} = \frac{\frac{d^2T}{dp^2}\frac{dp}{dv}}{\frac{d^2T}{dv^2}}$$

en

$$\frac{dp}{dx}=\frac{\frac{d^2T}{dx^2}\frac{dx}{dp}}{\frac{d^2T}{dp^2}}$$

of

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2=\frac{\frac{d^2T}{dx^2}}{\frac{d^2T}{dv^2}},\quad \left(\frac{dv}{dp}\right)^2=\frac{\frac{d^2T}{dp^2}}{\frac{d^2T}{dv^2}}\quad \text{en}\quad \left(\frac{dp}{dx}\right)^2=\frac{\frac{d^2T}{dx^2}}{\frac{d^2T}{dp^2}}.$$

Wij kunnen deze eigenschappen verifieeren, door voor de onmiddellijke nabijheid van de minimum- of maximumplooipuntstemperatuur te schrijven:

$$T=T_1\pm\alpha(x-x_1)^2=T_1\pm\beta(v-v_1)^2=T_1\pm\gamma(p-p_1)^2,$$

waarin het teeken $+$ geldt voor minimumwaarde van $T$ en omgekeerd het teeken $-$ voor maximumwaarde.

Daaruit volgt:

$$\alpha(x-x_1)^2=\beta(v-v_1)^2=\gamma(p-p_1)^2,$$

of

$$\pm(x-x_1)\sqrt{\alpha}=\pm(v-v_1)\sqrt{\beta}=\pm(p-p_1)\sqrt{\gamma},$$

en

$$\frac{dv}{dx}=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\quad,\quad \frac{dp}{dv}=\pm\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\quad \text{en}\quad \frac{dx}{dp}=\pm\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

Daar $\frac{dv}{dx}\times\frac{dp}{dv}\times\frac{dx}{dp}=+1$, zijn dus de te kiezen teekens òf allen positief òf één positief en twee negatief. Zoo is in het geval dat er minimum- of maximum plooipuntstemperatuur is, en wij de richting van $x$ zoo kiezen dat $\frac{db}{dx}$ positief is, $\frac{dv}{dx}>0$ en $\frac{dp}{dx}<0$ en dus ook $\frac{dp}{dv}$ negatief. Het is echter niet altijd het geval dat $\frac{dp}{dv}$ negatief is. Zoo is bij een plooipuntslijn met maximumwaarde van $p$, $\left(\frac{dp}{dT}=0\right)$ ook $\frac{dp}{dx}=0$ en $\frac{dp}{dv}=0$. In zulk een geval moet dus overgang van het teeken van $\frac{dp}{dv}$ plaatsgrijpen.

Gaan wij de kenmerken na voor een heterogeen dubbelpunt, dan hebben wij in de eerste plaats $\frac{dT}{dx}=0$ en $\frac{dT}{dv}=0$. Dan is $\frac{dT}{dp}$ niet gelijk 0. Maar daarvoor in de plaats zijn er dan twee andere

differentiaalquotienten welke gelijk nul zijn. Uit $\frac{dp}{dT} = \frac{dp}{dx}\frac{dx}{dT}$ volgt, als wij in aanmerking nemen dat $\frac{dp}{dT}$ een eindige waarde heeft en $\frac{dx}{dT} = \infty$ is, dat $\frac{dp}{dx} = 0$ moet zijn, evenzoo dat $\frac{dp}{dv} = 0$ is. Dat $p$ maximum- of minimumwaarde heeft in het geval van een heterogeen dubbelpunt is reeds door ons in teekening gebracht (Versl. K. A. v. W. Dl. XIII p. 625 en XIV p. 176). Van de 6 differentiaalquotienten voor de projecties der plooipuntslijn zijn er dus 4 gelijk nul. Er blijven er twee over, waarvan de waarde moet bepaald worden, nl. $\frac{dp}{dT}$ en $\frac{dv}{dx}$.

Schrijven wij: $\frac{dp}{dT} = \frac{\frac{dp}{dx}}{\frac{dT}{dx}}$, dan vinden wij door differentiatie van teller en noemer:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\frac{d^2p}{dx^2}}{\frac{d^2T}{dx^2}}$$

Schrijven wij: $\frac{dv}{dx} = \frac{\frac{dT}{dx}}{\frac{dT}{dv}}$, dan vinden wij:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = \frac{\frac{d^2T}{dx^2}}{\frac{d^2T}{dv^2}}$$

Ter verificatie diene het volgende. Schrijven wij weder, als geldende in de onmiddellijke nabijheid van het dubbelpunt:

$$T = T_0 \pm \alpha (x - x_0)^2 = T_0 \pm \beta (v - v_0)^2$$

en

$$p = p_0 \pm \gamma (x - x_0)^2 = p_0 \pm \delta (v - v_0)^2$$

Voor minimumwaarde van $T$ en $p$ moet het positieve teeken gekozen worden, en omgekeerd. Wij hebben dus de volgende betrekkingen:

$$\alpha (x - x_0)^2 = \beta (v - v_0)^2.$$

en

$$\gamma (x - x_0)^2 = \delta (v - v_0)^2$$

waaruit

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}.$$

Verder

$$\frac{T - T_0}{\alpha} = \pm \frac{p - p_0}{\gamma}$$

In deze laatste vergelijking moet het teeken + gekozen worden, als, zooals het geval is, $T$ en $p$ tegelijk òf maximum- òf minimumwaarde hebben. Men vindt dan:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

en

$$\frac{dv}{dx} = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \pm \sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}$$

Dat deze waarde van $\frac{dv}{dx} = \left(\frac{dv}{dx}\right)_{p,T}$ is, volgt uit de afleiding.

Wij vinden dus voor $\frac{dp}{dT}$ een bepaalde waarde, en daar bij minimumwaarde van $T$ geen lagere, en bij maximumwaarde geen hoogere waarde van $T$ bestaat, moet de $p, T$-projectie der plooipuntskromme „keerpunten" bezitten. Dat deze waarde van $\frac{dp}{dT}$ positief is, en dus $p$ en $T$ tegelijk maximum of minimum zijn, volgt o. a. uit de vergelijking:

$$dp = \left(\frac{dp}{dv}\right)_{xT} dv + \left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT} dx + \left(\frac{dp}{dT}\right)_{vx} dT.$$

Immers, daar $\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dx_{pT}} = -\frac{\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT}}{\left(\frac{dp}{dv}\right)_{xT}}$ is, reduceert deze vergelijking zich tot

$$\frac{dp}{dT} = \left(\frac{dp}{dT}\right)_{vx}.$$

*Andere bijzondere punten der plooipuntskromme.*

Uit den vorm voor $\frac{dp}{dT}$ (K. A. v. W. Deel IV pag. 20) blijkt, dat ook het geval mogelijk is, dat $\frac{dp}{dT} = 0$ is, en proefondervindelijk is bij sommige mengsels een maximumwaarde van $p$ in de

$p,T$ projectie aangetoond. Daar $\frac{dp}{dT} = \frac{dp}{dx}\frac{dx}{dT} = \frac{dp}{dv}\frac{dv}{dT}$ is, leiden wij af dat dan ook, behalve in exceptioneele gevallen, $\frac{dp}{dx} = 0$ en $\frac{dp}{dv} = 0$ is. Dan is $p$ de hoogste, of de laagste, druk welke op de plooipuntskromme kan voorkomen. Van de 6 differentiaalquotienten zijn er weder 3 gelijk nul, en moeten weder 3 andere, n.l. $\frac{dx}{dT}$, $\frac{dv}{dT}$ en $\frac{dv}{dx}$ bepaald worden. Wij vinden dan uit:

$$\frac{dx}{dT} = \frac{\frac{dp}{dT}}{\frac{dp}{dx}}$$

$$\left(\frac{dx}{dT}\right)^2 = \frac{\frac{d^2p}{dT^2}}{\frac{d^2p}{dx^2}}$$

Uit

$$\frac{dv}{dT} = \frac{\frac{dp}{dT}}{\frac{dp}{dv}}$$

vinden wij:

$$\left(\frac{dv}{dT}\right)^2 = \frac{\frac{d^2p}{dT^2}}{\frac{d^2p}{dv^2}}$$

En uit

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\frac{dp}{dx}}{\frac{dp}{dv}}$$

vinden wij:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = \frac{\frac{d^2p}{dx^2}}{\frac{d^2p}{dv^2}}$$

wat weder geverifieerd kan worden uit de vergelijkingen:

$$p = p_1 \pm \alpha(T - T_1)^2 = p_1 \pm \beta(x - x_1)^2 = p_1 \pm \gamma(v - v_1)^2$$

Evenzoo kan bij plooipuntslijnen, die niet van $x = 0$ tot $x = 1$

loopen, en die dus of een gesloten figuur vormen, of van een punt van de lijn $v=b$ naar een ander punt dier lijn loopen, de waarde van $x$ maximum of minimum zijn. Dan is $\frac{dx}{dT}$, $\frac{dx}{dv}$ en $\frac{dx}{dp}=0$, en moeten de drie overige differentiaalquotienten $\frac{dp}{dT}$, $\frac{dv}{dT}$ en $\frac{dv}{dp}$ bepaald worden en eindelijk zou ook $v$ maximum- of minimumwaarde kunnen hebben dan zijn $\frac{dv}{dT}$, $\frac{dv}{dp}$ en $\frac{dv}{dx}$ gelijk nul en zouden $\frac{dT}{dx}$, $\frac{dp}{dx}$ en $\frac{dp}{dT}$ bepaald moeten worden.

*Driephasendruk en eindpunt van den driephasendruk op de plooipuntslijn.*

Indien bij zekere temperatuur driephasendruk bestaat, moet op het $\psi$ oppervlak, zooals uit het voorgaande blijkt, een verborgen plooipunt aanwezig zijn. Is de spinodale lijn aan den kant der kleine volumes gesloten, dan is er bovendien een realiseerbaar plooipunt, en zelfs kan er nog een tweede realiseerbaar plooipunt aanwezig zijn, indien de temperatuur boven de $T_k$ van een der componenten is. Noemen wij $x_1$ en $v_1$, $x_2$ en $v_2$, $x_3$ en $v_3$ de samenstellingen en volumes der drie phasen, aannemende dat de twee eerste vloeistofphasen en de derde een gasphase is, en stellen wij $x_2 > x_1$. Nu kunnen er 3 gevallen voorkomen nl. $x_3 > x_2 > x_1$; $x_2 > x_1 > x_3$ en $x_2 > x_3 > x_1$. Het eerste geval komt voor als de dampphase meer van den tweeden component bevat dan elk der vloeistofphasen, en dus als $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT}$ steeds positief is; het tweede geval als de dampphase minder van den tweeden component bevat, en dus als $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT}$ negatief is, en het derde geval eischt dat de lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT}=0$ tusschen de twee vloeistofphasen loopt. Van het eerste geval kan een voorbeeld gevonden worden bij het mengsel water in $SO_2$, van het tweede is een voorbeeld te vinden bij mengsels van ethaan en sommige alcoholen (boven methylalcohol) en van het derde geval is het mengsel water en phenol een voorbeeld.

Daar wij, als bij een mengsel van 2 stoffen evenwicht van 3 phasen aanwezig is, een evenwicht hebben dat van de grootte van het volume onafhankelijk is, kan ter berekening van de waarde van $\frac{dp}{dT}$ de formule van Clapeyron dienen, en gesteld worden:

$$T\frac{dp}{dT}=\frac{W}{u}$$

als $W$ voorstelt de warmte, welke bij volume-vermindering vrijkomt als een gedeelte van de middenphase zich omzet in den toestand der twee andere phasen, en $u$ de grootte dier volume-vermindering. Tot dezelfde uitkomst komt men als men (verslag K. A. v. W. Deel V pag. 482) den weg volgt daar aangewezen, nl.:

$$\frac{dp}{dT}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \eta_1 \\ 1 & x_2 & \eta_2 \\ 1 & x_3 & \eta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & v_1 \\ 1 & x_2 & v_2 \\ 1 & x_3 & v_3 \end{vmatrix}}=\frac{(x_1-x_3)(\eta_2-\eta_3)-(x_2-x_3)(\eta_1-\eta_3)}{(x_1-x_3)(v_2-v_3)-(x_2-x_3)(v_1-v_3)}.$$

Deze zelfde vergelijking vindt men ook als men driephasen-evenwicht heeft bij een binair stelsel van vast, vloeibaar en gasvormig. En de loop der lijn: $p=f(T)$ is dan bekend. Het is een lijn, uit 2 boven elkander liggende takken bestaande, welke bij zeker maximumtemperatuur vloeiend ineenloopen en waarvan de bovenste tak maximum druk bezit. In dit geval is de loop echter eenvoudiger. Bij het evenwicht van vast, vloeibaar en gasvormig komen twee takken voor; op den eenen tak is de vloeistof rijker aan een der componenten dan het vaste lichaam en op den anderen tak omgekeerd. Waar die takken samenkomen is de waarde van $x$ voor het vaste lichaam en voor de vloeistof evengroot, en in dat punt heeft de $p=f(T)$-lijn een element gemeen met de smeltlijn. Men ziet dat uit de waarde van $\frac{dp}{dT}$, als men daarin bijv. $x_2=x_3$ stelt, in welk geval $\frac{dp}{dT}=\frac{\eta_2-\eta_3}{v_2-v_3}$ wordt. En het is dan ook dikwijls als een vaste regel uitgesproken dat, als twee phasen gelijk samengesteld zijn, de evenwichtsverandering met de temperatuur alleen afhangt van die twee phasen en onafhankelijk is van de derde phase. Nu kan echter ook bij het evenwicht van 2 vloeistofphasen en één gasphase gelijkheid in samenstelling plaatsgrijpen tusschen twee phasen. Zoo kan een der vloeistofphasen met de gasphase gelijk samengesteld worden, of de beide vloeistofphasen kunnen gelijke waarde van $x$ bekomen. Dan geldt bovengenoemde regel niet. Als een vast lichaam gelijke samenstelling heeft met een vloeistof en bijv. $x_2=x_3$ is, dan is $\eta_2$ niet gelijk aan $\eta_3$, en $v_2$ niet gelijk aan $v_3$. Dan zijn er wel twee phasen van gelijke samenstelling, maar niet twee *identische* phasen. Maar als een vloeistofphase gelijke samenstelling heeft met een gasphase dan beteekent deze uitdrukking dat in den driephasen-

driehoek een der zijden tot nul is gereduceerd, en deze twee phasen identisch zijn geworden. Dan vindt men na deeling van teller en noemer door $x_2 - x_3$:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\eta_1 - \eta_3 - (x_1 - x_3)\left(\frac{d\eta_3}{dx_3}\right)_{pT}}{v_1 - v_3 - (x_1 - x_3)\left(\frac{dv_3}{dx_3}\right)_{pT}}$$

of

$$T\frac{dp}{dT} = \frac{W_{13}}{v_{13}}$$

Uit den vorm voor $\frac{dp}{dT}$ blijkt, dat deze waarde gelijk is aan $\left(\frac{dp}{dT}\right)_{x_3}$, als men een doorsnede door het saturatievlak aanbrengt voor $x = x_3$.

Met andere woorden: De driephasendriehoek, in zijn uitersten stand, rust rakend aan genoemde doorsnede — en daartoe hadden wij ook wel onmiddellijk kunnen besluiten. Het zal ook wel onmiddellijk in te zien zijn, dat het samenvallen van de punten $x_2$ en $x_3$ van den driephasendriehoek in een plooipunt plaatsgrijpt, en dat dus het eindpunt van de lijn $p = f(T)$ op de plooipuntslijn ligt. Wij hebben dan een plooipunt in het punt waar $x_2$ en $x_3$ samenvallen, en daar de $p$, $T$-projectie der plooipuntslijn de enveloppe is van de $p$, $T$-projectie der doorsneden van het saturatievlak voor standvastige waarden van $x$, raken de plooipuntslijn en de $p$, $T$-projectie der doorsneden elkander en dus ook het eindpunt der $p$, $T$-projectie van den driephasendruk, daar in dat eindpunt het laatste element van dezen druk samenvalt met genoemde doorsnede. Deze raking is in vroegere teekeningen nog niet in acht genomen. Zijn er twee eindpunten van den driephasendruk, dan zijn er twee afzonderlijke stukken van het realiseerbare gedeelte der plooipuntslijn, welke vereenigd worden door den driephasendruk, terwijl de ontmoetingspunten weder *keerpunten* zijn, eveneens als dit het geval is met het verborgen gedeelte der plooipuntslijn. Nu doet zich echter de volgende vraag voor. Uit de gedaante van de doorsnede van het saturatievlak bij gegeven waarde van $x$, weten wij dat deze in het eenvoudigste geval bestaat uit twee takken, en dat op den bovensten tak de waarde van $\frac{dp}{dT}$ ook negatief kan zijn. Kan nu ook $\frac{dp}{dT}$ voor den driephasendruk negatief zijn? Voor zoover mij bekend is, is dat nimmer waargenomen; maar de waarnemingen omtrent de stijging van den driephasendruk met de temperatuur, en de andere omstandigheden, n.l. de waarden van $x$ en $v$, zijn nog weinig nagegaan. Mocht dit negatief

worden mogelijk zijn, en voorshands zie ik geen reden om dit onmogelijk te achten, dan kan dat alleen plaats vinden als men een met de temperatuur dalende plooipuntslijn heeft. Het eindpunt van den driephasendruk, dus het plooipunt, ligt dan ook op dat gedeelte van de doorsnede van het saturatievlak dat tusschen minimumdruk en kritisch raakpunt ligt, en het is bekend dat dan ook de plooipuntslijn, in hare $p$, $T$-projectie moet dalen, omdat zij de enveloppe der doorsneden van het saturatievlak is. Is bij het eindpunt $\frac{dp}{dT}$ negatief, dan moet deze waarde door 0 zijn gegaan; dit zal dan eischen dat bij overgang van de middenphase in de beide andere te samen geen warmte vrijkomt, en dat dus als bij den overgang in de eene der beide uiterste phasen warmte vrijkomt, de overgang in de andere uiterste phase met warmteabsorptie geschiedt [1]). En dit kunnen wij behoudens nader onderzoek niet voor onmogelijk verklaren.

Merken wij ten slotte nog op, dat $\frac{dp}{dT}$ niet oneindig kan worden. Daarvoor zou noodig zijn dat de noemer gelijk 0 is, zonder dat dit met den teller het geval zou zijn. Dan moet de inhoud van den driephasendriehoek gelijk 0 zijn — of de 3 punten moeten op een rechte lijn liggen. Dit is het geval als twee punten samenvallen, maar dan is ook de teller gelijk 0. Nu kan een $p$-lijn, en de drie punten moeten steeds op een zelfde isobare liggen, wel in 3 punten door een rechte lijn gesneden worden; maar dan zou dit ook in dezelfde drie punten met een $q$-lijn het geval moeten zijn; deze opmerking is wel voldoende om het geval als nooit voorkomende te doen beschouwen.

Wij hebben dus in de $p$, $T$-projectie van den driephasendruk een, ten minste in den regel, met de temperatuur stijgende kromme; beneden elk punt dezer lijn is een punt van de plooipuntslijn (verborgen punt) en boven elk punt is een tweede punt dezer lijn (realiseerbaar punt). Dit tweede punt ontbreekt als de plooi bij het grensvolume niet gesloten mocht zijn.

*Vormen van plooipuntslijnen ($p$, $T$-projectie).*

Ik zal volgens de hierboven gegeven beschouwingen een mogelijken vorm van plooipuntslijn beschrijven voor het geval van twee componenten, waarbij de verhouding $\frac{T_{k_2}}{T_{k_1}}$ een groot getal is, en waarbij

---

[1]) De figuren pag. 126 Cont. II, waarin de waarde van $v_{21}$ en $w_{21}$ voor coëxisteerende phasen geteekend zijn, moeten, als men ook onvolkomen mengbaarheid aanneemt, nader worden aangevuld.

de temperatuur, waarbij $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ tot een punt is samengetrokken, veel hooger is dan $T_{k_1}$. Als voorbeeld denke men het mengsel Helium en waterstof, door KAMERLINGH ONNES en KEESOM gedeeltelijk proefondervindelijk en verder theoretisch onderzocht, of het mengsel van Helium en water. Daar er dan echter twee vormen mogelijk zijn zal ik deze beide beschrijven, voorloopig in het midden latende welke van deze vormen in deze gevallen de juiste is.

Daar $b$ voor waterstof hooger zal zijn dan $b$ voor Helium is Helium eerste component. In de eerste plaats merken wij dan op, dat bij $T < T_{k_1}$ er een samengestelde plooi moet zijn, welke de geheele breedte inneemt. Bij $T > T_{k_1}$ heeft zich $\frac{d^2\psi}{dv^2}=0$ aan de Heliumzijde gesloten; maar $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ is een gesloten kromme welke aan de Heliumzijde buiten $\frac{d^2\psi}{dv^2}=0$ uitsteekt, en er is dus snijding van $\frac{d^2\psi}{dv^2}=0$ en $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$. De spinodale lijn, welke aan den kant van $H_2$ dicht bij $\frac{d^2\psi}{dv^2}=0$ blijft, verwijdert zich, naarmate wij de Heliumzijde naderen, verder van deze lijn om ook buiten $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ te blijven. Ik zal blijven aannemen dat de spinodale lijn aan de zijde der kleine volumes gesloten blijft. De veranderingen, welke aangebracht moeten worden als dit niet het geval mocht zijn, zullen gemakkelijk in het resultaat waartoe wij komen, aangebracht worden. Bij deze $T > T_{k_1}$ zijn er dan drie plooipunten. Bij zeer klein verschil van $T$ en $T_{k_1}$ is er vooreerst het gewone plooipunt aan de Heliumzijde; en verder zijn er twee heterogene plooipunten, n.l. een realiseerbaar bij de zeer kleine volumes, en een verborgen (zie o.a. fig. 12 en fig. 13 der vorige mededeelingen).

Mocht nu samenvloeiing plaatsvinden van het eerstgenoemde plooipunt met het verborgen, zooals bij de bespreking dezer figuren ondersteld is, dan zou er slechts één enkel plooipunt overblijven; maar er is nog een ander meer ingewikkeld geval mogelijk. Als $\frac{d^2\psi}{dv^2}=0$ en $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ geheel gescheiden zijn zooals bij toenemende temperatuur geschieden zal, dan kan nl. de spinodale lijn of om beide krommen heen blijven loopen, zooals ik meer malen geteekend heb, of zij kan zich splitsen tusschen beide krommen in. Voor het splitsen is noodig dat zij zoo ver van elkander zich verwijderen,

dat tusschen in een punt komt, waarin niet alleen $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2}$ positief zijn, maar het produkt gelijk aan $\left(\frac{d^2\psi}{dxdv}\right)^2$ — wat te eerder geschieden kan als de lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT} = 0$ in de nabijheid is. In dat geval ontstaan er twee nieuwe realiseerbare plooipunten. Bij iets hoogere temperatuur zijn er dan 5 plooipunten, omdat er bij de drie hierboven genoemde zich 2 nieuwe gevoegd hebben. En nu, zooals ik aangetoond heb, toen ik een dergelijke splitsing besprak, zal bij iets hoogere temperatuur het verborgen plooipunt met een der nieuwgevormde realiseerbare samenvallen, en als een paar heterogene plooipunten verdwijnen. Dus zijn er 3 realiseerbare plooipunten over, nl. een dat het plooipunt is van de helft der plooi (dwarsplooi) aan de waterstofzijde. En de twee andere, welke het onderste en bovenste plooipunt zijn van de helft der plooi, welke zich afgesnoerd heeft (lengteplooi). Met andere woorden: de eene helft is een plooi welke de kromme $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ omgeeft en de andere helft loopt om $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ heen. Bij deze helft vervult $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ in vele opzichten de rol, welke anders $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ vervult. De splitsing van de spinodale lijn, zoodat een lengteplooi zich afsnoert, kan dus plaats vinden zóó dat deze lengteplooi aanwezig is bij temperaturen waarbij $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ nog bestaat bij dezelfde waarde van $x$, maar blijft dan beperkt tot zeer kleine volumes (mengsels van water en phenol); of zij kan plaats vinden zóó dat $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ niet meer voor dezelfde waarde van $x$ bestaat, maar dan behoeven de volumes niet zoo klein te zijn. Men zou kunnen zeggen: de afsnoering zou zoo kunnen geschieden dat de beide gedeelten der plooi boven of naast elkander bestaan.

Daarenboven kan het geval voorkomen dat $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ geheel verdwenen is, en $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ alleen bestaat. Dan is er alleen een lengteplooi aanwezig. Dit kan alleen plaats vinden bij temperaturen boven $T_{k_1}$ en $T_{k_2}$ en als, wat ik $T_g$ heb genoemd grooter is dan $T_{k_1}$ en $T_{k_2}$.

In fig. 27 heb ik de $p,T$-projectie der plooipuntslijn, welke weder in het $v,x$-vlak een lijn is die zich continu van den linker- naar den

Fig. 27.

rechterkant beweegt, geteekend. Bij $T_k$ voor $H_1$ zijn er 3 punten dezer lijn; het benedenste is het verborgen plooipunt tusschen $E$ en $F$ gelegen. De plaats der punten $E$ en $F$ is willekeurig gekozen, zoodat het ook mogelijk zou kunnen zijn dat $E$ meer rechts moet liggen kan $T_{k_1}$. Bij de waarde van $T_D$, de splitsingstemperatuur komen 2 nieuwe punten bij. Bij $T_F$ vereenigt zich een paar heterogene plooipunten. Bij $T_C$ zou de afgesnoerde lengteplooi verdwijnen. Tusschen $T_C$ en $T_D$ zijn er voor de afgesnoerde plooi twee plooipunten. Tusschen $G$ en $L$ loopt de driephasendruk, waarvan het uiteinde $L$ zoo gekozen is dat het punt $D$ (splitsingspunt) beneden den driephasen driehoek ligt en dus niet waargenomen kan worden. Door het experiment kunnen dus alleen de volgende 3 gedeelten verwezenlijkt worden, 1° $H_2G$, 2° $H_1$. $ACL$, 3° $GL$. En nu als de onderstelling dat de plooi aan den kant der limietvolumes gesloten is, onjuist zou zijn, dan heeft men alleen het bovenste gedeelte bij $A$ en $C$ open te breken en de open takken asymptotisch naar oneindig hoog te laten loopen. Deze plooipuntslijn is dus in den grond der zaak gelijk aan die met het strikpunt, welke ik geteekend heb. Alleen een der takken en wel de linker tak heeft een maximum en een minimumdruk en een maximum en een minimumtemperatuur er bij gekregen. Teekende men de $T,x$-projectie dan zouden er 2 maxima en twee minima zijn — evenzoo in de $p,x$-projectie. Maar de $v,x$-projectie blijft eenvoudig. Is de plooi bij de limietvolumes gesloten, dan is er een minimumvolume, in het tegenovergestelde

[1]) In deze figuur is de gedaante der plooipuntslijn geteekend als inderdaad de spinodale lijn tusschen $\frac{d^2\psi}{dv^2}=0$ en $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ zou kunnen loopen. Later onderzoek moet doen blijken of deze complicatie al of niet kan voorkomen. Komt zij voor, dan zal het rechter gedeelte der plooi, (dwarsplooi) veel smaller zijn, dan wanneer deze complicatie niet intreedt. In het laatste geval is het rechter gedeelte der plooi een samengestelde plooi.

geval komen daarvoor in de plaats twee punten, waarbij $v = b$ is. Want noch bij een homogeen dubbelpunt, noch bij een heterogeen dubbelpunt is $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{pl} = 0$. En in het punt waarin $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{pl} = 0$ is, of $\left(\frac{dx}{dv}\right)_{pl} = 0$ is, heeft (zie blz. 218) $\frac{dp}{dT}$ niet een waarde, welke iets bijzonders vertoont.

De tweede vorm zal in zoover van den hier beschrevenen verschillen, dat de temperatuur waarbij de afsnoering van de lengteplooi plaats grijpt, ondersteld wordt gelijk te zijn aan $T_{k_2}$ (kritische temperatuur van den tweeden component).

Dat zal kunnen geschieden als de temperatuur waarbij $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ verdwijnt niet alleen hooger is dan $T_{k_1}$ maar ook hooger dan $T_{k_2}$ (een geval waarop ik reeds vroeger in deze Bijdragen doelde).

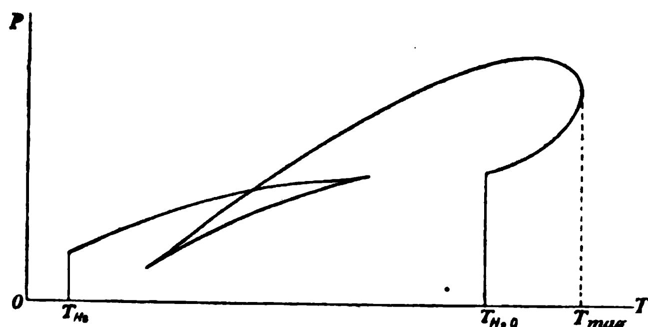



Fig. 28.

Dan is de $p,T$-projectie door fig. 28 gegeven. De hoogste temperatuur, welke dan voorkomt, is die waarbij $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ verdwijnt.

Dat bij het mengsel Helium en Waterstof de tweede vorm der plooipuntslijn voor kan komen, en dat dus $T_g > T_{k_2}$ kan zijn, volgt trouwens onmiddellijk uit de formule voor de waarde van $T_g$ (verslag 24 Mei 1907) nl.

$$MRT_g = 2\,\frac{a_1 + a_2 - 2a_{12}}{b}\,x(1-x)\,\frac{1-y}{(1+y)^2}.$$

Voor het geval n.l. dat $a_1$ en $a_{12}$ verwaarloosd kunnen worden en $b_1 < b_2$ en $x > \frac{1}{3}$ vindt men inderdaad $T_g > T_{k_2}$. Zoo vindt men voor $x = 0{,}4$, wat bij $\frac{b_1}{b_2 - b_1} = 0{,}3704$ behoort, $MRT_g > \frac{8}{27}\frac{a_2}{b_2}$. Bij nog grootere waarde van $x$ zou deze waarde van $T_g$ nog grooter gevonden worden; maar als $a_1 + a_2 - 2a_{12}$ merkbaar kleiner dan $a_2$ is, kan dit natuurlijk anders uitvallen. In dat geval blijft de plooi een samengestelde plooi tot $T = T_{k_2}$. Bij deze waarde van $T$ is $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ verdwenen,

en bestaat $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ nog. Boven $T_{k_2}$ is de samengestelde plooi dus als lengteplooi te beschouwen.

Hebben wij in het hierboven beschreven geval een in het $v,x$-vlak continu verloopende plooipuntslijn, welke aan den linkerkant begint in het kritisch punt van den eersten component en welke eindigt in het kritisch punt van den tweeden component, al moge er een maximumwaarde van $x$, en dan ook een minimwaarde mogelijk zijn, er is nog een ander geval mogelijk, en waarschijnlijk komt dit geval voor bij het mengsel water en phenol. Natuurlijk dat de eerstgenoemde lijn, welke in de kritische punten der componenten begint en eindigt moet blijven bestaan, als wij steeds blijven aannemen dat de plooi aan de zijde der limietvolumes gesloten blijft. Anders valt zij uiteen in 2 stukken, welke ik dan echter als twee deelen van een zelfden tak der plooipuntskromme beschouw. Is er nu nog een andere tak mogelijk, dan moet dit een afzonderlijke gesloten kromme zijn — welke echter als men de plooi open onderstelt aan den kant der limietvolumes, beschouwd kan worden als te beginnen in een punt der lijn $v = b$ en te eindigen in een ander punt dezer lijn. Wij hebben dit geval als de afsnoering der lengteplooi plaats heeft bij een temperatuur, welke lager is dan $T_{k_1}$ en $T_{k_2}$. In dat geval zal de lengteplooi, zooals hier boven beschreven is, bij zekere waarde van $T$ hooger dan de afsnoeringstemperatuur, zich geheel teruggetrokken hebben tot volumes, kleiner dan die van de vloeistofbinodale der dwarsplooi. De driephasendruk bestaat dan niet meer, en de eerstgenoemde tak der plooipuntslijn, welke de kritische punten der componenten vereenigt, heeft haar eenvoudigste beloop. In fig. 29

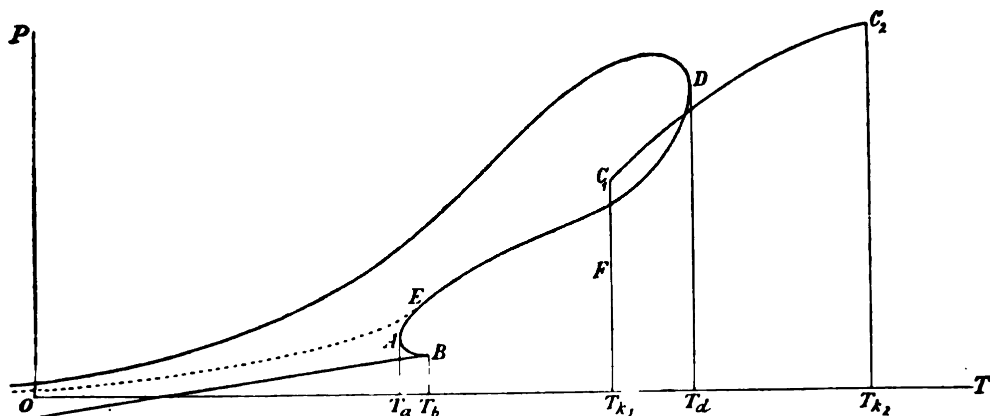



Fig. 29.

heb ik de $p,T$-projectie geteekend. Bij $T = T_A$, welke kleiner is dan $T_{k_1}$ en $T_{k_2}$, heeft de afsnoering plaats en is een homogeen

dubbelpunt. Bij $T = T_b$ is een heterogeen dubbelpunt en bij $T_d$ weder een homogeen dubbelpunt. Onderstellen wij de lengteplooi open bij $v = b$ dan moet $p_D$ oneindig groot worden gedacht en vervalt het bovenste gedeelte van dezen tweeden tak. De driephasendruklijn, welke in $E$ eindigt, zal haar andere uiteinde, of liever haar beginpunt dan wel bij $T = 0$ moeten hebben.

Een zeer eenvoudig en opmerkelijk geval van een gesloten kromme voor den tweeden tak der plooipuntslijn zouden wij hebben als de laagste temperatuur, waarbij een heterogeen dubbelpunt ontstaat, weinig beneden de temperatuur ligt, waarbij dat dubbelpunt weder verdwijnt — en deze temperatuur beneden $T_{k_1}$ en $T_{k_2}$ ligt. Dan zal ook de temperatuur, waarbij weder een heterogeen dubbelpunt aanwezig is, slechts

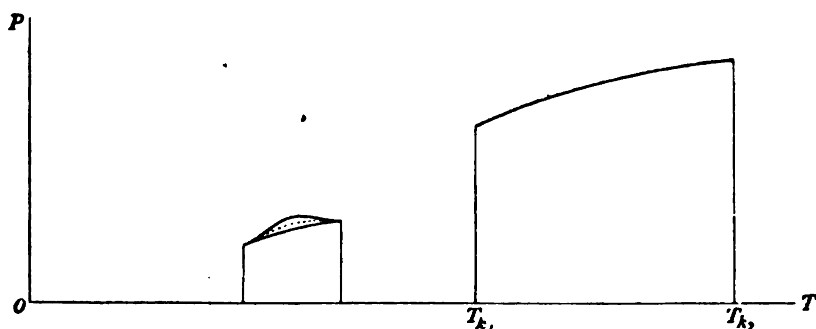



Fig. 30.

weinig hooger liggen dan het eerste. Fig. 30 geeft dan weder de $p, T$-projectie voor dit geval. Er kan dan een driephasendruk zijn, welke door de stippellijn is aangeduid. Dan begint bij een temperatuur welke veel beneden $T_{x_1}$ en $T_{x_2}$ ligt de vloeistof zich in twee phasen te ontmengen, om bij weinig hoogere temperatuur weder homogeen te worden — ten minste als men de waarde van $x$ gekozen heeft tusschen die welke bij de uiteinden van den driephasendruk behoort. In de $v,x$-projectie hebben wij dan een kleine gesloten figuur met maximum- en minimumvolume.

Er kunnen echter zoo velerlei vormen van plooipuntslijnen mogelijk geacht worden, dat dat een afzonderlijke studie zou vereischen. Worden zij door het experiment gevonden, dan zullen de regels, welke in deze bijdragen gegeven zijn, wel voldoende blijken naar ik verwacht, om ze begrijpelijk te maken. Wel heb ik het voornemen om door eenige mathematische ontwikkelingen de omstandigheden waarin de besproken vormen voorkomen binnenkort nader aan te geven.

**Natuurkunde.** — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Supplement N°. 16 bij de Mededeelingen uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: Dr. H. KAMERLINGH ONNES en Dr. W. H. KEESOM: "*Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van* VAN DER WAALS. XVI. *Over het zinken van de gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels voor het geval dat de moleculen van eene der componenten slechts eene zwakke aantrekking uitoefenen.*"

§ 1. *Inleiding.* In Meded. N°. 96*b*, Zittingsversl. Dec. '07 p. 507 werd het zinken der gasphase in de vloeistofphase[1]), het barotropische verschijnsel, bij binaire mengsels voor eene gasvloeistofplooi, die bij lagere temperatuur als eene dwarsplooi het ψ-vlak oversteekt, behandeld. Daarbij werd de behandeling voor temperaturen, waarbij het optreden van eene lengteplooi storing brengt, tot eene volgende mededeeling uitgesteld. Voorts werden meer bijzondere gevallen, als het optreden van minimum of maximum kritische temperatuur of minimum of maximum coëxistentiedruk, buiten beschouwing gelaten en werd de behandeling beperkt tot het geval dat retrograde condensatie van de eerste soort optreedt.

Bij de behandeling van de voorwaarden voor het zinken van eene gasphase in eene vloeistofphase bij binaire mengsels in Meded. N°. 96*c*, Zittingsversl. Dec. '06 p. 514 en Jan. '07 p. 655 bleek in de eerste plaats, dat de theorie van het ψ-vlak van VAN DER WAALS, althans indien de aldaar genoemde onderstellingen gelden, en stoffenparen met de vereischte $a_{22M}/a_{11M}$, $b_{22M}/b_{11M}$ en $M_2/M_1$ gevonden worden, het optreden van barotropische plooipunten[2]) doet verwachten[3]).

[1]) JAMIN, C.R. 96 (1883) p. 1448, Journ. de phys. (2) 2 (1883) p. 389 werd door beschouwingen, die zoowel met de, door NATTERER 1844 het eerst geconstateerde, beperktheid der samendrukbaarheid van een gas bij hooge drukkingen als met ons tegenwoordig inzicht in de menging van twee stoffen niet zijn overeen te brengen, tot de vraag gebracht of het niet mogelijk zou zijn dat bij samendrukking van een mengsel van $CO_2$ met lucht of met waterstof zich eene vloeistofphase verzamelde boven de gasphase. Het gelukte CAILLETET (JAMIN l.c.) niet dit te verwezenlijken.

[2]) Over de eigenaardige verschijnselen, die zich bij een barotropisch plooipunt voordoen, hopen wij eerlang eene mededeeling te doen.

[3]) Dat het in Meded. N°. 96*c*, Dec. '06, § 5 gevonden barotropisch plooipunt behoort tot de gas-vloeistofplooi (Meded. N°. 96*c*, Jan. '07 p. 655 noot 1), werd afgeleid uit den loop der spinodale lijn voor dit geval, in verband met den loop der plooipuntslijn. Hetzelfde kan als volgt blijken: Door toepassing van het criterium (3) van Suppl. N°. 15, Maart '07, p. 852 vindt men, dat mengsels van een stoffenpaar met de in genoemde § aangegeven verhoudingen tot geval (*c*) (zie p. 235) behooren, terwijl men uit VAN LAAR's fig. 22, Arch. TEYLER (2) 10 (1907) p. 138 Zittingsversl. Sept. '06 p. 230, fig. 1, kan afleiden dat de plooipuntslijn van $x=0$ naar $v=b$ oversteekt (type I van VAN LAAR).

Verder dat voor mengsels met zekere verhouding $v_{k2}/v_{k1}$ voor niet te groote $T_{k2}/T_{k1}$ (vanaf 0 tot zekere waarde, zie Tab. I l.c. p. 656), slechts één barotropisch plooipunt optreedt, wat in verband met Meded. N°. 96[b] p. 508 er op wees dat voor de kennis van het beloop der barotropische verschijnselen bij lagere temperatuur beschouwingen waarbij gelet is op de dwarsplooi alleen, voor deze mengsels niet voldoende zijn[1]) (zie Meded. N°. 96[c] p. 658).

Omtrent de kritische temperatuur van helium werd in Meded. N°. 96[c] p. 655, noot 2 uit de in Meded. N°. 96[a] Zittingsversl. Nov. '06 p. 454 beschreven waarneming van het barotropisch verschijnsel bij een mengsel van helium en waterstof eene schatting[2]) verkregen, waarbij het reeds in Meded. N°. 96[a], p. 455, geuitte vermoeden, dat de moleculen van helium slechts eene zeer geringe onderlinge aantrekking uitoefen, bevestigd gevonden werd.

Dit gaf aanleiding tot het reeds in Meded. N°. 96[b] p. 507 aangekondigde onderzoek omtrent binaire mengsels, waarvan de eene component een gas is waarvan de moleculen geene of slechts zwakke aantrekking uitoefenen (Suppl. N°. 15, Zittingsversl. Febr. '07 p. 754). Hierbij werd voor het eerst eene plooi beschreven, die bij dalende temperatuur van af de kant der kleine volume's op het $\psi$-vlak te

[1]) Bij mengsels van stoffenparen als bedoeld in tabel I p. 656 aldaar, en waarvoor $0.219 > T_{k_2}/T_{k_1} > 0.196$ (zie de errata p. 678), treden drie barotropische plooipunten op, waarvan echter één behoort tot het niet stabiele gebied. De twee andere behooren althans voor de grootere der aangegeven verhoudingen $T_{k_2}/T_{k_1}$, tot eene plooi, die van af $K_1$ op het $\psi$-vlak komt en bij lagere temperatuur als eene dwarsplooi het $\psi$-vlak oversteekt. Hiervoor zullen dan, voor zoover hier vaste phasen geen storing teweegbrengen, de beschouwingen van Meded. N°. 96[b] gelden. Voor de kleinere dier verhoudingen zal ook nog een dezer twee barotropische plooipunten in het niet stabiele fluide gebied vallen en zal men dus met het optreden van driephasenevenwichten rekening moeten houden.

[2]) Voor de berekeningen in noot 2, p. 655 van Meded. N°. 96c werd voor $a$ en $b$ van waterstof gebruik gemaakt van de door KOHNSTAMM (LANDOLT-BÖRNSTEIN-MEYERHOFFER's Physik. Chem. Tabellen 1905) daarvoor berekende waarden, welke tot punt van uitgang hadden $T_k = 38{,}6$, $p_k = 20$ volgens OLSZEWSKI, Wied. Ann. Bd. 56, p. 133, 1895. Ontleent men de $a$ en $b$ voor $H_2$ aan $T_k = 29$ à $32$, $p_k = 15$ volgens DEWAR (B. A. Report 1902) dan levert de schatting voor $T_{kHe}$ ongeveer 1°, de nieuwere gegevens van OLSZEWSKI, Ann. d. Phys. 17 (1905) p. 986: $T_k = 32.3$, $p_k = 14.2$, brengen haar tot ruim 1° (de berekening volgens noot 2 l.c. levert $a_{22M}/a_{11M} = 1/_{50}$, $T_{kHe} = 1.3$).

Dit zou in de classificatie van de heliummengsels genoemd in Suppl. N°. 15, Mei '07, § 8, deze wijzigingen brengen dat tot geval ($b$) zouden behooren mengsels van He met $H_2O$, $O_2$, A, Ne, NO, $NH_3$, tot het geval ($c$) die met $H_2$, $H_2S$, $CO_2$. Voor de wijziging die eene andere aanname omtrent $a_{12M}$ (verg. p. 139) zou brengen in de omstandigheden, waaronder de van $v = b$ uitgaande plooi optreedt, zie men Suppl. N°. 15 l. c. p. 62). Eene kleinere $a_{12M}$ zou zelfs weer eene opschuiving in de classificatie in de richting van ($c$) naar ($a$) kunnen bewerken.

voorschijn treedt om bij $T = T_{k_1}$ de kant $x = 0$ te bereiken en daarna in eene scheef van $v = b$ naar $x = 0$ overstekende plooi over te gaan, aan welke beschrijving zich beschouwingen omtrent beperkte mengbaarheid in den gastoestand aanknoopten.

In Suppl. N°. 15 § 7, Zittingsversl. Maart '07 p. 851 werden voor mengsels, waarin eene component een gas is met zwakke aantrekking, drie gevallen onderscheiden, die in § 9, Zittingsversl. Mei '07 p. 64 als gevallen (*a*), (*b*) en (*c*) aangeduid worden. Daarvan komt geval (*a*) overeen met het bovengenoemde; in geval (*b*) vereenigen zich eene vanaf $v = b$ komende plooi en eene vanaf $x = 0$ komende plooi in een dubbelplooipunt [1]) tot eene enkele plooi; in geval (*c*) gaat eene plooi vanaf $x = 0$ uit om bij lagere temperatuur met $v = b$

[1]) De gegevens voor de twee dubbelpunten in het spinodalennet, waarvan dit dubbelplooipunt er een (een strikpunt, verg. VAN DER WAALS b.v. Zittingsversl. Febr. '07 p. 690) is, kunnen bij de Meded. N°. 96*c* p. 516 genoemde onderstellingen op de volgende wijze gevonden worden (verg. Meded. Suppl. N°. 15, Mei '07, p. 61 noot 2):

De vergelijking voor de $v,x$-projectie van de spinodale lijn op het moleculaire $\psi$-vlak:

$$RTv_M^2 = 2(1-x_M)(v_M\sqrt{a_{11M}}-b_{11M}\sqrt{a_M})^2 + 2x_M(v_M\sqrt{a_{22M}}-b_{22M}\sqrt{a_M})^2 \quad (1)$$

(verg. Suppl. N°. 15, Febr. '07, p. 756) geeft als voorwaarden voor het optreden van een dubbelpunt na eenige voor de hand liggende herleidingen:

$$(v_M\sqrt{a_{11M}}-b_{11M}\sqrt{a_M})^2 = 2b_{11M}\sqrt{a_{11M}}\,.(1-x_M)(v_M\sqrt{a_{11M}}-b_{11M}\sqrt{a_M}) + $$
$$+ 2b_{22M}\sqrt{a_{11M}}\,.\,x_M(v_M\sqrt{a_{22M}}-b_{22M}\sqrt{a_M}) \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

en

$$(v_M\sqrt{a_{22M}}-b_{22M}\sqrt{a_M})^2 = 2b_{11M}\sqrt{a_{22M}}\,.(1-x_M)(v_M\sqrt{a_{11M}}-b_{11M}\sqrt{a_M}) + $$
$$+ 2b_{22M}\sqrt{a_{22M}}\,.\,x_M(v_M\sqrt{a_{22M}}-b_{22M}\sqrt{a_M}) \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Uit (2) en (3) volgt:

$$\frac{(v_M\sqrt{a_{11M}}-b_{11M}\sqrt{a_M})^2}{\sqrt{a_{11M}}} = \frac{(v_M\sqrt{a_{22M}}-b_{22M}\sqrt{a_M})^2}{\sqrt{a_{22M}}} \; . \; . \quad (4)$$

Uit deze verg. den wortel trekkende, kunnen wij (2) en (3) herleiden tot:

$$\frac{v_M\sqrt{a_{11M}}-b_{11M}\sqrt{a_M}}{\sqrt{a_{11M}}} = 2b_{11M}(1-x_M) \pm 2b_{22M}x_M\sqrt[4]{a_{22M}/a_{11M}} \; . \quad (5)$$

en

$$\frac{v_M\sqrt{a_{22M}}-b_{22M}\sqrt{a_M}}{\sqrt{a_{22M}}} = 2b_{22M}x_M \pm 2b_{11M}(1-x_M)\sqrt[4]{a_{11M}/a_{22M}} . \quad (6)$$

Door uit (5) en (6) $v_M$ te elimineeren verkrijgt men voor $x_M$ de verg. (1) van Suppl. N°. 15, Maart '07, p. 852.

Hoe daarna $v_M$ en $T$ (zie Suppl. N°. 15, Maart '07, p. 854) voor het dubbelplooipunt afgeleid worden, kan aan den lezer overgelaten worden (vergelijk met deze ontwikkelingen VAN LAAR, Zittingsversl. April '07 p. 943 sqq. en Arch. TEYLER (2) 11 (1907) 1re partie § 5).

tot raking te komen en daarna in eene scheef overstekende plooi over te gaan [1]).

Voor deze onderscheiding werd, in verband met de waarde van $b_{22M}/b_{11M}$, steeds $a_{22M}/a_{11M}$ zoo klein ondersteld, dat de plooipuntslijn van $K_1$ naar de lijn $v = b$ oversteekt, en dat bij de te beschouwen temperaturen nog geen driephasenevenwichten optreden [2]).

Nu de schattingen omtrent de $a$ en $b$ van helium recht geven tot het vermoeden dat voor mengsels van helium en waterstof de plooipuntslijn [3])

---

[1]) KUNDT, Berl. Sitzb. Oct. 1880, S. 812—824 meende, dat het steeds mogelijk zou zijn door inpersen van een gas in eene vloeistof deze in den gastoestand over te brengen. Aan deze meening is vastgehouden in de dissertatie van VAN ELDIK (Leiden 1898, p. 7, verg. Comm. Phys. Lab. Leiden, Suppl. N°. 3, p. 45), waar opgemerkt wordt, dat de bedoelde bewerking, zoo zij verwezenlijkt wordt het bepalen van den bij de waarnemingstemperatuur behoorenden plooipuntsdruk van het aan de proef onderworpen stoffenpaar zou zijn. Daarbij werd stilzwijgend aangenomen, dat voor elke temperatuur tusschen de kritische temperaturen der bestanddeelen, als bij mengsels van chloormethyl en koolzuur bijv., bij genoegzaam hoogen druk de plooipuntstoestand bereikt zou kunnen worden, al moest deze dan ook bij waterstof en ether boven 750 atmosferen liggen, zooals VAN ELDIK, rekening houdende met de vermindering, die bij toenemenden druk in de afname van de oppervlaktespanning teweeggebracht door eenzelfde drukvermeerdering optreedt, afleidde (KUNDT l.c. p. 818, VAN ELDIK Diss. p. 5, verg. Suppl. N°. 3 p. 52). Let men op de nu door de theorie voorziene mogelijkheid, dat deze vermindering buiten het waarnemingsgebied stand houdt, dan lijkt het volgens de genoemde waarnemingen waarschijnlijk, dat het voor genoemd stoffenpaar (en evenzoo wat betreft waterstof en aethylalcohol) bij de waarnemingstemperatuur (KUNDT 21°, VAN ELDIK 9°,5) — drukkingen, die op de moleculen krachten uitoefenen grooter dan die welke de deelen der moleculen samenhouden, beschouwen wij hierbij als oneindig groot — niet mogelijk zou zijn de oppervlaktespanning tot 0 terug te brengen, zoodat dus op het $\psi$-vlak bij die temp. reeds eene van $x=0$ naar $v=b$ scheef overstekende plooi zou aanwezig zijn.

Inderdaad zou men uit de p. 233 noot 3 aangehaalde figuur van VAN LAAR ook afleiden dat ether-waterstof (en eveneens alcohol-waterstof) tot het type I van VAN LAAR behooren, en wel volgens de door ons aangegeven criteria tot geval (*c*). De vergelijkingen van VAN DER WAALS, Contin. II p 43 zouden evenwel met $a_{12M} = \sqrt{a_{11M} a_{22M}}$ eene kritische temperatuur van volledige mengbaarheid aanwijzen van omstreeks —200° C. zoodat volgens die onderstellingen eerst beneden deze temp. eene scheef overstekende plooi zou optreden. Zou het bestaan van eene scheef overstekende plooi bij de temp. der bovengenoemde proeven bevestigd worden, dan zou dit o.a. er op kunnen wijzen dat voor het genoemde stoffenpaar $a_{12M}$ belangrijk kleiner is dan $\sqrt{a_{11M} a_{22M}}$ (vergel. p. 239).

[2]) Volgens deze beperking zal bv. voor $b_{22M}/b_{11M}$ grooter dan zekere waarde geval *c* niet kunnen optreden (verg. Zittingsversl. Maart '07 p. 853).

[3]) Experimenteel is eene plooipuntslijn, die van $x=0$ uitgaat en zich naar de kant $v=b$ richt, het eerst gevonden door KUENEN, Zittingsversl. Sept. '02 p. 318 bij mengsels van elkaar en methylalcohol.

van $x = 0$ naar $v = b$ oversteekt [1]), is het wenschelijk de barotropische verschijnselen voor de genoemde gevallen aan eene nadere beschouwing te onderwerpen. We zullen ons bij deze behandeling voor mengsels, waarvan eene component een gas met zwakke aantrekking is, wederom beperken, en veronderstellen, dat in de beschouwde gevallen bij de beschouwde temperaturen de tweede tak der plooipuntslijn, (VAN LAAR Zittingsversl. Mei '05 p. 14) die van $K_2$ uitgaat, haar invloed niet doet gevoelen, en dus driephasenevenwichten nog niet optreden.

§ 2. *Het beloop der barotropische verschijnselen voor binaire mengsels, waarvan eene component een gas is, waarvan de moleculen slechts zwakke aantrekking uitoefenen.*

Wij zullen bij deze behandeling de in § 1 genoemde gevallen *a*, *b* en *c* moeten onderscheiden.

*a*. In dit geval treedt voor $T_{k_m} > T > T_{k_1}$ eene van uit $v = b$ uitgaande, naar de zijde der groote *v*'s gesloten, plooi op, die wij in Suppl. N°. 15, Febr. '07, p. 761 gas-gasplooi genoemd hebben. Is $b_{22} < b_{11}$, dan zal voor $T > T_{bpl_2}$ (zie Meded. N°. $96^b$ p. 510) $\theta_{pl} > \frac{\pi}{2}$ zijn; bij $T = T_{bpl_2}$ treedt een barotropisch plooipunt op (verg. Suppl. N°. 15, Febr. '07, Pl. I, fig. 1); bij $T < T_{bpl_2}$ vindt men op de gas-gasplooi eene barotropische koorde (verg. Suppl. N°. 15, Pl. I, fig. 2). Bij $T = T_{k_1}$ gaat de gas-gasplooi over in eene scheef overstekende gasvloeistofplooi. Op deze zal eene barotropische koorde aanwezig zijn (zie fig. 1), totdat deze onder den driephasendriehoek verdwijnt, en aldus in het niet stabiele gebied overgaat. Gelijk in § 1 werd vermeld zullen we van de beschrijving van hetgeen er geschiedt, als drie-phasen-evenwichten zijn opgetreden, afzien. Evenzoo zullen we meer gecompliceerde gevallen, als het optreden van twee barotropische koorden op de gas-gasplooi, drie op de scheef overstekende plooi enz., voorloopig buiten beschouwing laten, totdat nader onderzoek mocht leeren, dat deze gevallen mogelijk zijn.

Is $b_{22} > b_{11}$ dan zal de van af $v = b$ komende plooi de kant $x = 0$ kunnen bereiken en in eene scheef overstekende plooi kunnen overgaan zonder dat het noodig is dat eene barotropische raakkoorde optreedt.

---

[1]) Dit volgt bij de vermelde schattingen omtrent de kritische temperatuur en druk van helium (verg. p. 234 noot 2) en de gemaakte onderstellingen (vergel. Zittingsversl. Dec. '06 p. 516) ook uit VAN LAAR's fig. 22, Arch. TEYLER (2) 10 (1907) p. 38.

*b*. Voor $b_{22} < b_{11}$ zal bij $T_{bpl_2} > T_{dpl}$ (verg. Suppl. N°. 15, Maart '07 p. 854) een barotropisch plooipunt optreden. Dit barotropisch plooipunt, en evenzoo bij $T_{bpl_2} > T > T_{dpl}$ de barotropische raakkoorde, kan zoowel op de van $v = b$ uitgaande. als op de van $x = 0$ uitgaande plooi optreden (fig. 2 en 3). Indien in het homogeen dubbelplooipunt de isopiest evenwijdig aan de $x$-as zou loopen, zou $T_{bpl_2}$ met $T_{dpl}$ samenvallen. Voor $T < T_{dpl}$ is op de scheef overstekende plooi, evenals in geval *a*, eene barotropische koorde aanwezig [1]).

Bij $b_{22} > b_{11}$ is, evenals in dit geval bij *a*, het optreden van barotropische raakkoorden niet vereischt.

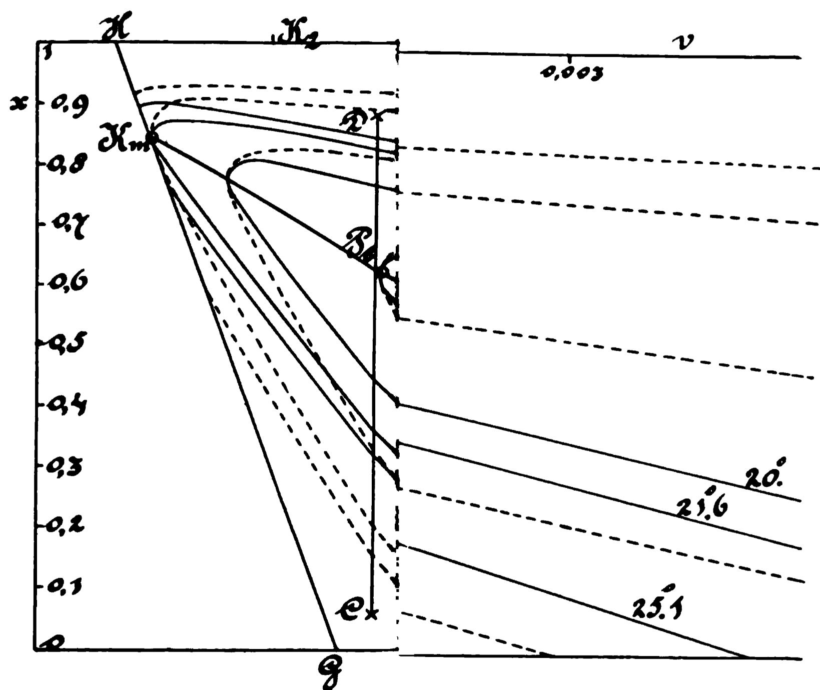
*c*. Is $b_{22} < b_{11}$, dan zal bij $T_{bpl_2} < T_{k_1}$ en $> T_{km}$ een barotropisch plooipunt optreden, bij lagere temperaturen vindt men op de van $x = 0$ uitgaande aan de zijde der kleine $v$'s gesloten plooi, en bij $T < T_{km}$ op de scheefoverstekende plooi eene barotropische raakkoorde (fig. 4). Voor $b_{22} > b_{11}$ als bij *a*. en *b*.

In fig. 5 is het beloop der spinodalen (getrokken) en der connodalen (gestreept) op het $\psi$-vlak voor de gewichtseenheid voor een geval *c*. meer uitvoerig voorgesteld. De figuur is geconstrueerd met het oog op mengsels van helium en waterstof, waarbij aangenomen zijn de onderstellingen genoemd in Meded. N°. 96$^c$, Dec. '06, p. 516, en voor waterstof $T_{k_1} = 32{,}3$, $p_{k_1} = 14.2$, voor helium $T_{k_2} = 1{,}3$, $b_{MHe} = \frac{1}{2} b_{MH_2}$ (p. 234 noot 2)[2]). Het volume $v$ is uitgedrukt in het theoretisch normaalvolume van de moleculaire hoeveelheid als eenheid.

---

1) Het door JAMIN, C. R. 96 (1883) p. 1451, Journ. de phys. (2) 2 (1883) p. 383, mogelijk geachte verschijnsel zou in het licht van onze tegenwoordige kennis omtrent het gedrag van mengsels, en ontdaan van de hiermede niet te vereenigen beschouwingen van dien natuurkundige (verg. p. 233 noot 1) als volgt beschreven worden: Bij samenpersing van een gas boven eene geschikte hoeveelheid vloeistof (zie p. 240 noot 2) wordt deze vloeistof eerst onder plooipuntsomstandigheden tot oplossing gebracht, waarna bij verder inpersen van het gas in de zoo gevormde homogene phase zich eene phase, die rijker is aan de minst vluchtige component (door JAMIN vloeistof, door ons in bepaalde gevallen, zie Suppl. No. 15, Febr. '07, § 4, tweede gasphase genoemd), zal kunnen afscheiden *boven* de phase, die rijker is aan de vluchtigste component. Indien dit verschijnsel zou kunnen verwezenlijkt worden zouden we te doen hebben met een geval *b*) voor eene temperatuur $T > T_{dpl}$, en waarbij de lijn $RQ$ (zie fig. 6) de van $v = b$ uitgaande plooi zoodanig snijdt dat voor de gesneden connodale raakkoorden $\theta > \frac{\pi}{2}$.

2) Intusschen moet het bij de geringe zekerheid betreffende $T_{kHe}$ en $p_{kHe}$, zoomede met het oog op de waarschijnlijkheid, dat $a_{12M} < \sqrt{a_{11M} a_{22M}}$ (zie p. 236) nog zeer goed mogelijk geacht worden, dat He—$H_2$ behoort tot geval (*b*), gelijk in Suppl. N°. 15 werd gesteld.



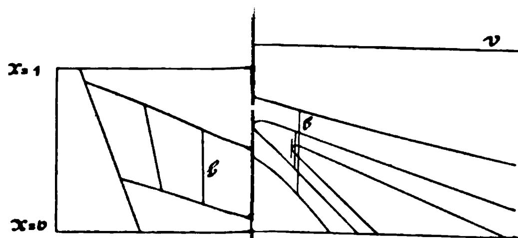


Fig Fig. 3.

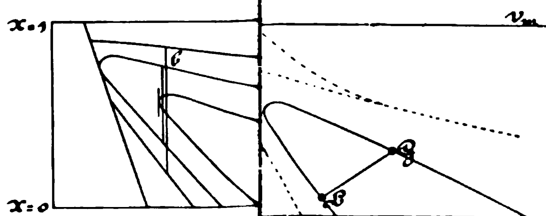


Fig. 4. Fig. 7.

I
l
é
s

t

I
t
li

d
g
l:
z
e
*b*
tl

p
k
v
v
h
p
h
d
zi
s
v
e
d
r

m
n
in

Het punt $K_m$ is berekend volgens VAN DER WAALS Cont. II, p. 43. De spinodalen zijn geconstrueerd als in Suppl. N°. 15, Febr. '07, p. 756. $P_b$ is het barotropisch plooipunt, berekend op de in Meded. N°. 96$^c$, Dec. '06, p. 517 aangegeven wijze. In de figuur is verder opgenomen de plooipuntslijn $K_1K_m$, berekend volgens de door VAN LAAR, Zittingsversl. Maart '05 p. 695 gegeven vergelijking. De tweede tak der plooipuntslijn is voor de schaal op welke de teekening is uitgevoerd, niet van de rechte lijn $HK_2$ te onderscheiden.

Van de connodalen zijn berekend de snijpunten met de lijn $x=0$, voorstellende de verzadigingspunten voor zuivere waterstof, waartoe gebruik gemaakt is van de verzadigingsconstanten die door DALTON [1]) voor eene stof die de toestandsvergelijking van VAN DER WAALS met standvastige $a$ en $b$ volgt, berekend zijn. De loop der connodalen waarvan voor $T \geqq T_{km}$ bovendien de plooipunten bekend zijn, is overigens schematisch aangegeven. Dit geldt in het bijzonder ook voor de snijpunten van de connodale voor $T=20$ met de lijn $v=b$ zoodat dus ook de loop van de connodale, in het bijzonder van den gastak, in de nabijheid der lijn $v=b$ onzeker is. De lijn $CD$ stelt de experimenteel bepaalde barotropische raakkoorde voor $T=20$ (zie Meded. N°. 96$_a$ en N°. 96$^b$ Jan. '07 p. 655 noot 2) voor.

De ligging van de lijn $CD$ ten opzichte van de connodalen zou er op kunnen wijzen dat $T_{km}$ hooger is dan door ons werd berekend, wat daaraan kan worden toegeschreven, dat òf de kritische temperatuur van helium lager is dan hier door ons werd aangenomen òf dat voor mengsels van He—$H_2$ $a_{12M} < \sqrt{a_{11M}a_{22M}}$ [2]).

Het optreden van barotropisch plooipunt en barotropische raakkoorden in geval ($c$), en eveneens in geval ($b$), indien het plaats heeft op de van $x=0$ uitgaande plooi, komt voor de hoogere temperaturen overeen met dat voor het geval dat de van $K_1$ uitgaande tak der plooipuntslijn van $x=0$ naar $x=1$ over het $\psi$-vlak oversteekt, voor welk geval in Meded. N°. 96$^b$ het gedrag beschreven werd. Voor de lagere temperaturen komt dit verschil, dat bij de in deze Meded. beschouwde gevallen de barotropische raakkoorde op de plooi aanwezig blijft, totdat deze onder den driephasendriehoek verdwijnt, terwijl bij de in Meded. N°. 96$^b$ beschouwde gevallen de barotropische raakkoorde ook door een barotropisch plooipunt van de

---

[1]) J. P. DALTON, Phil. Mag. April 1907, p. 520.

[2]) Dezelfde opmerking betreffende $a_{12M}$ voor mengsels van $H_2$ met andere stoffen zou men kunnen afleiden: voor $CO_2$ — $H_2$ (hetzelfde geldt voor $CO_2$—$O_2$) uit eene vergelijking van het experimenteel bepaalde gedeelte der plooipuntslijn met de op de wijze als boven voor He — $H_2$ berekende; voor $H_2$ — ether en $H_2$ — alcohol zie § 1 p. 236 noot 1.

plooi kan verdwijnen (benedenste barotropische plooipuntstemperatuur, zie Meded. N°. 96[b] p. 509). Dit laatste moet dan zelfs het geval zijn indien voor $T \geqq T_{k_2}$ nog geen driephasenevenwichten optreden (verg. p. 234 noot 1).

VAN DER WAALS, Zittingsversl. Dec. '06 p. 544 vestigt de aandacht op den invloed van $b_{22}/b_{11}$ op het optreden van barotropische verschijnselen door het uitspreken van dezen regel: „Als de vluchtigste stof de grootste limietdensiteit heeft, zal de gasphase spec. zwaarder kunnen zijn dan de vloeistofphase." Naar aanleiding van het boven behandelde kunnen wij nu dien regel aanvullen als volgt: Als van een binair mengsel de vluchtigste component de grootste limietdensiteit heeft, zal bij geschikte samenstelling en temperatuur de gasphase door samendrukking tot zinken in de vloeistofphase gebracht worden mits de vluchtigste component eene zoo geringe aantrekking heeft, dat door inpersen van deze de vloeistofphase van de minder vluchtige component zelfs bij de hoogste (verg. p. 236 noot 1) drukken bij bepaalde[1]) temperaturen niet tot oplossing in de gasphase kan gebracht worden[2]). In de bewoordingen van dezen regel ligt opgesloten, dat verondersteld is dat geen twee vloeistofphasen optreden.

Het is niet uitgesloten dat ook in andere gevallen het zinken van de gasphase in de vloeistofphase zou kunnen optreden[3]).

Past men dezen regel toe op stoffenparen, van welke ons gegevens voor $a_{22M}$, $a_{11M}$ en $b_{22M}$, $b_{11M}$ ten dienste staan, dan blijkt dat alleen voor He—$H_2$ met redelijken grond[4]) verwacht kan worden dat baro-

[1]) Ook bij hoogere temperaturen dan deze kunnen dan barotropische verschijnselen optreden.

[2]) Bij het samenpersen van een gas boven eene vloeistof, hierbij uitgaande van de zuivere stof, op de wijze als dit bij de proeven van KUNDT het geval was, beschrijft men op het $\psi$-vlak eene lijn, waarvan de $v, x$-projectie eene rechte is, die een punt van de lijn $x = 0$ verbindt met het punt $v = 0$, $x = 1$. Opdat bij eene bepaalde, geschikte temperatuur de vloeistofphase juist onder plooipuntsomstandigheden verdwijnt, moet men uitgaan van eene bepaalde hoeveelheid vloeistof, zoodanig dat het volume voorgesteld wordt door $SQ$ (zie fig. 6). Is de hoeveelheid vloeistof waarvan men uitgaat kleiner, dan zal de vloeistofphase verdampen (opgelost worden in de gasphase), is zij grooter dan wordt het gas in de vloeistofphase opgelost (vergel. VAN DER WAALS, Cont. II, p. 136). Alleen als de diffusie niet snel genoeg is om te bewerken dat steeds in de geheele buis evenwicht is, kunnen ook bij andere hoeveelheden vloeistof als overeenkomende met $v_Q$ het oplossen van de vloeistof onder plooipuntsverschijnselen worden waargenomen, zooals door de proeven van KUENEN over den invloed van vertragingsverschijnselen is in het licht gesteld.

[3]) Zie b.v. § 1, p. 234, noot 1.

[4]) Voor mengsels van b.v. helium en acetonitril, hoewel de voorhanden gegevens met toepassing van de in deze § aangenomen bijzondere onderstellingen (omtrent de toestandsverg. enz) er op zouden wijzen dat bij hooge drukkingen nog

tropische verschijnselen bij niet te hooge drukkingen optreden. [1]) Nader onderzoek zal moeten leeren of bij mengsels van stoffenparen als stikstof en eene lichte olie met hooge kritische temperatuur [2]), stikstof-lithium, argon-kalium, kwik-ijzer enz. het zinken van de gasphase in de vloeistofphase verwezenlijkt zou kunnen worden.

§ 3. *Over de voorwaarden voor het optreden van barotropische verschijnselen.*

In § 2 bleek dat het optreden van de barotropische verschijnselen, bij geschikte verhouding der limietdensiteiten, in sterke mate van de verhouding der aantrekkingen van de moleculen der beide componenten, derhalve van de verhouding der kritische temperaturen, afhankelijk is. Ditzelfde kan ook op de volgende wijze, meer onafhankelijk van de bijzondere ondersteilingen die tot het beschouwen van scheef overstekende plooien geleid hebben, afgeleid worden.

Om het verschijnsel van het zinken van de gasphase in de vloeistofphase te kunnen verkrijgen, zal de gasphase veel meer samendrukbaar moeten zijn dan de vloeistofphase, terwijl ook bij de samendrukking de gasphase niet in de vloeistofphase moet oplossen. Daartoe zal de temperatuur vrij wat beneden de kritische temperatuur van de minst vluchtige component ($T_{k_1}$), doch nog ver boven die van de tweede component ($T_{k_2}$) moeten zijn. Dit wijst er op dat de kritische temperaturen der componenten veel moeten verschillen.

Indien bij het beschouwde stoffenpaar retrograde condensatie van de eerste soort optreedt, zullen de coëxisteerende phasen die door de punten $L$ en $G$ op het $\psi$-vlak voor de moleculaire hoeveelheid (zie fig. 7) [3]) worden aangeduid, slechts dan gelijke densiteit kunnen hebben, als $M_2 > M_1$.

Eerst als op de plooi op het moleculaire $\psi$-vlak connodale raakkoorden optreden, waarvoor de hoek met de as $x = 0 : \theta > \frac{\pi}{2}$, zullen de coëxisteerende phasen gelijke dichtheid kunnen hebben voor $M_2 < M_1$.

---

juist barotropische verschijnselen zouden kunnen optreden, is de invloed der onzekerheden, zoowel in de gegevens als in de geldigheid der genoemde onderstellingen, oorzaak dat van het uitspreken van eene bepaalde verwachting in deze moet worden afgezien.

[1]) Dit werd vermeld in Meded. No. 96*b* Dec. '06 p. 510.

[2]) Op mengsels van lucht en olie werden wij opmerkzaam gemaakt door den Heer F. M. Gilley te Boston.

[3]) Door de stippellijnen is aangeduid, dat de beschouwingen van deze § gelden zoowel voor het geval, dat bij lagere temperatuur de plooi als eene dwarsplooi op het $\psi$-vlak oversteekt, als voor het geval dat zij zich dan naar $v = b$ uitstrekt.

Naarmate het verschil tusschen $x_g$ en $x_l$ grooter is, de connodale raakkoorden derhalve zich sneller van de kant $x = 0$ afbuigen, zal met een kleiner verschil tusschen $M_2$ en $M_1$ kunnen worden volstaan om gelijke densiteiten in $G$ en $L$ te verkrijgen.

Dat zal des te meer het geval zijn naarmate de plooi zich meer naar de kant $v = b$ uitstrekt.

Voor dit laatste is in het bijzonder bevorderlijk eene kleine verhouding $a_{22M}/a_{11M}$ (vergel. Meded. Suppl. N°. 15 Pl. I fig. 1 en Pl. II), dus eene kleine verhouding der kritische temperaturen, terwijl ook $b_{22M}$ kleiner dan $b_{11M}$ in deze richting ten goede zal komen

We krijgen zoo als voorwaarden voor het optreden van barotropische verschijnselen:

De tweede component moet hebben: $T_{k_2}$ klein ten opzichte van $T_{k_1}$, en bij voorkeur ook: $M_2 > M_1$ en $b_{22M} < b_{11M}$.

Dit wordt nog duidelijker door toepassing van verg. (2) en (4) van Meded. N°. 79, Maart '02 p. 782:

$$x_l = x_g \, e^{\dfrac{\varphi'_g - \varphi'_l}{MRT}}$$

$$\frac{\varphi'_g - \varphi'_l}{MRT} = \left\{ \alpha \frac{T}{p_m} \frac{dp_m}{dT} - \beta \right\} \frac{p_m (v_g - v_l)}{MRT}$$

waardoor de verhouding der samenstellingen van gas- en vloeistofphasen van een binair mengsel, waarin de hoeveelheid van eene component klein is, indien de wet van de overeenstemmende toestanden mag worden toegepast, wordt bepaald. De connodale raakkoorden zullen snel van de kant $x = 0$ afbuigen, als de exponent van $e$ eene aanzienlijke negatieve waarde verkrijgt. Den grootsten invloed hierop heeft, wegens de waarde van den coëfficient $\frac{T}{p_m} \frac{dp_m}{dT}$ ($> 7$), $\alpha = \frac{1}{T_{k_1}} \left( \frac{dT_{xk}}{dx} \right)_{x=0}$; $T_{k_2}$ zal dus klein ten opzichte van $T_{k_1}$ moeten zijn. Eerst in de tweede plaats komt de invloed van $\beta = \alpha - \gamma$, als $\gamma = \frac{1}{v_{k_1}} \frac{dv_{xk}}{dx}$ (vergel. Meded. N°. 81, Juni '02, p. 259) in aanmerking. Om althans in de goede richting te werken zou $\gamma$ negatief, dus $b_{22M} < b_{11M}$, moeten zijn [1]).

---

[1]) De meer uitvoerige wiskundige behandeling der voorwaarden voor het optreden van barotropische verschijnselen, als vervolg van Meded. N°. 96c, zal worden uitgesteld, totdat verdere experimenten tot het voortzetten daarvan aanleiding geven.

**Natuurkunde.** — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Suppl. N°. 17 bij de Mededeelingen uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: H. KAMERLINGH ONNES en J. CLAY: *„Opmerking over de uitzetting van platina bij lage temperaturen"*.

De mededeeling uit de Physikalisch-technische Reichsanstalt door K. SCHEEL in de zitting van 11 Jan. 1907 van de Deutsche physikalische Gesellschaft gaf ons reeds in de Zitting van 29 Juni ll. aanleiding tot eene opmerking. Wij hadden in de Mededeeling in de Zitting van 30 Juni 1906 eene kwadratische formule voor de uitzetting van platina *beneden* 0° gegeven, uit welke volgde dat, gelijk in de Inleiding dier Mededeeling was opgemerkt, een derdegraadsformule noodig is, wanneer men de uitzetting van platina van — 180° tot + 100° door één polynoom met opklimmende machten van $t$ wil voorstellen, en men te doen heeft met waarnemingen, die, een voldoend aantal malen herhaald, eene nauwkeurigheid (verg. § 1 van Med. N°. 85 Zittingsversl. 27 Juni '03) van $^1/_{200}$ in de uitzetting laten bereiken. Dit vonden wij bevestigd door de metingen van SCHEEL, die door het bepalen van eene kwadratische formule voor de uitzetting van platina *boven* 0° en door het meten van de lengte bij —190° tot hetzelfde besluit kwam.

Wij beschouwen thans het opvallend verschil van de uitzetting bij lage temperaturen volgens de door ons gegeven formule en die volgens de formule van SCHEEL, n.l. 43 $\mu$ voor de uitzetting van een staaf van 1 Meter tusschen — 183° en + 16°, (verg. SCHEEL l. c. pg. 19 noot 1), een verschil veel grooter dan door de onnauwkeurigheid der waarnemingen verklaard kan worden.

Tot verklaring van deze afwijking vestigen wij de aandacht op het verschil van de waarnemingen van 16 Dec. 1904 en 3 Febr. 1905 in Tab. II van Med. N°. $95^b$, welke als lengte van de platinastaaf, voorzien van de beide glazen uiteinden, bij 16°[1]) voor zij ooit op lage temperatuur was gebracht, 1027,460 mM., en langen tijd nadat zij voor het laatst op lage temperatuur was gebracht, 1027.457 mM., gemiddeld 1027.458 mM. geven, met die van 19, 21 en 23 Dec. in dezelfde Tabel, welke voor de lengte bij 16°, die een dag na afkoeling bij terugkeer tot gewone temperatuur werd aangenomen, gemiddeld 1027.441 mM. (uit 1027.441, 1027.442 en 1027.440) leveren. Deze eerste middelwaarde toch is 17 $\mu$ grooter dan de laatste.

1) In Tabel II van deze Mededeeling is onder $L$ 16° voor de gewone temperaturen genomen de op de meetstaaf bij 16° gereduceerde lengte van de staaf *bij 16°* en niet bij $\vartheta$ als in de tabellen van Med. N°. 85.

Nu overtreft dit verschil van 17 $\mu$, hetwelk betrekking heeft op een staaf platina van 840 mM. (voor een staaf van 1 M zou het 20 $\mu$ zijn) de fouten, die aan de nauwkeurigheid der waarneming kunnen worden toegeschreven, met ongeveer de helft van het verschil dat tusschen de formule van SCHEEL en onze formule van Juni 1906 bestaat.

Aan de berekening van onze formule is het gemiddelde [1]) der beide lengten ten grondslag gelegd. Men komt tot waarden voor de uitzetting, die dichter bij die van SCHEEL liggen, wanneer men voor de lengte bij de gewone temperatuur die neemt, welke onmiddellijk na afkoeling gevonden werd, in plaats van, zooals bij de berekening van onze formule van Juni 1907 is geschied, het gemiddelde van deze lengte en de lengte, die lang voor en na het afkoelen werd gevonden. Maken wij van de eerstgenoemde lengte, die, welke onmiddellijk na afkoeling gevonden werd, gebruik om in de formule

$$l_t = l_o\left(1 + \left\{(a)\left(\frac{t}{100}\right) + (b)\left(\frac{t}{100}\right)^2\right\} 10^{-6}\right)$$

de nu door $(a)$ en $(b)$ van de vroegere $a$ en $b$ onderscheiden coëfficienten te zoeken, zoo vinden wij

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Platina** (— 183° tot + 16°) | **(a)** | **877.7** | KAMERLINGH ONNES en CLAY (1905) |
| | **(b)** | **35.7** | |
| | | | tegen |
| | **(a)** | **861.5** | SCHEEL (1906) |
| | **(b)** | **37.0** | |

Het thans overblijvende verschil van 34 $\mu$ per M. bij eene uitzetting van — 183° tot + 16° blijft wel aanmerkelijk grooter dan de nauwkeurigheid der waarnemingen doet verwachten, doch is belangrijk kleiner dan het oorspronkelijk gevondene en, in aanmerking genomen de verschillende bronnen van onzekerheid of waargenomen wordt wat men meent waar te nemen, het gering aantal metingen en het verschil der voor het eerst bij lage temperaturen toegepaste methoden, niet groot

Wij hadden gehoopt door nieuwe metingen opheldering te verkrijgen omtrent het verschil in lengte van onze staaf bij gewone temperatuur onmiddellijk na het afkoelen en lang daarna, doch vonden daartoe nog niet de gelegenheid.

Verschillen als het thans beschouwde zijn bij onze metingen meer

1) Bij de berekeningen voor het glas zijn de waarden van de lengte onmiddellijk na de afkoeling, 23 Dec. in Tabel I en 15 en 16 April in Tabel III in verband met de verdere waarnemingen ter zijde gelaten.

voorgekomen. Er is in Med. N°. 95[b] op gewezen en voor glas hebben wij daar de mogelijkheid van thermische nawerking bij afkoeling tot de laagste temperaturen opzettelijk onderzocht. Naar aanleiding van hetgeen in Med. N°. 95[b] is medegedeeld vreezen wij, dat bij het boven behandelde verschil eene onregelmatigheid in het gedrag van de aansmeltingsplaats der glazen punten van de platinastaaf in 't spel is geweest, op het voorkomen waarvan bij herhaling der proeven met meer zorg zou moeten worden gelet. Wordt wat wij thans waarschijnlijk achten buiten twijfel gesteld, dan zouden waarnemingen, bij welke een verschil als het zooeven beschouwde zich openbaart, verworpen moeten worden.

Wij hebben behalve de tweedegraadsformule voor temperaturen beneden 0° ook nog voor de uitzetting van platina tusschen —183° en +80° met behulp van BENOIT's waarnemingen van 0° tot +80° een derdegraads formule

$$l_t = l_0 \left[ (1 + \left\{ (a') \frac{t}{100} + (b') \left( \frac{t}{100} \right)^2 + (c') \left( \frac{t}{100} \right)^3 \right\} 10^{-6} \right]$$

berekend, waar $(a')$, $(b')$, $(c')$ betrekking hebben op de lengte bij gewone temperatuur onmiddellijk na afkoeling.

De overeenstemming van

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Platina** | + 80° — 183° | **(a′)** | **875.3** | BENOIT en KAMERLINGH ONNES en CLAY (1905) |
| | | **(b′)** | **31.6** | |
| | | **(c′)** | **— 1.49** | |
| | + 100° — 190° | **(a)** | **874.9** | SCHEEL (1906) |
| | | **(b)** | **31.41** | |
| | | **(c)** | **— 6.94** | |

is vrij bevredigend. Vervanging van de waarden van BENOIT door die van SCHEEL zou in de eerste groep van coëfficienten slechts een kleine verandering brengen.

De vergadering wordt gesloten.

---

**(10 October, 1907).**

# ERRATA.

## Zittingsverslag 29 December 1906.

p. 529 r. 12 v.b. lees:

$$\left[\frac{(pv_A)_{t'} - (pv_A)_t}{t' - t}\right]_{v_A} = \left(\frac{d\,\overline{pv_A}}{dt}\right)_t^{t'}$$

tabel VII. i. p. v.: $\alpha_v$ leze men: $\frac{d\,\overline{pv_A}}{dt}$

## Zittingsverslag 26 Januari 1907.

p. 656 tabel I leze men: $M_2/M_1 = 2$.

p. 677 r. 17 v. o. Men lassche hier in:

Voor de temperaturen in vloeibare waterstof moet eerst de correctie aangebracht worden die zal blijken noodig te zijn volgens Meded. N°. 95e § 3b en § 8.

## Zittingsverslag 30 Maart 1907.

p. 852: het tweede lid van verg. 1 is te vermenigvuldigen met [illegible].

## Zittingsverslag 29 Juni 1907.

p. 173 r. 5 v. o.: i. p. v. 0.00725 leze men 0.006103.

p. 171 r. 25 v. b. leze men: Het bleek, dat het inflexiepunt bij zuiver kwik pas in het gebied der waterstoftemperaturen gelegen is; voor enz.

# KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

## VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

### van Zaterdag 26 October 1907.

*Voorzitter:* de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
*Secretaris:* de Heer J. D. VAN DER WAALS.

## INHOUD.



Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is:

1°. Bericht van den Heer MOLENGRAAFF, dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

2°. Schrijven van Dr. ASSMANN, Directeur van het Kön. preuss. Aeronautisch Observatorium te Lindenberg, waarin deze den steun der Akademie verzoekt voor een plan tot oprichting van een of meer aerologische stations in Nederlandsch-Indië. In dit schrijven wordt ook medegedeeld, dat door de „Commission permanente aéronautique internationale" het verzoek is gericht aan de Belgische regeering om langs diplomatischen weg de belanghebbende regeeringen uit te noodigen dergelijke stations, in het gebied hun toebehoorende, op te richten.

Op voorstel van den Voorzitter wordt besloten te wachten tot het oogenblik dat onze Regeering het advies der Akademie vragen zal.

3°. Een schrijven van den Heer E. VAN DIEREN, Arts te Amsterdam, ter begeleiding van een door hem geschreven boekwerk: getiteld: „Meelvergiftigingen: Beri-beri, pellagra, kriebelziekte, erwtenziekte, polaranaemie, enz.", waarin hij de aandacht der Akademie vestigt op eenige door hem in dat werk gestelde vragen.

Daar de Akademie volgens hare statuten zich niet uitspreekt over gedrukte stukken, stelt de Voorzitter voor af te wachten of de Regeering in het werk van den Heer VAN DIEREN aanleiding zal vinden deze vragen aan de Akademie voor te leggen. Aldus wordt besloten.

**Meteorologie.** — De Heer VAN DER STOK doet eene mededeeling over: *„De analyse van frequentie-krommen van de luchttemperatuur."*

1. De vraag, op welke wijze de karakteristieke bijzonderheden van frequentie-krommen van verschillenden aard op sprekende wijze in een plooibaren, analytischen vorm kunnen worden weergegeven, is in een kortelings verschenen arbeid[1]) op nieuw uitvoerig behandeld.

Het doel dezer mededeeling is de aandacht op de daarin voorgeslagen methode van bewerking te vestigen en eenige toepassingen

[1]) H. BRUNS, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre, Leipzig und Berlin, TEUBNER, 1906.

daarvan te geven op frequentie-getallen betreffende luchttemperatuur, afgeleid uit waarnemingen gedaan aan boord van het lichtschip „Schouwenbank".

2. De methode door BRUNS voorgeslagen verdient des te meer de aandacht van allen, die zich met de bewerking van frequenties bezig houden, daar zij berust op de klassieke werken van BESSEL en FECHNER en als eene logische uitwerking kan worden beschouwd van de door deze onderzoekers aangegeven beginselen.

Als grondslag wordt genomen de bekende functie

$$\Phi_0(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarvoor in velerlei werken tafels gegeven zijn; de eerste afgeleide van deze functie:

$$\Phi_1(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

neemt, na vervanging van $x$ door $hx$ en vermenigvuldiging met $h$ den vorm aan van de specifieke waarschijnlijkheid eener afwijking $x$ volgens de foutenwet van GAUSS in haar eenvoudigsten vorm.

De afgeleiden van hoogere orden kunnen aldus worden geschreven:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_2(x) &= \frac{2^2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} . 1! \left[ - \frac{x}{0!1!} \right] \\
\Phi_3(x) &= \frac{2^3}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} . 2! \left[ \frac{x^2}{0!2!} - \frac{1}{1!0!2^2} \right] \\
\Phi_4(x) &= \frac{2^4}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} . 3! \left[ - \frac{x^3}{0!3!} + \frac{x}{1!1!2^2} \right] \\
\Phi_5(x) &= \frac{2^5}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} . 4! \left[ \frac{x^4}{0!4!} - \frac{x^2}{1!2!2^2} + \frac{1}{2!0!2^4} \right] \\
\Phi_6(x) &= \frac{2^6}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} . 5! \left[ - \frac{x^5}{0!5!} + \frac{x^3}{1!3!2^2} - \frac{x}{2!1!2^4} \right]
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (3)$$

enz.

BRUN'S voorslag is nu deze, dat de specifieke waarschijnlijkheid (som der getallen $= 1$), eener afwijking van eene willekeurig aangenomen grondwaarde worde voorgesteld door de reeks:

$$z = h\,[D_0 \Phi_1(hx) + D_1 \Phi_2(hx) + D_2 \Phi_3(hx) + \ldots] \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waaruit volgt, dat de integraal dezer uitdrukking, de kromme der

sommen genoemd, wordt uitgedrukt door den vorm:

$$D_0\Phi_0 + D_1\Phi_1 + D_2\Phi_2 + \text{enz.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5)$$

waarin evenals in 't geen volgt, onder $\Phi$ wordt verstaan $\Phi(hx)$.

Uit (4), beschouwd in verband met (3) blijkt terstond, dat de voorgestelde analyse van de kromme (door BRUNS niet frequentiekromme, maar kromme der verdeeling genoemd) overeenkomst vertoont met de ontleding van eene functie in termen eener FOURIER'sche reeks.

In de verschillende $\Phi_p$ termen toch treden polynome functies op van den $p-1$ sten graad; de $\Phi_p$ kromme vertoont $p$ maxima en minima en snijdt de $x$ as in $p-1$ punten en afwisselend zal voor $x=0$ óf eene uiterste waarde (oneven orde) óf een snijpunt (even orde) worden gevonden.

De constanten $D$ worden op de bekende wijze bepaald door de momenten van verschillende orden te berekenen ten opzichte van de door den oorsprong van coördinaten gelegde $y$-as; kiest men voor dit nulpunt die waarde van $x$ die overeenkomt met de rekenkundige gemiddelde en noemt men:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n y \, dx = \mu_n ,$$

dan is het duidelijk dat, wegens $\mu_0 = 1$, $D_0 = \frac{1}{2}$ moet zijn; voorts moet, krachtens de keuze van den oorsprong, $\mu_1 = 0$ zijn en dus $D_1 = 0$ gesteld worden terwijl, indien men de waarde der constante $h$ op de bekende wijze aldus definieert dat:

$$2\,h^2\mu_2 = 1 ,$$

gemakkelijk is af te leiden, dat dan ook $D_2 = 0$ moet worden.

De uitdrukkingen (4) en (5) ondergaan aldus eene vereenvoudiging en worden:

$$y = h\,[\tfrac{1}{2}\,\Phi_1 + D_3\Phi_4 + D_4\Phi_5 \ldots] \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (4^a)$$

en

$$\tfrac{1}{2}\,\Phi_0 + D_3\Phi_3 + D_4\Phi_4 \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5^a)$$

De constanten $D_3$, $D_4$ enz. kunnen gemakkelijk worden berekend met behulp der formule (3) waarin, met het oog hierop, deze vorm is gegeven.

Men heeft nl. ter berekening van $2D_n$, den vorm te beschouwen, die tusschen vierkante haakjes voorkomt in de uitdrukking voor $\Phi_{n+1}$ en daarin $x^n$ te vervangen door $h^n\mu_n$.

Dat op deze wijze $2D_n$, en niet $D_n$, wordt gevonden is te wijten

# TABEL I.

**Luchttemperatur. Schouwenbank. Frequenties van Daggemiddelden.**

| Celsius | | Januari | Februari | Maart | April | Mei | Juni | Juli | Augustus | September | October | November | December |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| —8°.9 t/m | —8°.0 | 1 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 |
| —7.9 | —7.0 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| —6.9 | —6.0 | — | 1 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 |
| —5.9 | —5.0 | 2 | 2 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | — |
| —4.9 | —4.0 | 2 | 3 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 3 |
| —3.9 | —3.0 | 5 | 5 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 7 |
| —2.9 | —2.0 | 18 | 14 | 3 | — | — | — | — | — | — | — | — | 10 |
| —1.9 | —1.0 | 32 | 23 | 6 | — | — | — | — | — | — | — | 3 | 27 |
| —0.9 | 0.0 | 53 | 37 | 15 | — | — | — | — | — | — | — | 2 | 21 |
| 0.1 | 1.0 | 56 | 48 | 25 | — | — | — | — | — | — | — | — | 27 |
| 1.1 | 2.0 | 77 | 89 | 50 | — | — | — | — | — | — | — | 13 | 39 |
| 2.1 | 3.0 | 112 | 123 | 69 | 8 | — | — | — | — | — | — | 23 | 85 |
| 3.1 | 4.0 | 134 | 134 | 111 | 13 | — | — | — | — | — | — | 30 | 77 |
| 4.1 | 5.0 | 150 | 176 | 150 | 36 | — | — | — | — | — | — | 45 | 101 |
| 5.1 | 6.0 | 147 | 142 | 202 | 96 | — | — | — | — | — | 1 | 55 | 163 |
| 6.1 | 7.0 | 113 | 111 | 157 | 167 | 11 | — | — | — | — | 6 | 81 | 163 |
| 7.1 | 8.0 | 70 | 82 | 95 | 206 | 36 | 4 | — | — | — | 28 | 131 | 122 |
| 8.1 | 9.0 | 21 | 10 | 69 | 186 | 112 | 3 | — | — | — | 57 | 158 | 91 |
| 9.1 | 10.0 | 4 | — | 25 | 142 | 161 | 3 | — | — | — | 73 | 158 | 48 |
| 10.1 | 11.0 | — | — | 15 | 97 | 215 | 19 | — | — | 4 | 105 | 167 | 14 |
| 11.1 | 12.0 | — | — | 2 | 45 | 166 | 71 | — | — | 6 | 194 | 86 | — |
| 12.1 | 13.0 | — | — | 6 | 3 | 130 | 165 | 8 | — | 51 | 189 | 41 | — |
| 13.1 | 14.0 | — | — | — | 1 | 87 | 180 | 27 | 4 | 67 | 182 | 4 | — |
| 14.1 | 15.0 | — | — | — | — | 46 | 218 | 85 | 49 | 149 | 87 | 1 | — |
| 15.1 | 16.0 | — | — | — | — | 32 | 160 | 170 | 152 | 222 | 53 | — | — |
| 16.1 | 17.0 | — | — | — | — | 4 | 94 | 275 | 254 | 230 | 18 | — | — |
| 17.1 | 18.0 | — | — | — | — | — | 57 | 215 | 245 | 152 | 3 | — | — |
| 18.1 | 19.0 | — | — | — | — | — | 19 | 130 | 137 | 71 | 4 | — | — |
| 19.1 | 20.0 | — | — | — | — | — | 7 | 64 | 106 | 29 | — | — | — |
| 20.1 | 21.0 | — | — | — | — | — | — | 24 | 32 | 15 | — | — | — |
| 21.1 | 22.0 | — | — | — | — | — | — | 1 | 15 | 4 | — | — | — |
| 22.1 | 23.0 | — | — | — | — | — | — | 1 | 3 | — | — | — | — |
| 23.1 | 24.0 | — | — | — | — | — | — | — | 3 | — | — | — | — |

aan dezelfde reden waarom $D_6 = \frac{1}{2}$ moet worden gesteld, nl. aan den vorm van (1) waarin het getal 2 als coëfficient voorkomt.

Voor de waarden van $\Phi_1$, $\Phi_2$ .. $\Phi_6$ heeft BRUNS tabellen gegeven, zoodat de berekeningen geene verdere moeilijkheden opleveren en, bij eenige oefening, gemakkelijk zijn uit te voeren.

Met dit zeer beknopt en daarom noodzakelijk onvolledig overzicht van de methode moge hier worden volstaan en voor nadere bijzonderheden worden verwezen naar het bovengenoemd werk, waarin alle vraagpunten, die zich kunnen voordoen, uitvoerig worden behandeld.

3. Bij de toepassing dezer methode op temperatuurwaarnemingen is aangenomen, dat de reeks niet verder dan tot den derden term behoeft te worden voortgezet, zoodat alleen asymmetrische ($D_3$) en symmetrische ($D_4$) afwijkingen van de eerste orde van de enkelvoudige wet worden beschouwd, 't geen bij deze soort van krommen, die niet te veel van den klokvorm verschillen, voldoende blijkt. Bij het invoeren van termen van hoogere orde doet zich bovendien het nadeel gelden, dat bij de berekening der hoogere momenten de enkele en dus onzeker bepaalde uiterste afwijkingen zich sterk doen gelden. Als eerste voorbeeld zijn de daggemiddelden der luchttemperatuur gekozen omdat bij deze frequentie-krommen de scheefte met het jaargetijde van teeken verandert en dus als een klimatologische factor kan worden beschouwd. De daggemiddelden zijn berekend uit temperatuur-waarnemingen verricht zes malen daags, gedurende de jaren 1882—1904.

In Tabel I zijn de frequenties van graad tot graad gegeven, berekend op een totaal van 1000; het aantal gegevens bedraagt natuurlijk voor elke maand ongeveer:

$$23 \times 30 = 690 \text{ of } 23 \times 31 = 713.$$

De scheefte valt terstond in het oog; in den winter komen uiterste temperaturen of negatieve afwijkingen voor, die niet door even groote positieve worden gecompenseerd; in den zomer worden, omgekeerd, groote positieve afwijkingen aangetroffen waar geen soortgelijke negatieve tegenover staan. De constanten der kromme, nl. de gemiddelde temperatuur $M$, die het nulpunt van coördinaten aangeeft, den bestendigheidsfactor $h$ en de coëfficiënten $D_3$ en $D_4$, waardoor de afwijkingen der kromme van den regelmatigen klokvorm worden bepaald, vindt men in Tabel II overzichtelijk samengesteld; de twee laatste grootheden hebben betrekking op $\mu_0 = 1$, zoodat zij, bij de

berekening van met de frequenties der Tabel I vergelijkbare getallen, nog met 1000 moeten vermenigvuldigd worden.

TABEL II.

Constanten der frequentie-krommen.
Daggemiddelden van Luchttemp.

| | $M$ | $h$ | $D_3$ | $D_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Januari | 3.762 C.° | 0.2587 | + 0.01657 | — 0.00043 |
| Februari | 3.842 | 0.2773 | + 0.01959 | + 0.00048 |
| Maart | 5.321 | 0.2908 | + 0.00214 | + 0.00213 |
| April | 7.953 | 0.3738 | + 0.00313 | — 0.00115 |
| Mei | 11.068 | 0.3540 | — 0.00847 | — 0.00166 |
| Juni | 14.320 | 0.3708 | — 0 00015 | + 0.00114 |
| Juli | 16.871 | 0.4142 | — 0.00216 | + 0.00007 |
| Augustus | 17.367 | 0.4380 | — 0.01170 | — 0.00026 |
| September | 16.032 | 0.3893 | — 0.00634 | + 0.00106 |
| October | 12.142 | 0.3335 | + 0.00470 | — 0.00002 |
| November | 8.399 | 0.2662 | + 0.02657 | + 0.00659 |
| December | 5.174 | 0.2377 | + 0.02463 | + 0.00390 |

Uit deze resultaten der rekening blijkt, dat, in tegenstelling met de meeste frequentie-krommen, de $D_4$ afwijkingen van de eenvoudige exponentiëele wet bij de frequentie-kromme van de daggemiddelden der luchttemperatuur gering zijn en als binnen de grenzen der waarnemingsfouten vallend mogen beschouwd worden.

Ten einde te onderzoeken in hoeverre de berekening met de waarneming overeenstemt, zijn de getallen der Tabel I voor de maanden Januari en December, als de meest asymmetrieke, te zamen genomen. De aldus verkregen getallen vindt men in Tabel III onder $W$ (waargenomen).

De constanten dezer kromme zijn:

$$M = 4.469 \text{ C}^\circ$$
$$h = 0.2403$$
$$\partial_3 = + 0.01764$$
$$\partial_4 = + 0.00130$$

# TABEL III.

**Berekende analyse der frequenties Jan. + Dec. van Tabel I.**

| $W$ | $B_0$ | $W-B_0$ | $B_3$ | $W-B_0-B_3$ | $B_4$ | $W-\Sigma B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1.0 | 0.1 | 0.9 | — | 1 |
| 0 | 0.1 | — 0.1 | 0.2 | — 0.3 | 0.1 | 0 |
| $0^5$ | 0.2 | 0.3 | 0.3 | 0.0 | 0.2 | 0 |
| 1 | 0.4 | 0.6 | 1.3 | — 0.7 | 0.3 | — 1 |
| $2^5$ | 1.4 | 1.1 | 2.5 | — 1.4 | 0.4 | — 2 |
| 6 | 3.4 | 2.6 | 4.0 | — 1.4 | 0.4 | — 2 |
| 14 | 8.4 | 5.6 | 5.0 | 0.6 | 0.1 | 1 |
| $29^5$ | 17.5 | 12.0 | 3.7 | 8.3 | — 0.9 | 9 |
| 37 | 32 9 | 4.1 | — 0.3 | 4.4 | — 2.0 | 6 |
| $41^5$ | 54 9 | — 13 4 | — 8.7 | — 4.7 | — 2.5 | — 2 |
| 58 | 81.5 | — 23.5 | — 16 0 | — 7.5 | — 1.7 | — 6 |
| $98^5$ | 108.0 | — 9.5 | — 25.2 | 15.7 | 0.6 | 15 |
| $105^5$ | 127.9 | — 22.4 | — 11.9 | — 10.5 | 3.1 | — 13 |
| $125^5$ | 134.9 | — 9.4 | 0.4 | — 9.8 | 4.1 | — 11 |
| 155 | 127.0 | 28.0 | 12.6 | 15.4 | 2.9 | 13 |
| 138 | 106 6 | 31.4 | 18.2 | 13.2 | 0.5 | 13 |
| 96 | 79.7 | 16.3 | 15.7 | 0.6 | — 1.8 | 2 |
| $57^5$ | 53.3 | 4.2 | 8.2 | — 4.0 | — 2 6 | — 1 |
| 26 | 31.7 | — 5 7 | 0.6 | — 6.3 | — 1.9 | — 4 |
| 7 | 16.9 | — 9.9 | — 3.9 | — 6.0 | — 0 8 | — 5 |
| — | 8.4 | — 8.4 | — 5.0 | — 3.4 | 0 1 | — 4 |
| — | 3.0 | — 3.0 | — 3 9 | 0.9 | 0.4 | 1 |
| — | 1.2 | — 1 2 | — 2.4 | 1.2 | 0.5 | 1 |
| — | 0.3 | — 0.3 | — 1.2 | 0.9 | 0.3 | 1 |
| — | 0.3 | — 0.3 | — 0.5 | 0.2 | 0.1 | 0 |
| — | 0.1 | — 0.1 | — 0.2 | 0.1 | 0.1 | 0 |
| $\Sigma = 1000$ | | $\Sigma = 214.6$ | | $\Sigma = 118.4$ | | $\Sigma = 117$ |

In de tweede kolom is onder $B_e$ (berekend) de verdeeling gegeven, afgeleid volgens de enkelvoudige exponentiëele wet; in de vierde kolom vindt men de waarden van den tweeden term in de reeks, die $D_3$ tot factor heeft; uit de derde en vijfde kolommen blijkt, dat de som der verschillen door dezen term wordt gebracht van 215 tot 118 pro mille. Zooals reeds is opgemerkt is de invloed van den derden term met $D_4$ gering.

De som der verschillen blijft, ook na invoering van dezen term 12°/₀ hetgeen, in aanmerking genomen, dat het totaal aantal waarnemingen niet meer dan:

$$2 \times 31 \times 23 = 1426$$

bedraagt en dat als voorbeeld de ongunstigste maanden zijn gekozen, bevredigend kan genoemd worden. Uit den geregelden gang der verschillen kan trouwens opgemaakt worden, dat het mogelijk zou zijn door toevoeging van een vierden en vijfden term met $D_5$ en $D_6$ de verschillen nog iets kleiner in maken.

Voor $D_5$ vindt men de waarde — 0.00036, waaruit volgt dat van verreweg het grootste deel de verschillen aan onvolledigheid in het waarnemingsmateriaal zijn te wijten zoodat uitbreiding der reeks weinig zou baten.

4. Als geschikt materiaal voor een tweede toepassing der methode op meteorologische grootheden zijn gekozen alle temperatuurwaarnemingen, verricht zes malen daags in de maand Juli op hetzelfde lichtschip, gedurende de jaren 1882—1906. Het aantal waarnemingen is nu ruim 6 malen grooter dan voor de daggemiddelden en bedraagt 4516.

Wegens dit grooter aantal zal de frequentie-kromme gelijkmatiger verloopen en de scheefte, die bij de daggemiddelden ook voor de zomermaanden duidelijk merkbaar was, zal nu nog sterker op den voorgrond treden.

De waarnemingen zijn gerangschikt naar de verschillende windstreken zoodat men verkrijgt (Tabel IV) frequenties van de z.g. thermische windroos. Aan boord der lichtschepen wordt de windrichting bepaald overeenkomstig de aanwijzing van het compas; voor de periode 1882—1906 kan men aannemen, dat deze windrichtingen tot rechtwijzende kunnen worden gereduceerd door toepassing der gemiddelde miswijzing, — 15°, als correctie.

TABEL IV. Frequenties van luchttemperaturen voor verschillende windstreken (Magnetisch), Schouwenbank, Juli, 1882—1906.

| | *N* | *NNE* | *NE* | *ENE* | *E* | *ESE* | *SE* | *SSE* | *S* | *SSW* | *SW* | *WSW* | *W* | *WNW* | *NW* | *NNW* | *C* | Totaal |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.6—11.5 C°. | 1 | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 1 | — | — | — | 1 | — | — | — | 4 |
| 11.6—12.5 | 4 | 1 | 1 | — | — | — | — | — | 0 | 0 | — | — | 1 | 0 | 3 | 13 | — | 23 |
| 12.6—13.5 | 29 | 17 | 5 | 1 | 2 | 2 | — | — | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 | 13 | 25 | — | 102 |
| 13.6—14.5 | 44 | 26 | 12 | 2 | 11 | 4 | 5 | 4 | 3 | 4 | 15 | 11 | 9 | 20 | 43 | 51 | 3 | 267 |
| 14 6—15.5 | 71 | 49 | 35 | 21 | 18 | 9 | 13 | 4 | 13 | 9 | 30 | 66 | 69 | 72 | 77 | 49 | 18 | 623 |
| 15.6—16.5 | 67 | 66 | 80 | 41 | 27 | 14 | 18 | 18 | 19 | 27 | 70 | 164 | 152 | 73 | 50 | 42 | 24 | 952 |
| 16.6—17.5 | 56 | 38 | 79 | 39 | 35 | 18 | 28 | 15 | 37 | 31 | 94 | 182 | 147 | 51 | 44 | 37 | 37 | 968 |
| 17.6—18.5 | 34 | 29 | 56 | 38 | 32 | 23 | 25 | 15 | 22 | 22 | 62 | 140 | 119 | 31 | 41 | 26 | 27 | 742 |
| 18.6—19.5 | 26 | 13 | 48 | 16 | 27 | 13 | 16 | 7 | 14 | 14 | 35 | 67 | 52 | 13 | 21 | 10 | 27 | 419 |
| 19.6—20.5 | 9 | 10 | 29 | 16 | 16 | 6 | 13 | 4 | 5 | 10 | 19 | 17 | 24 | 6 | 9 | 6 | 18 | 217 |
| 20.6—21.5 | 4 | 4 | 18 | 10 | 10 | 1 | 6 | 6 | 5 | 4 | 2 | 5 | 6 | 1 | 6 | 3 | 7 | 98 |
| 21.6—22.5 | 2 | 2 | 7 | 3 | 2 | 4 | 4 | 3 | 3 | 1 | 4 | 2 | 5 | 1 | 2 | 1 | 15 | 61 |
| 22.6—23.5 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | — | 1 | 0 | 2 | 1 | 4 | 24 |
| 23.6—24.5 | — | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | — | — | — | 1 | 3 | — | — | 0 | — | — | 1 | 10 |
| 24.6—25.5 | — | — | 1 | 1 | 1 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | — | — | 1 | 5 |
| 25.6—26.5 | — | — | — | — | 1 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 |
| Som | 349 | 258 | 375 | 191 | 185 | 95 | 130 | 77 | 124 | 125 | 337 | 656 | 585 | 272 | 311 | 264 | 182 | 4516 |

Duidelijker dan in de getallen der tabel IV komt de invloed van de windrichting op de temp. uit in de gemiddelde temp. *M* en den bestendigheidsfactor *h*, die in tabel V zijn samengesteld.

TABEL V.

| Windr. Magn. | Aantal waarn. | Gemidd. Temp. M. | *h* |
|---|---|---|---|
| *N* | 349 | 13°.10 | 0.3485 |
| *NNE* | 258 | 16.33 | 0.3478 |
| *NE* | 375 | 17.50 | 0.3477 |
| *ENE* | 191 | 17.61 | 0.3561 |
| *E* | 185 | 17.68 | 0.3155 |
| *ESE* | 95 | 17,53 | 0 3491 |
| *SE* | 130 | 17.77 | 0.3527 |
| *SSE* | 77 | 17.67 | 0.3436 |
| *S* | 124 | 17.39 | 0.3713 |
| *SSW* | 125 | 17.38 | 0.3754 |
| *SW* | 337 | 17.23 | 0.4037 |
| *WSW* | 656 | 17.08 | 0.5124 |
| *W* | 585 | 17.10 | 0.4685 |
| *WNW* | 272 | 16.32 | 0.4391 |
| *NW* | 311 | 16.27 | 0.3512 |
| *NNW* | 264 | 15 65 | 0 3418 |
| Stilte | 182 | 18.56 | 0 3295 |

Hieruit blijkt, dat in deze zomermaand verreweg de hoogste temp. bij windstilte worden waargenomen; overigens komen de laagste temp. voor bij den noordelijken zeewind, de hoogste bij landwind; de overgang van NNE (W 7°.5 E rechtw.) tot NE (N 30° E rechtw.) is scherp, veel scherper dan die van SW (N 210° E rechtw. landwind) tot WNW (N 277°.5 E rechtw. zeewind).

Die scherpe afscheiding vindt men niet bij den bestendigheidsfactor, die voor WSW wind een duidelijk maximum vertoont en een minimum voor windstilte.

Daar voor vele windrichtingen het aantal observaties vrij gering is, zijn de getallen der Tabel IV in Tabel VI tot 5 groepen ver-

eenigd, waarbij zooveel mogelijk soortgelijke reeksen bij elkander zijn gevoegd.

TABEL VI.

Frequenties afgeleid uit Tab. IV.

| | WNW — NNE | NE — E | ESE — SW | WSW — W | C | Totaal |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.6—11.5 C°. | 2 | — | 2 | — | — | 4 |
| 11.6—12.5 | 21 | 1 | 0 | 1 | — | 23 |
| 12.6—13.5 | 86 | 8 | 6 | 2 | — | 102 |
| 13.6—14.5 | 184 | 25 | 35 | 20 | 3 | 267 |
| 14.6—15.5 | 318 | 74 | 78 | 135 | 18 | 623 |
| 15.6—16.5 | 298 | 148 | 166 | 316 | 24 | 952 |
| 16.6—17.5 | 226 | 153 | 223 | 329 | 37 | 968 |
| 17.6—18.5 | 161 | 126 | 169 | 259 | 27 | 742 |
| 18.6—19 5 | 83 | 91 | 99 | 119 | 27 | 419 |
| 19.6—20.5 | 40 | 61 | 57 | 41 | 18 | 217 |
| 20.6—21.5 | 18 | 38 | 24 | 11 | 7 | 98 |
| 21.6—22.5 | 8 | 12 | 19 | 7 | 15 | 61 |
| 22.6—23.5 | 7 | 7 | 5 | 1 | 4 | 24 |
| 23.6—24.5 | 1 | 3 | 5 | — | 1 | 10 |
| 24.6—25.5 | 1 | 3 | — | — | 1 | 5 |
| 25.6—26.5 | — | 1 | — | — | — | 1 |
| Som | 1454 | 751 | 888 | 1241 | 182 | 4516 |

De betrekkelijk lage temp. WNW—NNE winden, bij kleinen bestendigheidsfactor (groote verspreiding) tegenover de hooge temp. en geringe verspreiding bij WSW—W winden treedt in deze tabel duidelijk te voorschijn.

Tevens blijkt uit deze gegevens hoe de combinatie van reeksen met verschillende gemiddelde waarden in het totaal de scheefte vermindert, zoodat men verwachten kan dat de scheefte-factor $D_3$ voor de totale reeks aanmerkelijk kleiner zal zijn dan de $D_3$ berekend voor de verschillende reeksen, 't geen door de volgende tabel VII wordt bevestigd.

## TABEL VII.

Constanten der frequentie-getallen van Tab. VI.

| | $M$ | $h$ | $D_3$ | $D_4$ |
|---|---|---|---|---|
| *WNW—NNE* | 16°.135 | 0.3576 | — 0.01778 | 0.00385 |
| *NE–E* | 17.589 | 0.3428 | — 0.01657 | 0.00343 |
| *ESE-SW* | 17.430 | 0.3710 | — 0.01540 | 0.00477 |
| *WSW W* | 17.089 | 0.4869 | — 0.01300 | 0.00297 |
| *C* | 18.555 | 0.3295 | — 0.01153 | 0.00108 |
| Totaal | 16.971 | 0.3603 | — 0.01116 | 0.00331 |

De (negatieve) scheefte $D_3$ is derhalve het sterkst voor de noordelijke zeewinden met lage temp. en neemt verder geleidelijk af met het azimuth geteld van Noord over Oost. De symmetrieke afwijking

## TABEL VIII.

Berekende analyse der frequenties van Tab. VI.

| $W$ | $B_0$ | $W—B_0$ | $B_3$ | $W—B_0—B_3$ | $B_4$ | $W—\Sigma B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.6 | — 1.6 | — 3 5 | 1.9 | 2.9 | — 1 |
| 5 | 8.7 | — 3.7 | — 4.4 | 0.7 | 1.0 | 0 |
| 23 | 27.2 | — 4.2 | — 3.3 | — 0.9 | — 3.6 | 3 |
| 59 | 65.5 | — 6.5 | 4.5 | — 11.0 | — 8.8 | — 2 |
| 138 | 122.7 | 15.1 | 15.1 | 0 | — 6.1 | 6 |
| 211 | 178.4 | 32.6 | 14.7 | 17.9 | 7.3 | 11 |
| 214 | 201.2 | 12.8 | — 0.5 | 13.3 | 15.4 | — 2 |
| 164 | 175.8 | — 11.8 | — 15.3 | 3.5 | 6.4 | — 3 |
| 93 | 119.2 | — 26.2 | — 14.5 | — 11.7 | — 6.5 | — 5 |
| 48 | 62 7 | — 14.7 | — 4.0 | — 10.7 | — 8.9 | — 2 |
| 22 | 25.5 | — 3.5 | 3.6 | — 7.1 | — 3.0 | — 4 |
| 14 | 8.1 | 5.9 | 4.3 | 1.6 | 1.1 | 1 |
| 5 | 2.0 | 3.0 | 2.3 | 0.7 | 1.7 | — 1 |
| 2 | 0.4 | 1.6 | 0.8 | 0.8 | 0.8 | 0 |
| 1 | 0.0 | 1.0 | 0.2 | 0.8 | 0.3 | 1 |
| $\Sigma = 1000$ | | $\Sigma = 144.2$ | | $\Sigma = 82.6$ | | $\Sigma = 42$ |

$D_4$ is het grootst voor zuidelijke winden en het kleinst voor windstilten.

Hierbij moge worden opgemerkt, dat een negatieve $D_3$ beteekent, dat de kromme links (neg.) steiler oploopt dan zij rechts (pos.) afloopt en dat een positief teeken van $D_4$ beteekent, dat kleine afwijkingen in grooter getale voorkomen dan overeenkomstig de eenvoudige expon. wet het geval zou zijn.

Ten einde de rol, die de verschillende termen der reeks in de samenstelling der verdeelingskromme spelen, duidelijk te doen uitkomen is in tabel VIII, evenals in tabel IV, eene vergelijking gegeven van de waargenomen en berekende frequentie-getallen van de laatste serie der tabel VI; het aantal waarn. 4516 is hierbij in de eerste kolom onder W teruggebracht op 1000.

Uit deze samenstelling blijkt dat, als slechts een groot aantal waarnemingen beschikbaar is, de frequentie-krommen der luchttemp. op zeer bevredigende wijze door de drie constanten der reeks van Bruns kan worden bepaald; het totaal der verschillen tusschen waarneming en berekening toch bedraagt in ronde cijfers 4 %.

**Anthropologie.** — De heer Bolk doet eene mededeeling naar aanleiding van de vraag. *„Is rood haar een nuance of een variëteit?"*

Over de anthropologische beteekenis van rood haar, vindt men in de desbetreffende literatuur tot nu toe weinig meer dan meeningen die op algemeene indrukken berusten, of vermoedens die gebaseerd zijn op statistieke gegevens, waarvan de verwerking voldoende aanleiding geeft tot een min of meer ongunstige critiek. Er is in die meeningen en vermoedens eene bepaalde hoofdstrooming waar te nemen, en wel deze, dat men vrij algemeen geneigd is om eene nauwere verwantschap aan te nemen van de roodharigheid tot — wat ik maar kortheidshalve zal aanduiden als — het blonde ras, gekarakteriseerd voor wat de pigmentatie betreft door blond haar en blauwe oogen.

De aard van de betrekking tusschen blondharigen en roodharigen wordt door Topinard [1]) zoo voorgesteld, dat het roodharige type uit het blonde type ontstaan zou zijn „par une action des milieux". Ook Beddoe om den voornaamsten Engelschen, en Ripley om den meest bekenden Amerikaanschen Anthropoloog te noemen, nemen eene nauwere betrekking tusschen blond en rood haar aan. Virchow stelt zich op

[1]) Éléments d'Anthropologie générale. Paris 1885 blz. 334

een eenigszins ander standpunt waar hij zegt het waarschijnlijk te achten dat roodharigheid óp twee wijzen ontstaat, n.l. door een vermindering van pigment bij bruine haren of een vermeerdering bij blonde haren [1]). VIRCHOW baseert deze uitspraak op zijn statistiek van de verspreiding van roodharigen in Duitschland. Nu zou het mij niet moeilijk vallen om aan te toonen dat VIRCHOW tot zulk een uitspraak op grond van zijn statistiek geenszins gerechtigd was, zijn gegevens waren zeer onvolledig en de door hem gevonden verhoudingen noemt hij zelf „ganz unzutreffend". Ik kom daarop op een andere plaats terug, doch wensch hier even nader in te gaan op een andere zijde van VIRCHOW's uitspraak. Wanneer hij toch zegt dat roodharigheid ontstaat, 't zij door vermeerdering, 't zij door vermindering van het haarpigment, dan ligt daarin opgesloten, dat voor VIRCHOW roodharigheid het gevolg is van een quantitatief verschil, en dat dus deze eigenschap met andere woorden slechts een quaestie van gradatie is. Ik wil hierbij niet ingaan op de vraag of VIRCHOW terecht als primaire, als zuivere haarkleuren blond en bruin tegenover elkander mag stellen, voorloopig is het voldoende te konstateeren dat VIRCHOW geen tegenstelling ziet tusschen rood en blond haar, doch dat het eerste slechts een nuance is, 't zij dan van 't blonde, 't zij van 't bruine. Mij is slechts een Anthropoloog bekend die in tegenstelling tot de overgroote meerderheid zich verzet tegen het bestaan eener nauwere verwantschap tusschen roode en blonde haren, n.l. AMMON en die in zijn Anthropologie der Badensche bevolking het vermoeden uitspreekt, dat het onderscheid tusschen blonde en roode haren niet op een quantitatief verschil van het pigment berust, doch op een qualitatief. AMMON neigt dus meer tot de meening dat in de roodharigheid niet een nuance, maar een variëteit tot uitdrukking komt. [2])

Bij de verwerking van mijn anthropologisch materiaal van de Nederlandsche bevolking ben ik van zelve ook op de vraag naar de beteekenis der roodharigheid gestooten, en de conclusie waartoe ik gekomen ben wijkt af van de algemeene opvatting. De verspreiding van roodharigheid in ons land is zoodanig dat ik elke nauwere verwantschap tot het blondine ras moet ontkennen.

---

1) Das jedoch scheint mir nicht unwahrscheinlich zu sein, dass es eine doppelte Art von Rothharigkeit giebt, von denen die eine als eine Steigerung des Pigments bei den Blonden, die andere als eine Verminderung desselben bei den Braunen anzusehen ist. Archiv für Anthrop. XVI Bnd. blz. 338.

2) Die von manchen Anthropologen beliebte Vereinigung der roten Haare mit den blonden, halten wir für unzulässig, denn die roten stehen in vielen Fällen den braunen näher und sind jedenfalls stärker pigmentiert, haben vielleicht ein Pigment von anderer Beschaffenheit. Zur Anthropologie der Badener. blz. 129.

Laat mij beginnen met U er op te wijzen dat de samenstelling onzer bevolking voor de beantwoording dezer vraag buitengewoon gunstig is. Voor een paar jaar had ik het genoegen in uwe Vergadering den opbouw onzer bevolking uit het zoogenaamde blondine en brunette ras in hoofdlijnen toe te lichten. En ik kon U er daarbij op wijzen, hoezeer de constructie onzer bevolking verschilt, wanneer men het noordelijk deel van ons land met het zuidelijke vergelijkt. Regelmatig neemt in zuidelijke richting het blondine type af, waarmede hand in hand gaat een toeneming van gemengde typen en, hoewel in geringer verhouding natuurlijk, een toeneming van het zuiver brunette type. De verschillen tusschen het allernoordelijkste en het allerzuidelijkste deel van ons land zijn ten slotte vrij aanzienlijk, en juist daarom leent zich onze bevolking zoo bij uitstek om een vraag als de hier gestelde te beantwoorden. Zou het toch waar zijn dat roodharigheid aan blondheid nauwer verwant was, dan moet wisseling in het blondine-gehalte, een verandering in gelijken zin in het numeriek voorkomen van roodharigheid ten gevolge hebben.

Het materiaal van de nu volgende uiteenzetting is weder ontleend aan het door mij indertijd ingestelde onderzoek naar de verdeeling van haar- en oogkleur bij de Nederlandsche schoolbevolking. Op de tot dien einde rondgezonden formulieren onderscheidde ik vier haarkleuren: blond, bruin, rood en zwart, en vier oogkleuren: blauw, grijs, bruin en bruingroen. Het totaal aantal kinderen dat onderzocht werd, bedroeg, met uitzondering der Israelieten 478.976. Het totaal aantal roodharigen hieronder is 11772, zoodat gemiddeld in ons land 2.45°/₀ roodharige kinderen voorkomen. De cijfers waaraan deze verhouding ontleend is zijn groot genoeg om dit gemiddelde als nauwkeurig te beschouwen.

De eerste vraag, die wij nu zullen beantwoorden, is deze: in welke verhouding komen roodharigen in de verschillende provincies van ons land voor. Dit blijkt uit Tabel I. In de eerste kolom vindt men het totaal aantal onderzochte kinderen in elke provincie, in de laatste het aantal roodharigen daaronder, ook in de procentsgewijze verhouding. Wat blijkt nu uit deze laatste kolom? Wanneer men in ronde cijfers het algemeene gemiddelde stelt op 25 roodharigen per 1000 inwoners, dan ziet men dat in vier provincies: Friesland, Gelderland, N. Holland en Utrecht dit zelfde verhoudingsgetal te voorschijn komt, dat in Zuid Holland slechts 1 per duizend; in Groningen 2 per duizend en in Overijsel en Limburg 3 per duizend minder — in N. Brabant 1 en in Drenthe 2 per duizend inwoners meer voorkomen. Deze cijfers wijken zoo weinig van het algemeen gemiddelde af en de onderlinge verschillen zijn zoo gering, dat men m.i.

TABEL I.

| Provincie | Totaal | Blondharig-blauwoogigen | Zwartharig-bruinoogigen | Roodharigen |
|---|---|---|---|---|
| Friesland . . . . | 33.053 | 14.282=43.2°/₀ | 566=1.7°/₀ | 857=2.5°/₀ |
| Groningen . . . . | 32.223 | 13.401=41.3 | 446=1.4 | 755=2.3 |
| Drenthe . . . . . | 15.169 | 5.959=39.4 | 205=1.3 | 422=2.7 |
| Overijsel . . . . . | 41.389 | 14.713=35.5 | 689=1.6 | 919=2.2 |
| Gelderland . . . . | 46.786 | 16 078=34 4 | 1340=2.8 | 1198=2.5 |
| Zuid Holland . . . | 108.073 | 33.943=31 4 | 2.712=2.5 | 2640=2.4 |
| Noord Holland . . | 97.050 | 30.291=31.2 | 1791=1.8 | 2472=2.5 |
| Utrecht . . . . . | 22.017 | 6.626=30.1 | 528=2.4 | 545=2.5 |
| Zeeland . . . . . | 20.986 | 5.707=28.4 | 834=4.1 | 395=1.8 |
| Noord Brabant . . | 41.155 | 9.173=22.3 | 1661=4.— | 1072=2.6 |
| Limburg . . . . . | 21.902 | 4.790=21 8 | 1013=4.7 | 497=2.2 |

volkomen gerechtigd is om te besluiten, dat in de genoemde provincies de verspreiding der roodharigen een overal gelijkmatige is.

Die geringe wisseling in het procentsgewijze voorkomen van roodharigen in ons land wordt bevestigd door Tabel II, waarin de absolute getallen en de verhoudingen vermeld zijn van al de plaatsen in ons land waarvan het aantal onderzochte kinderen 2500 overtrof. Het was te verwachten, dat, waar de absolute getallen hier soms betrekkelijk laag zijn, de variatiebreedte van het percentage grooter zou zijn. Maar toch daalt plaatselijk nergens de verhouding onder 2°/₀ en slechts eenmaal wordt als gunstigste verhouding een percentage van 2.9 bereikt. Waar de absolute cijfers hoog zijn, zooals in Amsterdam en Rotterdam, komt het gevonden algemeene verhoudingscijfer weder te voorschijn.

Tot nu toe heb ik één provincie buiten beschouwing gelaten en wel Zeeland. Het is niet te ontkennen dat deze provincie een eenigszins afzonderlijke plaats inneemt, waar toch hier het aantal roodharigen plotseling daalt tot 1.8°/₀. Deze tegenstelling tot de overige provincies is te groot om hierin niet den invloed van een bepaalden factor te zien. Toch kan men, zooals straks zal worden aangetoond, deze vermindering van roodharigheid in Zeeland niet toeschrijven aan de hier inderdaad voorkomende stijging van het brunettengehalte, want N. Brabant, dat niet minder brunet is dan Zeeland, vertoont

TABEL II.

| Gemeente | Totaal | Roodharig | Procent |
|---|---|---|---|
| 's Gravenhage | 13.184 | 276 | 2.01 |
| Enschede . . | 3.667 | 77 | 2.1 |
| Maastricht. . | 3.812 | 86 | 2.2 |
| Utrecht. . . | 8.668 | 205 | 2.3 |
| Haarlem . . | 9.908 | 229 | 2.3 |
| Hengelo. . . | 2.876 | 68 | 2.3 |
| Rotterdam. . | 25.828 | 647 | 2.5 |
| Amsterdam . | 44.118 | 1164 | 2.6 |
| Dordrecht. . | 4.586 | 123 | 2.6 |
| Zwolle . . . | 3.618 | 101 | 2.7 |
| Deventer . . | 3.754 | 105 | 2.7 |
| Leeuwarden . | 3.562 | 102 | 2.8 |
| Leiden . . . | 5.648 | 161 | 2.8 |
| Gouda . . . | 3.640 | 102 | 2.8 |
| Groningen. . | 5.039 | 142 | 2.8 |
| Arnhem. . . | 6.269 | 179 | 2.9 |

deze vermindering niet. Ik zal hier niet nader op de oorzaak dezer daling ingaan, alleen wil ik er op wijzen, dat reeds meerdere malen zoowel door Belgische als Hollandsche onderzoekers, de aandacht gevestigd is op het feit, dat in anthropologisch opzicht onze Zeeuwsche bevolking een geheel eigen plaats inneemt onder de bewoners van ons land. Het komt mij voor, dat deze meening door de gevonden verhouding der roodharigen bevestigd wordt.

Tot zoover over de verspreiding der roodharigen in ons land in het algemeen. Als algemeene conclusie mag gesteld worden dat, met uitzondering dan van Zeeland, die verspreiding een zeer gelijkmatige is door het geheele land. Dit feit was inderdaad verrassend voor mij, daar ik zelf toch, toen ik begon mijn gegevens te verwerken, de algemeene opvatting was toegedaan, dat er tusschen roodharigheid en blondheid eene nauwere verwantschap bestond. Ik verwachtte dus, dat waar in ons land het blondine type zoo sterk wisselt, nu ook de invloed daarvan in het wisselend optreden van roodharigheid zou te voorschijn komen. Beschouwen wij nu, om de onafhankelijkheid

van beide verschijnselen nader aan te toonen, Tabel I nader. Uit deze Tabel krijgt men toch tevens een inzicht in de vermindering van het blondine en de vermeerdering van het brunette ras, in een richting van het Noorden naar het Zuiden. Zooals ik reeds zeide onderscheidde ik op de rondgezonden formulieren vier haarkleuren en vier oogkleuren, makende dus te samen zestien combinaties. Van deze combinaties zijn er twee die de raskenmerken zuiver weergeven, en wel de combinatie blond haar en blauwe oogen voor het blondine ras, en de combinatie zwart haar en bruine oogen voor het brunette ras. De andere 14 combinaties kan men beschouwen als mengvormen tusschen beide rassen. En om nu den grondslag voor mijne beschouwing zoo zuiver mogelijk te houden heb ik in Tabel I alleen deze beide combinaties ter onderlinge vergelijking opgenomen.

In de derde kolom vindt men het numeriek en procentsgewijze voorkomen van blondharig-blauwoogigen in de verschillende provincies. Het blijkt nu, dat het aantal zuiver blondinen zeer regelmatig afneemt van het Noorden naar het Zuiden. Het grootst is het aantal in Friesland met 43.8°/₀ het geringst in Limburg met 21.8°/₀; hier is het tegenover Friesland dus tot op de helft verminderd. De vierde kolom geeft een overzicht over de toeneming aan zuiver brunetten. Hierin staat Drenthe met het geringste aantal: 1.3°/₀, aan het eene uiterste, Limburg met het grootste: 4.6°/₀ aan het andere. De cijfers in deze kolom wijzen duidelijk eene regelmatige toeneming in Zuidelijke richting aan. Uit deze Tabel blijkt nog iets anders, dat met de beteekenis der roodharigheid in verband staat. Telt men n.l. de procenten der „zuivere" typen bijeen, dus de blondinen en brunetten, dan geeft dit voor Friesland een totaal van 44.9°/₀, voor Limburg slechts 26.4°/₀, tusschen beide getallen groepeeren zich regelmatig die der andere provincies. Het aantal „gemengde" typen is dus in 't Zuiden van ons land bijkans 20°/₀ grooter dan in 't Noorden. Als algemeen resultaat constateeren wij dus een vermindering der zuiver blondinen, vermeerdering der zuiver brunetten en der gemengde typen in Zuidelijke richting.

En niettegenstaande nu in Friesland tweemaal meer „zuiver" blondinen voorkomen dan in Limburg, is van een verandering in het aantal roodharigen niets te bemerken. Ik acht mij dan ook volkomen gerechtigd, om op grond der gevonden cijfers het bestaan van eenige betrekking tusschen beide verschijnselen te ontkennen. Maar ook vind ik in mijn tabel aanleiding om de opvatting te verwerpen, die wel eens uitgesproken is, dat roodharigheid een gevolg zou zijn van kruising tusschen een blond en een brunet individu. Was dit het geval, dan zou men een vermeerdering mogen verwachten van het aantal

roodharigen in Zuidelijke richting in aansluiting aan de toeneming van gemengde typen.

Moet ik dus verwantschap tusschen het blonde type en het roodharige op grond der vermelde gegevens ontkennen, een nog sterker bewijs hiervoor wordt geleverd door een ander feit, dat ik evenmin als de tot nu uiteengezette verwacht had. Het is n.l. de verspreiding van roodharigheid onder de Joodsche schoolbevolking. Het totale aantal onderzochte Joodsche kinderen, in Amsterdam, 's Gravenhage en Rotterdam bedroeg 9155. Hiervan waren roodharig 228 dat is 2.47 % terwijl voor de niet Joodsche schoolbevolking een verhouding van 2.45 % gevonden was. De overeenstemming van beide cijfers is inderdaad verrassend, en de beteekenis van dit feit voor de door ons gestelde vraag komt duidelijk uit, wanneer ik er op wijs dat zuiver blondinen, dat is dus blondharig blauwoogige Joden slechts in een verhouding van 8.2 %, zuiver brunetten, dat is dus zwartharig bruinoogige in 18.1% voorkomen. Hieruit volgt dus, dat in ons land onder de Joodsche schoolbevolking met 8.2% zuiver blondinen, evenveel roodharigen voorkomen als in Friesland met 43.2 % zuiver blondinen. Een sterker bewijs, dat er geen directe betrekking bestaat tusschen roodharigheid en blondheid kan men wel niet wenschen.

Tot nu toe onderzochten wij het voorkomen der roodharigheid met betrekking tot vermeerdering of vermindering van het blondinegehalte onzer bevolking, en kwamen tot het besluit dat beide verschijnselen onafhankelijk zijn van elkander. Wij kunnen nu het verschijnsel nog van een ander standpunt beschouwen. Wanneer het waar was, dat het ontstaan van roodharigheid een preferentie voor het blonde ras vertoonde, dan zou het gevolg daarvan moeten zijn dat men onder de kinderen die, wat de pigmentatie betreft, tot het blonde ras behooren, dat zijn dus zulke met blauwe of grijze oogen, meer roodharigen aantrof dan onder die met bruine of bruingroene oogen.

In hoeverre dit nu juist is leert ons Tabel 3.

TABEL III.

| Oogkleur | Totaal | Blondharig | Bruinharig | Zwartharig | Roodharig |
|---|---|---|---|---|---|
| Blauw . . | 186.033 | 83.34% | 11.81% | 2.38% | 2.47% |
| Grijs . . . | 152.072 | 79.67 | 14.66 | 3.06 | 2.63 |
| Bruin-groen | 58.531 | 60.68 | 28.64 | 8 — | 2.55 |
| Bruin. . . | 82.338 | 45.05 | 38.61 | 14.28 | 2.03 |

De eerste kolom vermeldt het totaal aantal kinderen met een der vier onderscheiden iriskleuren, en in de vier volgende kolommen vindt men achtereenvolgens het percentage van de combinatie der iriskleur met een der vier haarkleuren. Daarin komen verschijnselen tot uitdrukking die bevorens te verwachten waren. Van de blauwoogigen b.v. hebben 83 °/₀ blonde haren, van de bruinoogigen slechts 45 °/₀, daarentegen is bij deze laatsten het aantal bruinharigen meer dan driemaal zoo groot als bij de blauwoogigen, en een relatief nog sterker stijging vindt men bij de zwartharigen. In 't algemeen blijkt dat met een toeneming der pigmentatie van de iris ook de pigmentatie van het haar toeneemt. Dit geldt voor blonde, bruine en zwarte haren. Maar in tegenstelling hiermede blijkt van eenige relatie tusschen den pigmentatiegraad van iris en van het haar bij roodharigen niets. Van de blauwoogigen toch zijn 2.47 °/₀ roodharig, van de grijsoogigen 2.63 °/₀ van bruingroenoogigen 2.55 °/₀ en van de bruinoogigen 2.03 °/₀. Wel is waar is dit laatste cijfer het laagst, doch 't komt mij voor dat het verschil niet zoo groot is, dat men er een bewijs in zien mag dat roodharigheid minder verwantschap vertoont tot het brunette ras. Bovendien zou deze meening direkt kunnen weerlegd worden, door het feit dat ik bij de blauwoogige kinderen een iets geringer percentage roodharigen vind dan bij de grijs of bruingroenoogigen.

Rood haar is dus een eigenschap, die geheel en al onafhankelijk is van den pigmentatiegraad van de iris. Van welke zijde wij het optreden der roodharigheid met betrekking tot de overige pigmentatieverschijnselen van haar of oogen dus beschouwen, er is — althans op grond van mijne onderzoekingen — geen enkele verhouding aan te voeren ten voordeele van de meening, dat roodharigheid bij voorkeur in het blondine ras zou voorkomen. Ik moet dus de meening van die personen, die, de roodharigheid terugvoerend tot een quantitatief pigmentverschil, hierin slechts een nuance zien, als onjuist verwerpen. En van zelve leiden dus de uitkomsten van ons onderzoek er toe om rood haar als een variëteit te beschouwen, waarin het pigment qualitatief verschillend is van dat in blonde en zwarte haren. Tusschen deze beide laatsten bestaat eigenlijk geen essentieel verschil, geleidelijk gaat, door talrijke nuances heen, het vlasblonde haar in het gitzwarte over, door eene vermeerdering van de hoevelheid pigment; ook onder de roode haren kan men een groot aantal tinten onderscheiden, naar gelang van de quantiteit pigment wisselt de kleur tusschen goudblond en vuurrood.

Hoe is nu dat optreden en die gelijkmatige verspreiding van roodharigen in onze bevolking te verklaren? Het behoeft wel geen betoog, dat ik op grond der gevonden verhoudingen niet tot het geven van

eenige verklaring gerechtigd ben. Hiertoe toch zouden anthropologische onderzoekingen van anderen aard vereischt zijn. Slechts volledigheidshalve vermeld ik de meening van TOPINARD, die de roodharigheid verklaart uit een vroeger plaats gehad hebbende menging met een oorspronkelijk roodharig ras, dat in prehistorische tijden de vlakten van Rusland, Siberië en Turkestan zou bewoond hebben, en waarvan een der groepen van de Finsche bevolking (de Letten en Esthen) nog de meest zuivere nakomelingen zouden zijn. [1])

**Physiologie.** — De Heer C. A. PEKELHARING spreekt: „*Over een onderzoek van den Heer* J. W. A. GEWIN, *aangaande de verhouding van pepsine tot chymosine.*"

Dat het maagsap het vermogen bezit om, aan den eenen kant bij zure reactie eiwit te verteren, aan den anderen, bij neutrale of nauwelijks zure reactie melk te doen stollen, wordt veelal aan de aanwezigheid van twee verschillende enzymen in het maagsap, pepsine en chymosine, toegeschreven. Deze meening berust voornamelijk op een bevinding van HAMMARSTEN, die de veranderingen die er in de melk bij de stolling door leb plaats vinden, het eerst duidelijk in het licht gesteld heeft. HAMMARSTEN vond namelijk dat een extract van het maagslijmvlies, dat, versch bereid, zoowel eiwit kon verteren als melk doen stollen, na een paar dagen op lichaamstemperatuur met zoutzuur gedigereerd te zijn, de werking van leb niet meer vertoonde, maar de peptische werking behouden had. Daaruit moest wel afgeleid worden, dat elke dezer werkingen van een afzonderlijke stof afhing.

Intusschen is er, allengs meer, twijfel ontstaan aan de juistheid dezer meening. Dat er in elk geval een zeer nauw verband moest zijn tusschen de proteolytisch werkende pepsine en het lebenzym werd waarschijnlijk gemaakt door de ervaring, dat alle proteolytisch werkende enzymoplossingen, onverschillig of zij van dierlijken of van plantaardigen oorsprong zijn, ook als leb kunnen werken. Ook kon, zooals ik eenige jaren geleden in deze Akademie mededeelde en daarna door NENCKI en SIEBER bevestigd werd, worden aangetoond

[1]) L'histoire de cette race est à faire. Jusqu'à nouvel ordre j'admets qu'elle a occupé le sol de la Russie aux époques préhistoriques, antérieurement à l'invasion des Asiatiques, répondant à l'un des deux types finnois actuels, je n'ose dire de celui qui a apporté la langue du Kalevala. Elle est représentée dans la plupart des kourgans anciens de la Russie. Le type en est signalé dans les annales des Han antérieurement à l'ère chrétienne en Sibérie et dans le Turkestan Chinois. — Éléments d'Anthrop. générale. blz. 334.

dat allerlei praeparaten van pepsine, ook wanneer langdurige digestie met zoutzuur en zoo zorgvuldig mogelijke zuivering was voorafgegaan, in staat zijn als leb te werken.

In 1904 verscheen een onderzoek van PAWLOW en PARASTSCHUK [1]), waarin werd betoogd dat pepsine en chymosine als een en dezelfde stof moet worden opgevat. Deze onderzoekers vonden dat in verschillende, het enzym bevattende vloeistoffen, niet alleen het proteolytisch en het stremmend vermogen steeds naast elkaar worden aangetroffen, maar dat aan een grootere proteolytische werking ook altijd een naar evenredigheid grootere stremmende beantwoordt. Dat dit in sommige enzymoplossingen, als lebpraeparaten uit den handel, niet gevonden wordt, bleek aan bijmengselen toe te schrijven te zijn; zoodra die buiten werking gesteld werden, kwam de evenredigheid voor den dag. Een oplossing van leb, volgens HAMMARSTEN met behulp van magnesiumcarbonaat uit maagsap bereid, waaruit, naar de meening van HAMMARSTEN de pepsine geheel verwijderd zou zijn, bleek, wanneer de schadelijke invloed der magnesiazouten slechts werd weggenomen, zeer goed eiwit te verteren. Ook was, zooals PAWLOW uiteenzette, het bewijs, dat een oplossing van pepsine door digestie met zoutzuur van leb bevrijd kan worden, door HAMMARSTEN niet geleverd, aangezien de proteolytische werking onderzocht was terwijl de vloeistof nog zuur reageerde, de stremmende daarentegen na neutralisatie, waardoor het enzym licht vernield kon worden.

Tegen de opvatting van PAWLOW zijn bezwaren ingebracht. Vooral twee Zweedsche onderzoekers, BANG [2]) en SCHMIDT-NIELSEN [3]), hebben het door HAMMARSTEN ingenomen standpunt verdedigd. Het onderzoek van den Heer GEWIN heeft voornamelijk betrekking op de door deze beide schrijvers voor de dualiteits-hypothese aangevoerde gronden.

In de eerste plaats heeft hij zich bezig gehouden met een onderzoek naar de juistheid van het reeds vroeger door BANG [4]) uit een aantal waarnemingen getrokken besluit, dat er niet alleen verschil is tusschen pepsine en leb, maar dat ook het lebenzym zelf bij verschillende diersoorten niet dezelfde eigenschappen bezit. Den ouden naam, chymosine, bleef BANG toepassen op het lebenzym zooals dit bij het kalf gevonden wordt. Daarvan onderscheidde hij door den naam parachymosine, het enzym dat uit het maagslijmvlies van het varken verkregen kan worden. Het verschil bestond hierin, dat parachymosine eerder dan chymosine werkeloos werd bij verdunnen, meer in haar

---

[1]) Zeitschr. f. Physiol. Chemie, Bd. XLII, S. 415.
[2]) Zeitschr. f. Physiol. Chemie, Bd. XLIII, S. 358.
[3]) Ibid. Bd. XLVIII, S. 92.
[4]) PFLÜGER's Archiv, Bd. LXXIX, S. 425.

werkzaamheid bevorderd werd door toevoeging van chloorcalcium, beter tegen verhitting op 70° C. en minder goed tegen de werking van alkali bestand was.

Met betrekking tot extracten van het maagslijmvlies van kalf en varken kon GEWIN deze verschillen bevestigen; alleen vond hij het onderscheid in de bevordering der werkzaamheid door toevoeging van chloorcalcium niet zoo belangrijk als BANG. Anders was het echter indien niet de extracten zelve werden onderzocht, maar de enzymen, door dialyse, op de vroeger door mij medegedeelde wijze, daaruit afgescheiden en zooveel mogelijk gezuiverd. Hoe beter de zuivering had plaats gehad, des te kleiner werd het verschil. Het extract van kalfslijmvlies verliest zijn vermogen om melk te doen stollen, wanneer het, geneutraliseerd, 10 minuten lang op 70° C. wordt verhit; het gaat echter slechts weinig achteruit indien het met natronloog tot een gehalte van 0.01 °/₀ vermengd en na een half uur weer geneutraliseerd wordt. Bij het extract van het varkensmaagslijmvlies is het juist andersom. Bij het zooveel mogelijk gezuiverde enzym van het kalf bleek nu evenzeer het weerstandsvermogen tegen verhitten groot, tegen alkali klein geworden te zijn. Daaruit moest dus worden afgeleid, dat het verschil niet in het enzym zelf gelegen is, maar door in het extract voorkomende bijmengselen veroorzaakt wordt. Inderdaad kon proefondervindelijk worden aangetoond, dat het extract van het kalfsmaagslijmvlies stoffen bevat, die het enzym tegen de werking van alkali beschutten, maar het gevoeliger maken voor verhitting. Van een oplossing van gezuiverd varkensenzym (dat de eigenschappen bezit van BANG's parachymosine) werd de eene helft verdund met water, de andere met een door een uur lang verhitten op 80° C. van alle enzym beroofd en daarna geneutraliseerd extract van kalfsmaagslijmvlies. Van beide oplossingen brachten 2 cc. vermengd met 8 cc. melk in 30 sec. stolling teweeg. Van elk werd een deel 10 min. lang op 70° C. verhit, een ander deel een half uur lang met 0.01°/₀ NaHO in aanraking gelaten en toen weer geneutraliseerd. Nu was de uitkomst:

| | Na verhitting | Na werking van alkali |
|---|---|---|
| 2 cc. enzym met water + 8 cc. melk | stolling in 2½ min. | geen stolling. |
| 2 „ „ „ extract + 8 „ „ | geen stolling. | stolling in 11 minuten. |

GEWIN onderzocht ook twee lebpraeparaten uit den handel, een Nederlandsch van VAN HASSELT en een Deensch van HANSEN. Beide vertoonden de eigenschappen van BANG's chymosine. Maar als het enzym, door dialyse en precipitatie met azijnzuur, daaruit neergeslagen en ten minste voor een goed deel van verontreinigingen

bevrijd was, waren zij veel gevoeliger voor alkali en veel minder gevoelig geworden voor verhitting.

Dat het enzym niet alleen bij alkalische, maar allengs ook reeds bij neutrale reactie vernield wordt, is door PAWLOW in het licht gesteld en door GEWIN door talrijke proeven bevestigd gevonden. Daaruit verklaart GEWIN het door BANG gevonden verschil tusschen chymosine en parachymosine bij verdunning der oplossing. Wat BANG chymosine noemt, is het enzym vermengd met stoffen die het tegen alkali beschutten. Wanneer die stoffen aanwezig zijn mag wel worden aangenomen dat het enzym beter bestand is tegen de verdunning met water, waardoor het aantal hydroxyl- en metaal-ionen toeneemt. Een oplossing van gezuiverd enzym (parachymosine), die hetzelfde stremmende vermogen bezit als een ongezuiverde oplossing van kalfsenzym (chymosine), gaat bij verdunning eerder achteruit in werking en moet bijgevolg ook eerder den bevorderenden invloed vertoonen van de toevoeging van chloorcalcium.

Er is derhalve geen grond om bij verschillende diersoorten verschillende lebenzymen aan te nemen. Het onderscheid ligt niet in het enzym, maar in van het maagslijmvlies afkomstige bijmengselen. Wil men het enzym van het maagsap dat melk kan doen stollen een afzonderlijken naam geven, dan is het voldoende daarvoor het woord chymosine te gebruiken.

Maar is ook dit noodig? Moet men aannemen dat chymosine iets anders is dan pepsine?

Aan de beantwoording van deze vraag heeft GEWIN het tweede gedeelte van zijn onderzoek gewijd. Te vergeefs werd beproefd het enzym in een proteolytisch en een ander, melk stremmend te scheiden. Het is bekend dat eiwitstoffen, in onopgelosten toestand bij kamertemperatuur in een oplossing van pepsine gebracht, dit enzym opnemen en vasthouden, zoodat het er door uitwasschen niet van los te maken is. Gestold, fijngewreven kippeneiwit werd in een oplossing van gezuiverde pepsine in 0.2 °/₀ HCl gebracht. Indien nu chymosine een andere stof ware dan pepsine, zou misschien alleen de laatstgenoemde door het eiwit aan de oplossing onttrokken worden. Het bleek echter dat de vloeistof, na eenige uren van het eiwit afgefiltreerd, niet alleen het peptische, maar ook het stremmende vermogen verloren had. Dezelfde negatieve uitkomst was trouwens reeds vroeger door JACOBY, die voor deze proeven niet kippeneiwit, maar caseine gebruikte, verkregen [1]).

In de tweede plaats werd onderzocht of een scheiding in twee

---

[1]) BIOCHEM, Zeitschr. Bd. I, S. 66.

enzymen kon worden bewerkt door dialyse. Wanneer pepsine, opgelost in zoutzuur, tegen gedistilleerd water wordt gedialyseerd, slaat zij gedeeltelijk neer, het best bij lage temperatuur, zoodra het gehalte aan zuur tot ongeveer 0.02 °/₀ HCl gedaald is. Altijd blijft echter een aanzienlijk gedeelte opgelost, dat dan met behulp van ammoniumsulfaat — indien de oplossing met niet veel albumosen verontreinigd is, door 50 °/₀ verzadiging met dit zout — kan worden neergeslagen. Zoo pepsine en chymosine verschillende stoffen zijn, kan het niet onwaarschijnlijk geacht worden dat zij ook in oplosbaarheid verschillen, dat dus het precipitaat in den dialysator hetzij van de eene, hetzij van de andere stof meer zou bevatten dan de daarvan afgefiltreerde vloeistof. Ook op deze wijze bleek echter een scheiding in twee enzymen in geenen deele te gelukken.

Schmidt-Niklsen heeft evenwel proeven medegedeeld waaruit schijnt te blijken dat wel niet een volledige, maar toch een gedeeltelijke scheiding van pepsine en chymosine mogelijk is. Een krachtig werkzaam met zoutzuur bereid extract van kalfsmaagslijmvlies werd in twee deelen verdeeld. Het eene werd bij lage, het andere bij lichaamstemperatuur bewaard. Na eenige dagen had het verwarmde gedeelte het vermogen om, bij neutrale reactie, melk te doen stollen, grootendeels verloren; bij zure reactie verteerde het eiwit echter nog krachtig. Nu werden beide vloeistoffen geneutraliseerd en de niet verwarmde zooveel verdund totdat het stremmend vermogen even zwak geworden was als dat van de verwarmde. Daarna werden beide vloeistoffen weder met zoutzuur even sterk zuur gemaakt en met fibrine gedigereerd. Door de verwarmde vloeistof werd de fibrine veel sneller dan door de verdunde, niet verwarmde, opgelost. Bij de verwarming was derhalve de chymosine grootendeels verloren gegaan, de pepsine echter niet.

Deze proef zou zeker overtuigend zijn, indien de neutralisatie op de verwarmde vloeistof dezelfde uitwerking had als op de niet verwarmde. Dit is echter niet het geval. Het extract bevat stoffen die het enzym tegen de werking van alkali, ook wanneer daarvan niet meer wordt toegevoegd dan tot het bereiken van de neutrale reactie noodig is, beschutten. Wordt het extract bij lage temperatuur bewaard, dan blijven deze stoffen langen tijd ongedeerd, maar bij verwarming van het zure extract op lichaamstemperatuur gaan zij verloren. Gewin heeft dit door uitvoerige proeven, die elders in bijzonderheden worden medegedeeld, naar ik meen afdoende, bewezen. Het enzym is, in het extract van het kalfsmaagslijmvlies, aanvankelijk zeer goed bestand tegen neutraliseeren, maar na eenige dagen bij 37° C. gedigereerd te zijn, wordt dit weerstandsvermogen kleiner, om dan snel af te nemen.

Wanneer nu de geneutraliseerde vloeistof, ter bepaling van het stremmend vermogen, met melk vermengd wordt, blijft de reactie neutraal en komt er geen stolling. Wordt zij echter spoedig na het neutraliseeren weder zuur gemaakt, dan is er nog genoeg enzym overgebleven om eiwit te verteren. Ook wanneer de niet verwarmde oplossing, vóór het neutraliseeren, voldoende met 0.2 % HCl verdund wordt om de beschuttende bijmengselen die het extract van het kalfsmaagslijmvlies bevat, grootendeels buiten werking te stellen, veroorzaakt neutralisatie hierin een snelle vermindering en eindelijk een opheffing van het stremmend vermogen. Zoo was de stollingstijd van zulk een extract onveranderd 10 sec., 8-maal verdund, terstond na het neutraliseeren 2½ à 4 min., terwijl de melk in dezelfde verhouding met de oplossing een half uur na het neutraliseeren vermengd, na 20 minuten nog niet gestold was.

In alle proeven daarentegen waarbij de schadelijke werking van alkali werd vermeden, bleken het melk stremmend en het proteolytisch vermogen van de enzymoplossingen met elkaar gelijken tred te houden.

De slotsom is dus dat er geen enkele reden is overgebleven om een verschil aan te nemen tusschen pepsine en chymosine.

Evenmin is er reden om nog vast te houden aan de voorstelling van NENCKI en SIEBER, waarmede ik mij vroeger vereenigd heb, volgens welke pepsine te beschouwen zou zijn als een molekuul, dat door verschillende atoomgroepen, aan den eenen kant proteolytische, aan den anderen kant leb-werking zou oefenen. Den grond voor zulk een voorstelling, de meening dat de werkzaamheid in de eene richting behouden zou kunnen blijven, terwijl die in de andere richting verloren ging, moet ik nu als vervallen beschouwen.

Veeleer schijnt mij de door SAWJALOFF verdedigde opvatting aannemelijk, die de verandering der caseine, waarvan de vorming van kaas het gevolg is, als een begin van vertering, van proteolyse, beschouwt [1]). Deze opvatting heeft, naar ik meen, zeer aan waarschijnlijkheid gewonnen door de onderzoekingen van den laatsten tijd omtrent de veranderingen die caseine onder den invloed van leb ondergaat, in het bijzonder door het onlangs medegedeelde, eveneens in mijn laboratorium verrichte onderzoek van Mej. VAN HERWERDEN [2]). Hieruit immers is gebleken dat caseine, bij zeer zwak zure of neutrale reactie en bij een temperatuur die niet veel lager is dan 37° C., in een oplossing van leb — hetzij een praeparaat uit den handel of zoo goed mogelijk gezuiverde pepsine — weldra

---

1) Zeitschr. f. Physiol. Chem. Bd. XLVI, S. 307.

2) Ibid. Bd. LII, S. 184.

uiteenvalt in paracaseine, die voor zoover zij niet terstond als kalkverbinding, kaas, onoplosbaar wordt, verder verandert, en andere stoffen, waaronder een, voorloopig door Mej. VAN HERWERDEN als „stof C" gekenmerkte eiwitstof. Eerst wanneer het enzym langen tijd gelegenheid heeft op deze stoffen te werken, vormt het daaruit primaire albumose. In denzelfden tijd bleek echter ook het enzym bij neutrale reactie primaire albumose, ofschoon in geringe hoeveelheid, uit gestold kippeneiwit te vormen. Er is dus alle grond om de stolling der melk als een bewijs van één eerste begin van proteolyse te beschouwen.

Bij deze opvatting is het ook niet, zooals men het wel genoemd heeft, verwonderlijk, dat allerlei proteolytische enzymen het vermogen hebben melk te doen stollen, ofschoon zij onder natuurlijke omstandigheden nooit met caseine in aanraking komen. De bijzonderheid toch is dan niet in het enzym te zoeken, maar in de caseine, waarvan de ontleding reeds in het oog valt in een phase der digestie die zich bij andere eiwitstoffen nog geheel aan de waarneming onttrekt.

**Statistiek.** — De Heer WIND doet eene mededeeling namens den Heer Dr. E. VAN EVERDINGEN. „*Verband tusschen kindersterfte en hooge temperaturen.*"

(Mede aangeboden door den Heer J. P. VAN DER STOK).

1. In de „Statistische mededeelingen uitgegeven door het bureau van statistiek der gemeente Amsterdam" verscheen onlangs als n° 19 een verhandeling „Kindersterfte in Nederland (in de jaren 1881-1905) door Prof. Dr. R. H. SALTET en Mr. Ph. FALKENBURG." De schrijvers constateeren daarin het bestaan van een duidelijk maximum der sterfte van kinderen beneden 1 jaar in de zomermaanden, en zoeken o.a. verband tusschen de hoogte van dit maximum, op verschillende plaatsen en in verschillende tijdperken, en de gemiddelde maandtemperaturen voor nabijgelegen plaatsen in dezelfde tijdperken. Het resultaat is vrijwel negatief, zoodat zij het volgende neerschrijven:

„Ook uit de chronologische vergelijking van kindersterfte en temperaturen, zooals wij die hier betreffende Zeeland en de stad Groningen gaven, kan derhalve slechts een negatieve conclusie worden getrokken. Is er al in een enkel geval van parallelisme sprake, in het meerendeel der gevallen kan tusschen temperaturen en kindersterfte geen direct verband worden geconstateerd. Hiermede wil echter geenszins gezegd zijn, dat wij een bewijs hebben geleverd voor de stelling, dat de kindersterfte onafhankelijk zou zijn van de luchtgesteldheid. Integendeel, de diagrammen, welke wij gaven, leveren

de duidelijkste bewijzen van een verband tusschen den toestand der lucht in den zomer en de sterfte der zuigelingen. Maar het is niet de hoogte der temperatuur, die deze sterfte beheerscht. Zooals wij reeds hiervoren opmerkten, blijft naar onze meening waarschijnlijkheid bestaan, dat het de temperatuurs-wisselingen van den zomer zijn — hetzij diurne, hetzij interdiurne — die een ongunstigen invloed uitoefenen. Het feiten-materiaal omtrent die wisselingen ontbreekt echter en laat zich o.i. niet vervangen door gegevens omtrent temperatuur-frequenties, tot het verschaffen waarvan het Meteorologisch Instituut wel in staat zou zijn. Wij kunnen hier niet anders dan met een enkel woord wijzen op de theorie, die de zomersterfte der zuigelingen in verband brengt met de aanwezigheid in dit jaargetijde van een grooter aantal ziektekiem-overbrengende insekten. Om daarop dieper in te gaan, ontbreken tot nog toe de positieve gegevens.

Hier is derhalve aan den ijverigen onderzoeker der toekomst een uitgebreid terrein van studie voorbehouden".

2. Wij meenen te kunnen aantoonen, dat de schrijvers zich hier te stellig hebben uitgedrukt, en dat een duidelijk positief resultaat wordt verkregen, wanneer men een andere methode van onderzoek volgt.

Reeds bij het toezenden der gemiddelde maandtemperaturen voor tijdperken van 5 jaren, waarvan de schrijvers bij hun onderzoek gebruik gemaakt hebben, werd door schrijver dezes twijfel uitgedrukt aan de bruikbaarheid van deze gegevens voor het beoogde doel. Waren de schommelingen der kindersterfte eenvoudig recht evenredig aan de schommelingen der gemiddelde maandtemperatuur, dan zou het gezochte verband ook op deze wijze moeten blijken. Zoodra echter het verband een ander karakter heeft — bijv. de grootere sterfte eerst begint zoodra een zekere grenstemperatuur overschreden wordt — is het niet meer geoorloofd zonder nader onderzoek gemiddelden te gebruiken.

Het onderzoek der H.H. Saltet en Falkenburg bracht, zooals men reeds zag, inderdaad geen verband tusschen de gemiddelde maandtemperaturen en de kindersterfte aan het licht. We willen dat hier nog even duidelijk in 't licht stellen door voor een enkele plaats, Groningen, op te geven de afwijkingen der 5-jaars gemiddelden van de kindersterfte in de zomermaanden Mei-September van de gemiddelden voor 25 jaar, en daarnaast, cursief gedrukt, dezelfde afwijkingen voor de temperatuur. De eerste worden gegeven in honderdsten per dag, de laatste in tiende graden Celsius.

GRONINGEN 1881—1905.

| Periode | Mei | | Juni | | Juli | | Aug. | | Sept. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1881—1885 | 10 | *—5* | 12 | *— 9* | 32 | *1* | 0 | *— 8* | —9 | *—4* |
| 1886—1890 | 9 | *3* | 17 | *1* | 24 | *—11* | — 1 | *— 6* | 9 | *— 2* |
| 1891—1895 | 3 | *5* | —10 | *—10* | —18 | *— 1* | —13 | *4* | —2 | *4* |
| 1896—1900 | —14 | *—5* | — 5 | *15* | —20 | *6* | 9 | *11* | 4 | *3* |
| 1901—1905 | — 7 | *2* | —17 | *4* | —16 | *6* | 6 | *— 2* | —4 | *—2* |

Indien hooge temperatuur-gemiddelden in 5-jarige perioden met hooge kindersterften gepaard gingen, zouden althans de teekens der beide afwijkingen in 't algemeen moeten overeenstemmen. Men vindt echter 12 overeenstemmingen, 12 tegenstellingen, en 1 onbeslist geval, zoodat op deze wijze van verband niets blijkt.

3. Het vermoeden ligt voor de hand, dat dit bijzonder ongunstige resultaat gedeeltelijk door het bijeenvoegen van telkens 5 jaar wordt veroorzaakt. Inderdaad vond vroeger Dr. OLLAND [1]) voor bijzonder warme of bijzonder koude zomermaanden wel verschil in de algemeene sterfte. De voornaamste oorzaken echter zijn andere.

Nemen we thans als voorbeeld de gemiddelde kindersterfte in Groningen in de geheele periode 1891—1905, voor iedere maand uitgedrukt in procenten van het twaalfde gedeelte van de jaar-sterfte, dan vinden wij na afronden tot volle procenten (l.c. p. 74, Tabel XLIII B).

| April | Mei | Juni | Juli | Aug. | Sept. | Oct. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 103 | 93 | 100 | 110 | 133 | 103 | 83 |

Deze cijfers willen we vergelijken met de gemiddelde maandtemperaturen, en bovendien met de aantallen dagen met bijzonder hooge temperatuur, die in een overeenkomstig tijdvak zijn voorgekomen. In de eerste plaats komen daarvoor in aanmerking de dagen met maximum-temperatuur boven 25° C., waarvoor de normalen reeds voorkomen op het „Maandoverzicht der weersgesteldheid in Nederland" [2]). We vinden dan voor het totale aantal in de periode 1894—1906.

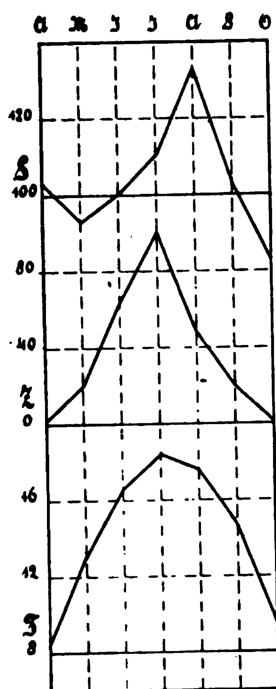
| April | Mei | Juni | Juli | Aug. | Sept. | Oct. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 20 | 64 | 100 | 51 | 22 | 1 |

terwijl de gemiddelde maandtemperaturen in het tijdvak 1891–1905 zijn

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8.6 | 13.0 | 16.6 | 18.4 | 17.6 | 14.7 | 9.6 |

1) A. G. OLLAND, Invloed van het weer op het sterftecijfer. Proefschr. Utrecht. 1896

2) Uitgave no. 94 van het Kon Ned. Meteor. Instituut.


Fig. 1.

Er is veel meer overeenstemming in den aard van het maximum bij de eerste twee reeksen van cijfers dan bij de eerste en derde reeks, zooals duidelijk blijkt uit fig. 1, (*S* kindersterfte, *Z* aantal dagen met max. temp. $> 25°$, *T* gemiddelde maandtemperatuur); doch de plaats van het maximum komt ook bij de tweede niet overeen: het is als of er een vertraging is van de kindersterfte ten opzichte van de hooge temperaturen.

Op zich zelf lijkt dit niet onwaarschijnlijk. Ofschoon schrijver dezes zich hier op een gebied begeeft waarop hij minder tot oordeelen bevoegd is, meent hij toch wel de onderstelling te mogen maken, dat wellicht de hooge temperaturen het ontstaan van ongesteldheden veroorzaken, die eerst na eenigen tijd den dood tengevolge hebben. Mocht dit zoo zijn, dan moet een betere overeenstemming tusschen de schommelingen der temperaturen en der kindersterfte verkregen worden indien men de laatste vergelijkt met gemiddelde temperaturen, of aantallen dagen met hooge temperatuur, in een eenigszins vroeger beginnend en eindigend tijdvak.

Wij hebben deze conclusie op de proef gesteld door voor de periode 1891—1905 voor Groningen zoowel de gemiddelde temperatuur als de aantallen dagen met temperatuur boven 25°, die we in 't vervolg, in aansluiting aan een in de meteorologie gebruikelijke terminologie „zomerdagen" zullen noemen, te berekenen voor de kalendermaanden èn voor tijdvakken van den 16den eener maand tot den 15den der volgende maand.

Zoowel de keuze van de „verschuiving" van 15 dagen als die van de grens-temperatuur 25° zijn eenigszins willekeurig. Voor een voorloopig onderzoek als het onze is dit intusschen geen groot bezwaar. Dat althans voor sommige deelen van ons land de verschuiving ongeveer de grootte heeft die tot het doel voert blijkt uit onderstaande tabel, waarin onder *S* opgenomen zijn de gemiddelde kindersterften voor kalendermaanden over het tijdvak, in de eerste kolom vermeld, uitgedrukt in procenten van een twaalfde van de jaarsterfte, zooals in het vervolg steeds zal geschieden, en onder *T* de gemiddelde aantallen zomerdagen per 5 jaar voor 15 dagen verschoven tijdvakken van een maand.

| Periode | Waarnemingsplaats | Mei-Juni | Juni-Juli | Juli-Aug. | Aug.-Sept. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1891—1905 | *S* Groningen | 100 | 110 | 133 | 103 |
| | *T* Groningen | 19 | 27 | 32 | 16 |
| 1881—1905 | *S* Utrecht | 102 | 130 | 133 | 97 |
| | *T* Utrecht—de Bilt | 18 | 25 | 22 | 15 |
| 1881—1905 | *S* Zeeland | 72 | 101 | 159 | 159 |
| | *T* Vlissingen | 4 | 12 | 12 | 7 |

Te Groningen en Utrecht vallen de maxima nu geheel of nagenoeg samen. Voor Zeeland, dat slechts ten deele door Vlissingen wat zijn klimaat betreft goed vertegenwoordigd wordt, is daarentegen nog een maand tijdsverschil voor het maximum overgebleven.

4. We geven thans eerst de uitkomsten van het onderzoek betreffende Groningen, waarbij achtereenvolgens met de afwijkingen der kindersterfte in 5-jarige perioden werden vergeleken de afwijkingen:

*a*. van de gewone maandgemiddelden;

*b*. van de gemiddelden voor tijdvakken van 16 Mei—15 Juni enz.;

*c*. van de aantallen zomerdagen voor kalendermaanden;

*d*. van de aantallen zomerdagen voor tijdvakken van 16 Mei—15 Juni enz. (Zie tabel p. 279).

Letten we voorloopig alleen op de teekens, dan vinden we:

| | overeenkomst | tegenstelling | onbeslist |
|---|---|---|---|
| *a* | 6 | 5 | 1 |
| *b* | 7 | 4 | 1 |
| *c* | 8 | 4 | — |
| *d* | 10 | 2 | — |

De verschillen tusschen *a* en *b* eenerzijds en *c* en *d* anderzijds geven het effect van den overgang van temperatuurgemiddelden op aantallen zomerdagen; de verschillen tusschen *a* en *c* eenerzijds en *b* en *d* anderzijds den invloed van de verschuiving van 15 dagen. Het blijkt dat de verbetering in de overeenstemming der teekens het grootst is bij den overgang van *b* op *d*; bij dien van *c* op *d* is vooral merkwaardig de groote verbetering ook in quantitatieve overeen-

GRONINGEN 1881—1905.

| Periode | Juni | | Juli | | Aug. | | Sept. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *a.* Gemiddelde temperaturen kalendermaanden. | | | | | | | |
| 1891—1895 | — 3 | *—13* | —5 | *—5* | —28 | *0* | —7 | *2* |
| 1896—1900 | 7 | *12* | —6 | *2* | 10 | *7* | 5 | *1* |
| 1901—1905 | —4 | *1* | 11 | *2* | 19 | *—6* | 2 | *—4* |
| | *b.* Gemiddelde temperaturen 16 Mei—15 Juni enz. | | | | | | | |
| 1891—1895 | —3 | *—7* | —5 | *0* | —28 | *— 7* | —7 | *4* |
| 1896—1900 | 7 | *3* | — 6 | *—2* | 10 | *8* | 5 | *5* |
| 1901 - 1905 | —5 | *3* | 11 | *2* | 19 | *—2* | 2 | *—8* |
| | *c.* Zomerdagen kalendermaanden. | | | | | | | |
| 1891—1895 | —3 | *—11* | —5 | *—12* | —28 | *1* | —7 | *—2* |
| 1896—1900 | 7 | *14* | —6 | *6* | 10 | *2* | 5 | *3* |
| 1901—1905 | —4 | *— 2* | 11 | *6* | 19 | *—3* | 2 | *—1* |
| | *d.* Zomerdagen 16 Mei—15 Juni enz. | | | | | | | |
| 1891—1895 | —3 | *—7* | —5 | *—1* | —28 | *—16* | —7 | *5* |
| 1896—1900 | 7 | *8* | —6 | *—2* | 10 | *9* | 5 | *2* |
| 1901—1905 | —4 | *—2* | 11 | *3* | 19 | *7* | 2 | *—8* |

stemming tusschen de afwijkingen van kindersterfte en aantallen zomerdagen. Ten slotte mag de overeenstemming in het geval *d* zoo goed genoemd worden, dat er bijna geen twijfel overblijft dat men in de hooge temperaturen de oorzaak der verhoogde kindersterfte te zien heeft.

Het negatieve resultaat van de Heeren SALTET en FALKENBURG is dus gedeeltelijk veroorzaakt doordat gebruik is gemaakt van gemiddelde temperaturen in plaats van temperatuurfrequenties, gedeeltelijk door het niet inachtnemen van een vertraging der sterfte ten opzichte van de sterfteoorzaak.

We willen thans ook voor Utrecht en Zeeland de overeenstemming in het geval *d* onderzoeken.

UTRECHT (de Bilt).

| Periode | Juni | | Juli | | Aug. | | Sept. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1881—1885 | 16 | *— 7* | 17 | *10* | —29 | *— 3* | —13 | *— 4* |
| 1886—1890 | 15 | *— 4* | —22 | *—11* | —11 | *—14* | — 2 | *1* |
| 1891—1895 | —10 | *— 2* | —10 | *— 7* | — 6 | *—10* | — 2 | *1* |
| 1896—1900 | — 7 | *8* | 7 | *4* | 8 | *21* | 15 | *8* |
| 1901—1905 | —21 | *5* | 7 | *6* | 46 | *8* | 3 | *— 6* |

20

ZEELAND (Vlissingen)

| Periode | Juni | | Juli | | Aug. | | Sept. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1881—1885 | — 3 | *1* | 11 | *9* | 21 | *3* | —12 | *— 3* |
| 1886—1890 | 4 | *2* | 3 | *— 4* | —30 | *— 3* | 7 | *0* |
| 1891—1895 | 9 | *0* | 4 | *— 1* | —12 | *—10* | — 8 | *1* |
| 1896—1900 | —13 | *— 1* | —11 | *— 5* | 21 | *7* | 38 | *7* |
| 1901—1905 | 4 | *0* | — 7 | *0* | 1 | *4* | —24 | *— 5* |

We vinden dus wat de teekens betreft:

| | overeenkomst | tegenstelling | onbeslist |
|---|---|---|---|
| Utrecht: | 13 | 7 | — |
| Zeeland: | 12 | 4 | 4 |

Het aantal overeenkomsten is in deze gevallen groot genoeg om aan te toonen, dat de fluctuaties in aantal zomerdagen een belangrijke rol spelen bij de kindersterfte, vooral wanneer men in 't oog houdt, dat zoowel te Utrecht als in Zeeland de meeste overeenkomsten vallen in de maanden der groote kindersterfte: Juli en Aug. voor Utrecht, Aug. en Sept. voor Zeeland. Ongetwijfeld zijn er daarnaast andere belangrijke factoren, die niet in verband staan met de temperatuur, en wier invloed ook in gemiddelden over 5 jaren nog niet geëlimineerd is. Te verwonderen behoeft men zich hierover niet — het is eerder merkwaardig te noemen, dat bij Groningen van dergelijke andere factoren niet *meer* blijkt. Of men wellicht nog betere overeenstemming kan krijgen door voor Utrecht een hoogere grenstemperatuur, voor Zeeland een lagere grenstemperatuur en een andere verschuiving aan te nemen hebben wij voorloopig niet onderzocht.

De gemiddelde maandtemperaturen voor de tijdperken 16 Mei—15 Juni enz. werden voor Utrecht—de Bilt en Vlissingen niet berekend; intusschen mag op grond van de vergelijking volgens de methoden *a*, *c* en *d* wel besloten worden, dat geen verbetering zou zijn verkregen. Immers het resultaat was voor Utrecht

| | Overeenkomst | Tegenstelling | Onbeslist |
|---|---|---|---|
| *a* | 13 | 7 | — |
| *c* | 13 | 6 | 1 |
| *d* | 13 | 7 | — |

voor Vlissingen

| | Overeenkomst | Tegenstelling | Onbeslist |
|---|---|---|---|
| *a* | 7 | 7 | 6 |
| *c* | 12 | 7 | 1 |
| *d* | 12 | 4 | 4 |

Schijnbaar is dus het resultaat bij Utrecht in de drie gevallen

ongeveer hetzelfde. Let men echter ook op de quantitatieve overeenstemming, dan blijkt die in geval *c* geheel te ontbreken, maar in geval *d* veel grooter dan in geval *a* te zijn, zoodat de uitkomsten bij Groningen verkregen, zij het niet zoo algemeen, toch ook hier gelden.

5. Een bezwaar tegen het bezigen van gemiddelden of sommen voor perioden van 5 jaren is dat het geheele aantal vergelijkbare gegevens vrij klein blijft, terwijl ook niet duidelijk aan het licht komt of inderdaad de grootere sterfte, die uit deze gemiddelden spreekt, plaats vond in *dezelfde* jaren waarin ook het aantal zomerdagen het grootst was. Wij hebben daarom voor Utrecht en Groningen uit de Ned. Staatscourant de sterftecijfers van kinderen beneden 1 jaar voor het tijdvak 1881—1905 verzameld, de maandcijfers in procenten van het twaalfde deel der jaarsom uitgedrukt en deze gegevens op de wijze van de vorige §§ door het bepalen der afwijkingen ten opzichte der gemiddelden over het tijdvak 1881—1905 resp. 1891—1905 met die voor het aantal zomerdagen tusschen 16 Mei en 15 Juni enz. vergeleken.

De uitkomsten vindt men in de volgende tabellen.

GRONINGEN 1891—1905.

| Jaar | Juni | | Juli | | Aug. | | Sept. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1891 | — 4 | *—4* | —32 | *—1* | —47 | *—5* | 0 | *—2* |
| 92 | 35 | *2* | —26 | *—5* | — 9 | *—4* | 2 | *2* |
| 93 | —26 | *—2* | 12 | *5* | —22 | *—2* | —37 | *4* |
| 94 | —39 | *—2* | 2 | *—1* | —61 | *—1* | — 7 | *—3* |
| 95 | 25 | *—2* | 11 | *0* | 4 | *—2* | 13 | *5* |
| 96 | 41 | *3* | 48 | *2* | —15 | *2* | —44 | *—3* |
| 97 | — 2 | *4* | —12 | *0* | 24 | *1* | 7 | *—3* |
| 98 | — 7 | *—1* | —67 | *—6* | 42 | *—2* | — 2 | *5* |
| 99 | — 3 | *—2* | 8 | *3* | —33 | *5* | — 8 | *2* |
| 1900 | 12 | *3* | —11 | *—2* | 36 | *5* | 61 | *2* |
| 01 | — 5 | *—3* | 10 | *3* | 2 | *13* | —30 | *0* |
| 02 | 48 | *2* | —21 | *1* | —30 | *—5* | — 9 | *—2* |
| 03 | —11 | *0* | —15 | *—3* | 1 | *—4* | 33 | *—1* |
| 04 | —21 | *0* | 13 | *—4* | 134 | *5* | 18 | *—1* |
| 05 | —38 | *—2* | 75 | *5* | —21 | *0* | 6 | *—3* |

UTRECHT 1881–1905.

| Jaar | Juni | | Juli | | Aug. | | Sept. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1881 | 9 | — 3 | —14 | 2 | —12 | 1 | — 9 | — 3 |
| 82 | —17 | — 3 | 3 | — 3 | —49 | — 2 | 10 | — 3 |
| 83 | 35 | — 2 | 0 | 3 | —61 | — 3 | — 9 | — 1 |
| 84 | 25 | — 4 | 35 | 7 | 7 | 6 | —40 | 5 |
| 85 | 39 | 3 | 12 | 1 | —41 | — 3 | —15 | — 2 |
| 86 | 26 | — 1 | —35 | — 3 | —15 | — 2 | 43 | 10 |
| 87 | 23 | — 4 | —17 | — 1 | — 9 | 0 | —25 | — 1 |
| 88 | — 9 | — 1 | —21 | — 1 | —29 | — 2 | —27 | — 3 |
| 89 | 27 | 4 | 16 | — 1 | — 8 | — 4 | 10 | — 2 |
| 90 | 21 | — 4 | —45 | — 5 | — 3 | — 2 | —15 | — 2 |
| 91 | —21 | — 4 | —28 | — 3 | —15 | — 2 | — 8 | — 2 |
| 92 | 3 | 4 | —22 | — 4 | —42 | — 3 | 16 | 2 |
| 93 | 1 | 0 | 18 | 4 | 40 | 0 | —21 | 2 |
| 94 | —12 | — 2 | 10 | — 1 | 0 | — 1 | —17 | — 3 |
| 95 | — 4 | — 2 | — 6 | — 2 | —14 | — 2 | 21 | 2 |
| 96 | 3 | 0 | 0 | 4 | —13 | 1 | 8 | — 3 |
| 97 | 17 | 6 | 19 | 4 | 0 | 6 | — 6 | — 2 |
| 98 | 3 | 2 | —33 | — 5 | 15 | — 1 | 57 | 8 |
| 99 | —46 | — 1 | 27 | 2 | 14 | 8 | 13 | 3 |
| 1900 | — 8 | 3 | 41 | — 1 | 18 | 9 | — 5 | 2 |
| 01 | —17 | 0 | 20 | 1 | 21 | 9 | —12 | 0 |
| 02 | — 9 | 1 | —40 | 1 | —48 | — 3 | 11 | — 1 |
| 03 | —25 | 3 | —18 | 1 | 18 | — 3 | 27 | 0 |
| 04 | —45 | — 1 | 35 | — 2 | 174 | 7 | 6 | — 2 |
| 05 | — 8 | 0 | 44 | 5 | 36 | 0 | —17 | — 3 |

Ter vergelijking volge hier dezelfde tabel, opgemaakt met behulp der gemiddelde temperaturen te Groningen van 16 Mei—15 Juni enz. (geval b § 4). De afwijkingen voor deze temperaturen worden gegeven in tiende graden.

GRONINGEN 1891—1905 *(b)*.

| Jaar | Juni | | Juli | | Aug. | | Sept. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1891 | — 4 | *—23* | —32 | *2* | —47 | *— 9* | —27 | *3* |
| 92 | 35 | *9* | —26 | *—16* | — 9 | *—17* | 4 | *10* |
| 93 | —26 | *6* | 12 | *13* | —22 | *— 4* | —35 | *7* |
| 94 | —39 | *— 18* | 2 | *3* | — 61 | *— 1* | — 5 | *—19* |
| 95 | 25 | *— 6* | 11 | *— 4* | 4 | *— 3* | 15 | *20* |
| 96 | 41 | *11* | 48 | *6* | —15 | *1* | —42 | *— 1* |
| 97 | — 2 | *27* | —12 | *2* | 24 | *12* | 9 | *— 8* |
| 98 | — 7 | *— 9* | — 67 | *—22* | 42 | *— 5* | 0 | *25* |
| 99 | — 3 | *—13* | 8 | *9* | —33 | *14* | — 6 | *5* |
| 1900 | 12 | *3* | —11 | *— 4* | 36 | *15* | 63 | *3* |
| 1 | — 5 | *— 4* | 10 | *2* | 2 | *21* | —23 | *— 8* |
| 2 | 48 | *— 2* | —21 | *2* | —30 | *—29* | — 7 | *— 6* |
| 3 | —11 | *0* | —15 | *—14* | 1 | *—15* | 35 | *—13* |
| 4 | —21 | *8* | 23 | *— 4* | 134 | *13* | 20 | *— 4* |
| 5 | —38 | *10* | 75 | *24* | — 21 | *1* | 8 | *— 8* |

Het was te verwachten, dat thans meer gevallen zouden worden gevonden waarin de teekens niet overeenstemmen, of de grootte der afwijkingen bij de eene reeks van cijfers niet in evenredigheid is met die bij de andere reeks; immers alle storende oorzaken oefenen hier hun vollen invloed uit. Laten we echter buiten beschouwing die gevallen, waarin een der afwijkingen nul is, en die waarin de afwijking van het aantal zomerdagen slechts 1 bedraagt, of de afwijking der gemiddelde temperatuur niet meer dan 0.°2 (Groningen *b*) dan komen we tot de volgende samenvatting:

| Overeenkomende teekens. Aantal gevallen | Som *T* | Som *S* | | Afwijkende teekens. Aantal gevallen | Som *T* | Som *S* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Groningen | | | |
| 31 | 114 | 927 | | 13 | 42 | 191 |
| | | | Utrecht | | | |
| 50 | 186 | 1275 | | 19 | 54 | 308 |
| | | | Groningen (b) | | | |
| 31 | 38,4 | 836 | | 17 | 14,9 | 366 |

Het aantal overeenkomsten in de beide eerste tabellen is dus belangrijk grooter dan het aantal afwijkingen, en bovendien zijn in de gunstige gevallen ook de gemiddelde afwijkingen van aantal zomerdagen en sterfte grooter, zoodat er onzes inziens geen twijfel aan het verband tusschen beide verschijnselen overblijft.

De samenvatting voor de derde tabel toont duidelijk, dat de overeenstemming met de afwijkingen der gemiddelde maandtemperaturen minder goed is dan met die van de aantallen zomerdagen.

We kunnen nu nog zoeken het verhoudingsgetal, dat dit verband in eerste benadering kan uitdrukken. Daartoe bepalen we de som van alle positieve afwijkingen voor het aantal zomerdagen, en zoeken daarbij de algebraïsche som van de bijbehoorende afwijkingen der kindersterfte; evenzoo voor de negatieve afwijkingen der zomerdagen. We vinden dan

| | Som pos. afw. $T$ | Som $S$ | Som neg. afw. $T$ | Som $S$ |
|---|---|---|---|---|
| Groningen | + 81 | + 463 | — 83 | — 352 |
| Utrecht (stad) | + 120 | + 502 | — 120 | — 465 |

Zonder de geheele lijst van cijfers te publiceeren kunnen we hier ook nog opnemen het resultaat voor de provincie Utrecht, waar 54 teeken-overeenstemmingen tegen 17 afwijkingen voorkomen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Utrecht (prov.) | + 133 | + 543 | — 118 | — 433 |

Het verschil tusschen som $S$ voor positieve en negatieve $T$ afwijkingen, dat bij Groningen nogal groot is, wijst waarschijnlijk op een niet-lineair verband. Wanneer we hiervan afzien en de beide soorten afwijkingen samen nemen, is de gezochte factor voor Groningen ongeveer 5.0, voor Utrecht (stad) ongeveer 4.0, Utrecht (prov.) ongeveer 3.9.

6. Men zou nog kunnen betwijfelen, of het inderdaad de hooge temperaturen zelf zijn, die de meerdere sterfte veroorzaken, dan wel, zooals de Heeren SALTET en FALKENBURG ondersteldeu, temperatuurswisselingen die daarmede samenhangen. Men zou immers kunnen denken dat als regel talrijke hooge temperaturen ook van talrijke groote temperatuurswisselingen vergezeld waren. Ofschoon zij uit een meteorologisch oogpunt niet waarschijnlijk leek, is ook deze onderstelling op de proef gesteld, waartoe het materiaal der Jaarboeken van het K. N. M. I. geheel voldoende is. Voor dezelfde perioden van halve maand tot halve maand waarvoor ook de zomerdagen uitgeteld waren, werd voor Groningen de som opgemaakt van de verschillen der maximumtemperaturen van dag tot dag, waarbij eenvoudigheidshalve de tienden van graden verwaarloosd werden.

Met de uitkomsten werd weer op dezelfde wijze gehandeld als vroeger; de afwijkingen der temperatuurswisselings-sommen zijn dus in geheele graden uitgedrukt. Het resultaat was als volgt:

GRONINGEN 1891—1905.

| Periode | Juni | | Juli | | Aug. | | Sept. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1891—1895 | — 3 | *—19* | — 5 | *22* | —28 | *—16* | — 7 | *20* |
| 1896—1900 | 7 | *31* | — 6 | *9* | 10 | *45* | 5 | *— 1* |
| 1900—1905 | — 4 | *—11* | 11 | *—31* | 19 | *—30* | 2 | *—18* |

Van de 12 gevallen is er in 5 overeenstemming van teeken, in 7 tegenstelling, zoodat er op deze wijze van verband tusschen de temperatuurswisselingen van dag tot dag en de veranderingen der kindersterfte niets blijkt. Ook de jaarlijksche gang in de gemiddelde grootte der temperatuurswisselingen van dag tot dag is een geheel andere dan die van de frequentie der hooge temperaturen: het maximum der temperatuurswisselingen valt in Juni, niet in Augustus. Wij hielden het daarom voor overbodig nog afzonderlijk de frequentie van *groote* of diurne temperatuurswisselingen in onderzoek te nemen.

7. Terwijl wij hiermede ons onderzoek besluiten zijn we ons wel bewust dat het volstrekt niet volledig is geweest en ruimte laat voor tal van vragen. Mocht het ons gelukt zijn de overtuiging ingang te doen vinden, dat een van de voornaamste oorzaken van verhoogde kindersterfte in een vermeerdering der zeer warme dagen is gelegen, dan hopen we dat anderen, liefst bevoegden op medisch gebied, zich geroepen zullen voelen het nader verband op te sporen, het verschillend karakter van het verschijnsel in verschillende landstreken te verklaren, wellicht met gebruikmaking van andere grenstemperaturen en andere vertragingen. De gegevens welke het Meteorologisch Instituut daarbij kan verschaffen, ook omtrent andere elementen dan de temperaturen, zullen den toekomstigen onderzoeker gaarne ter beschikking worden gesteld.

De thans verkregen uitkomsten mogen aldus worden samengevat:

1°. De schommelingen der kindersterfte vertoonen nagenoeg geen verband met die der gemiddelde maandtemperaturen voor dezelfde maanden, noch met die van de gemiddelde grootte der temperatuurwisselingen van dag tot dag.

2°. Het aantal dagen met maximum temperatuur boven 25° C. („zomerdagen"), geteld voor tijdvakken van 16 Mei—15 Juni, 16 Juni—15 Juli enz. vertoont schommelingen, die in de groote meerderheid der gevallen in teeken overeenkomen met de schommelingen der kindersterfte in Juni, Juli, enz.

3°. Neemt men een eenvoudige evenredigheid aan tusschen de afwijking van het aantal „zomerdagen" van de normaal en die van de kindersterfte in een 15 dagen later beginnend en eindigend tijdvak, dan wordt voor iederen zomerdag meer of minder dan normaal de kindersterfte te Groningen met 5, te Utrecht met 4°/₀ van de gemiddelde maandsterfte vermeerderd of verminderd.

**Natuurkunde.** — De Heer P. Zeeman biedt een mededeeling aan over: *„De intensiteiten der componenten van door magnetisme gesplitste spectraallijnen."*

Indien een spectraallijn door een magnetisch veld in een triplet wordt veranderd, hebben de beide uiterste componenten en de middelste in het algemeen verschillende intensiteiten. Volgens de elementaire theorie van Lorentz van het verschijnsel der magnetische splitsing moet er een eenvoudig verband tusschen die intensiteiten bestaan. Noemt men $I_1$ en $I_3$ de intensiteiten der buitenste componenten en is $I_2$ die van de centrale component dan moet men verwachten dat

$$I_1 = I_3 = \tfrac{1}{2} I_2 \quad , \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

is.

Het is herhaalde malen opgemerkt dat aan die betrekking gewoonlijk niet voldaan wordt, en dat er dikwijls tripletten worden gevonden waarbij, in tegenspraak met (1) de centrale component zwak en de uiterste componenten sterk zijn.

Er zijn werkelijk gevallen aan te wijzen waarbij de intensiteiten anders zijn dan in vergelijking (1) is uitgesproken.[1]) Intusschen zijn er zeer vele gevallen waarin die tegenspraak met de genoemde betrekking slechts schijnbaar bestaat, doordat eene omstandigheid over het hoofd is gezien waarop ik in het volgende opmerkzaam wensch te maken en die door autoriteiten over dit onderwerp in dit verband nog niet is onderzocht.

---

[1]) Hiertoe behooren die lijnen welke de door Egoroff en Georgiewsky waargenomen partieele polarisatie duidelijk vertoonen (C.R. **124, 125.** 1897).

In het zeer belangrijke onderzoek van RUNGE en PASCHEN[1]) was een kalkspaath kristal aangebracht voor de buis die in het magnetisch veld was geplaatst. Door een kwartslens werden de twee beelden door het kalkspaath gevormd, in het vlak van de spleet geprojecteerd. Het eene of het andere van die beelden kon afzonderlijk onderzocht worden.

„Bei richtiger Stellung des Kalkspaths bestand das eine Bild aus Licht, dessen elektrische Schwingungen in der Lichtquelle parallel den Kraftlinien vor sich gehen, das andere Bild aus Licht, dessen elektrische Schwingungen in der Lichtquelle auf den Kraftlinien senkrecht stehen. Dass die Ebene der Schwingungen nach dem Durchsetzen des Kalkspaths durch die Quarzlinse gedreht wird, thut nichts zur Sache".

Ongetwijfeld scheidt de beschreven methode de componenten met verticale van die met horizontale trillingen. De onderlinge intensiteitsverhouding der componenten echter, zooals die in het uitgestraalde licht bestaat, waarvan intusschen in het onderzoek van RUNGE en PASCHEN slechts in het voorbijgaan sprake is, kan onder omstandigheden geheel veranderd worden. Indien nl. door het tralie verticale en horizontale trillingen in verschillende mate worden teruggekaatst, zal de draaiing van de trillingsrichting in de door de kwartslens invallende bundels zich natuurlijk afspiegelen in de waargenomen intensiteit.

Reeds sedert lang is de polariseerende werking van tralies bekend en in het algemeen is dus te verwachten, dat het niet zonder invloed zal zijn hoe de stand der trillingen ten opzichte van de groeven van een tralie is.

Ik was er niet op voorbereid, dat die invloed zoo sterk kon zijn als bij eenige proeven door mij met een groot concaaf tralie van ROWLAND genomen het geval bleek. Ik heb mij tot het onderzoek van de gele kwiklijnen bepaald en deed de waarnemingen in het spectrum van de 1ste orde. De invallende lichtbundel maakte een hoek van ongeveer 19' met de normaal op het tralie. In de richting der normaal werd waargenomen of gephotographeerd. Een vacuumbuisje met eenig kwik was in het magnetisch veld geplaatst en een beeld er van werd met een glazen lens op de spleet van het spectraal apparaat geworpen. Het licht loodrecht op de magnetische krachtlijnen uitgestraald werd onderzocht.

In fig. 1 is een reproductie van het triplet waarin de lijn 5769.4

[1]) C. RUNGE u. F. PASCHEN Abh. der Berl. Akad. Anhang. 1902.

wordt gesplitst. De intensiteits-verdeeling is absoluut in tegenspraak met verg. (1).

Enkele waarnemingen met een natriumvlam, waarvan ik het licht op het tralie deed invallen ongeveer onder den zelfden invalshoek als daareven, terwijl ik in de richting van de normaal door een kalkspaathprisma waarnam, leerden mij dat het door het tralie teruggekaatste licht sterk gepolariseerd was. De verticale trillingen bleken sterk begunstigd te worden.

Ik ging vervolgens den invloed van een draaiing van het polarisatie-vlak van het gele Hg-licht op de lichtverdeeling in het triplet na. Het polarisatie-vlak werd gedraaid door vóór de spleet plaatjes van kwarts loodrecht op de as geslepen te plaatsen. Er stonden mij twee plaatjes ten dienste van 2.15 resp. 4.17 mM. dikte. Volgens GUMLICH [1]) is de draaiing voor Hg licht van de golflengte 5769 in een plaat van 1 mM. dikte, bij $t = 20°$ 22°.718 en bedroeg deze dus voor de twee genoemde plaatjes

$$22.72 \times 2.15 = 48°.90 \text{ en } 22.72 \times 4.17 = 94°.7.$$

De verandering der lichtverdeeling is in het oogvallend. In Fig. 3 zijn de buitenste componenten slechts uiterst zwak zichtbaar. Het gereproduceerde negatief beantwoordt aan het geval waarin het plaatje dat het polarisatie-vlak 94°.7 draait, voor de spleet geplaatst was. Het verdient opmerking dat Fig. 2, waarbij de op de spleet invallende trilling een hoek van ongeveer 45° daarmede maakt, beantwoordt aan de werkelijke verdeeling der intensiteiten die in het uitgestraalde licht voorkomen.

Daar er nu voor gezorgd is, dat verticale en horizontale trillingen in gelijke mate aanwezig zijn in elk der componenten, dus voor alle drie de omstandigheden, wat de trillingsrichting betreft, dezelfde zijn, kan de polariseerende werking van het tralie geen invloed meer uitoefenen.

De lichtverdeeling in Fig. 2 is zeker niet in strijd met vergelijking (1) en de waarneming met het oog schijnt die vergelijking te bevestigen. Natuurlijk is eene photographische reproductie voor de beoordeeling van verhoudingen van intensiteiten niet voldoende en ik stel mij daarom voor de vergelijking ook numerisch te toetsen.

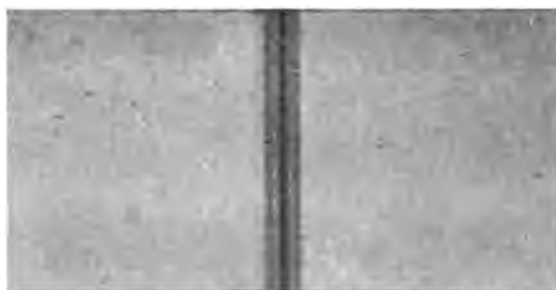
Wenscht men de werkelijke verhouding der intensiteiten van de componenten van een gesplitste spectraallijn te kennen, dan zal het dus in het vervolg noodig zijn er voor te zorgen dat voor het

[1]) GUMLICH. Wied. Ann. Bd. **64** p. 333. 1898.

**P. ZEEMAN. De intensiteiten der componenten van door magnetisme gesplitste spectraallijnen.**



1. Direct waargenomen beeld. Geen kwartsplaat vóór de spleet.



2. Kwartsplaat, welke het polarisatievlak 45° draait vóór de spleet.
Intensiteiten als in lichtbron.



3. Kwartsplaat, welke het polarisatievlak 90° draait vóór de spleet.

onderzochte spectraalgebied het invallend licht wat zijne trillingsrichting aangaat een hoek van 45° met de spleet maakt.

Zijn enkele componenten bij een samengestelde splitsing van eene spectraallijn zeer zwak, dan zal het soms mogelijk zijn door een kwartsplaat van geschikte dikte die componenten te versterken. Dit zal in al die gevallen mogelijk zijn waarbij de invallende trillingen niet die zijn, welke het sterkst door het tralie teruggekaatst worden.

Natuurlijk zal men ook bij andere spectroscopen met het bovenstaande rekening kunnen houden, o. a. in het geval dat men met een echelon-spectroscoop van MICHELSON werkende, het invallende licht reeds met een hulpspectroscoop geanalyseerd heeft. De terugkaatsing en de breking in de glasprisma's verzwakt dan natuurlijk in verschillende mate verticale en horizontale trillingen.

Gevallen waarin de betrekking (1) niet uitkomt kan men in sommige lijnenrijke spectra (bijv. ijzer) aantreffen. Onder de door het magnetisme teweeggebrachte tripletten komen enkele dicht bij elkaar gelegene voor, waarbij de intensiteitsverdeeling in de eene juist omgekeerd is als in de andere. Zonder verdere analyse kan men besluiten dat voor de eene of voor de andere de relatie (1) ongeldig is.

## OPMERKINGEN BIJ DE PLAAT.

De figuren zijn ongeveer 30-malige vergrootingen van photographische opnamen der Hg-lijn 5769, 4.

In alle gevallen is met een glazen lens het beeld der lichtbron op de spleet geworpen.

Fig. 1 zonder kwartsplaat vóór de spleet.

Fig. 2. kwartsplaat, welke het polarisatievlak 45° draait vóór spleet. Lichtverdeeling overeenkomstig met die welke in de lichtbron bestaat.

Fig. 3. kwartsplaat, welke het polarisatievlak 90° draait vóór spleet. De expositietijd is de drievoudige van dien welke bij de vorige figuren werd gebruikt. Toch zijn de uiterste componenten zeer flauw en in de reproductie nauwelijks zichtbaar.

**Physiologie.** — De Heer WINKLER biedt eene mededeeling aan van den Heer G. VAN RIJNBERK: *„Over segmentale huidverzorging door het sympathische zenuwstelsel bij gewervelde dieren, op grond van proefondervindelijke onderzoekingen over de zenuwverzorging der kleurstofcellen bij platvisschen en der haarbewegende spieren bij katten."*

(Mede aangeboden door den Heer C. A. PEKELHARING).

Er bestaan talrijke doch verspreide, door proeven op dieren verkregen of uit waarnemingen bij het ziekbed ontleende gegevens, welke er toe leiden om aan te nemen, dat bij gewervelde dieren en bij den mensch de voor de huid bestemde àfvoerende (efferente) zenuwvezels, welke door de grijze verbindingstakken uit de grensstreng van den N. Sympathicus aan de gemengde ruggemergszenuwen worden toegevoerd, zich ongeveer binnen het huidgebied uitbreiden dat door elk dier zenuwen met aanvoerende (afferente) vezels verzorgd wordt. Daar voorts in 't algemeen, behoudens geringe afwijkingen, de afvoerende sympatische vezels van de grijze verbindingstakken hun oorsprong hebben in het grensstrengganglion, waaruit deze takken schijnen te ontspringen, mag men aannemen dat de huidinnervatiegebieden van de grensstrengganglien naar hun ligging ongeveer samentreffen met de huidverzorgingsgebieden der onderscheidelijk overeenstemmende ruggemergsganglien. Over de uitgestrektheidsverhoudingen der sympatische en der spinale huidvelden bestaan minder talrijke gegevens; middellijke aanduidingen schijnen er echter op te wijzen dat de huidgebieden der ruggemergsganglien uitgestrekter zijn dan de velden der onderscheidelijk overeenstemmende grensstrengganglien. Met dit voorbehoud schijnt men echter als zeer waarschijnlijk te mogen stellen, dat de zenuwverzorging der huid zoowel door de sympatische als door de ruggemergsganglien volgens één en hetzelfde morphologische schema geschiedt. Rechtstreeksche bewijzen dezer onderstelling, door op een zelfde object de liggings- en uitbreidingsverhoudingen der gezegde innervatievelden aan te toonen, zijn echter tot heden niet geleverd. Dit heb ik thans door eenige eenvoudige proeven getracht te doen.

A. *De sympathische zenuwverzorging der kleurstofcellen en de spinale huidverzorging voor het gevoel bij platvisschen.*

Sinds G. POUCHET'S [1]) uitgebreide onderzoekingen is het bekend dat bij sommige vischsoorten het verschijnsel der kleursveranderlijk-

[1]) G. POUCHET. Des changements de coloration sous l'influence des nerfs. — Journal de l'anatomie et de la physiologie. Tome 12 p. 1—90, en p. 113—165, Parijs 1876.

heid der huid onder den rechtstreekschen invloed van het sympathische zenuwstelsel staat. Snijdt men bij een tarbot de verbindingstakken van eenige ruggemergszenuwen of wel deze zelve, in de naar boven gerichte, de oogen dragende lichaamshelft dóór, dan ontstaat op de huid een min of meer scherp omschrevene donkere band. Pouchet vatte dit verschijnsel op als een verlamming der kleurstofcellen der huid tengevolge der zenuwdoorsnijding, en noemde de na deze ontstane donkere banden, „paralytische" zones. Hij is echter op de beteekenis van deze zones, beschouwd als innervatiegebieden van sympathische ganglia niet ingegaan, en na hem heeft, voorzoover ik weet, niemand deze toch zoo uiterst belangwekkende onderzoekingen weder opgevat. Dit heb ik thans gedaan, en er aan toegevoegd een vergelijkend onderzoek over de gevoelsverzorging der huid.

Als objecten dienden mij talrijke exemplaren van Solea (impar, vulgaris, monochır) en Rhomboidichthys (mancus seu podas). Deze laatste soort vooral, en ook Solea impar, hebben mij uitmuntende resultaten gegeven en de nadere uitéénzetting is voornamelijk gegrond op proeven op deze dieren verricht. Het operatief gedeelte dezer proeven was hoogst eenvoudig. Door eene de huid en de spieren klievende langssnee, verloopend naast de laterale zintuigslijn in de ventrale huidstrook van het staartgedeelte der oogendragende, gepigmenteerde lichaamshelft, werden de oorsprongpunten van eenige haemale wervel-doornen blootgelegd en de ventrale takken der spinale zenuwen opgezocht. Gewoonlijk werden deze tegelijk met de verbindingsstukken van den N. Sympathicus opgelicht en afgescheurd.

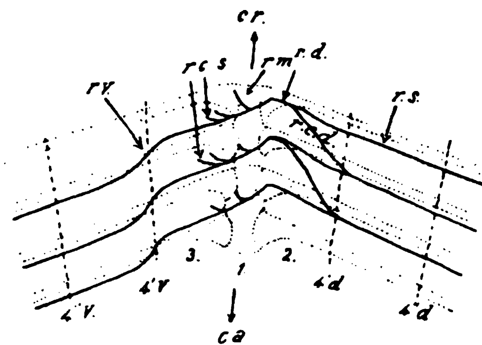



Fig. 1.

Schema van ligging en verloop der hoofdstammen der ruggemergszenuwen in het staartgedeelte der Pleuronectiden (naar een praeparaat van Rhombus laevis), 1-wervellichaam, 2-neurale werveldoorn, 3-haemale werveldoorn, 4'*d*, 4''*d*, 4'*v*, 4''*v*, eerste en tweede langsseptum der dorsale en ventrale spieren, — *cr*, *ca*, craniale en caudale grenzen van het praeparaat. — *r.d.*, *r.m.*, *r.v.*, ramus dorsalis, medius en ventralis van de ruggemergszenuwen. — *r.c.d.*, *r.s.*, ramus comunicans en ramus spinosus der dorsale zenuwstammen. — *r.c.s.*, sympathische verbindingstak.

De zichtbare gevolgen dezer ingrepen bestonden in alle gevallen regelmatig in het in de huid zichtbaar worden van een min of meer scherp omgrensd donker veld, donkerder nl. dan de overige omgevende huid. De ligging en de uitbreiding dezer donkere velden waren afhankelijk van het segmentale volgnummer der doorgesnedene zenuwen en van derzelver aantal. De vorm der donkere velden was steeds dezelfde, en wel die van een band, welke in de ruggerandvin begon, eenigszins schuin kopwaarts naar de laterale zintuigslijn verliep, en van hier eenigszins schuin staartwaarts naar de buikrandvin waarin zij eindigde. Dit voor zoover het den vorm en het algemeen verloop der banden betreft. Wat de uitbreiding er van aangaat moge het volgende gelden. 't Vernielen van den verbindingstak van één spinaalzenuw heeft mij nooit eenige duidelijke verandering der huidskleur te zien gegeven. 't Vernielen der verbindingstakken van twee achtereenvolgende zenuwen gaf gewoonlijk een smalle, slecht afgrensbare, niet zeer donkere zone te zien. Eerst wanneer drie achtereenvolgende takken vernield waren, vertoonde zich een duidelijke, scherp begrensde donkere band.

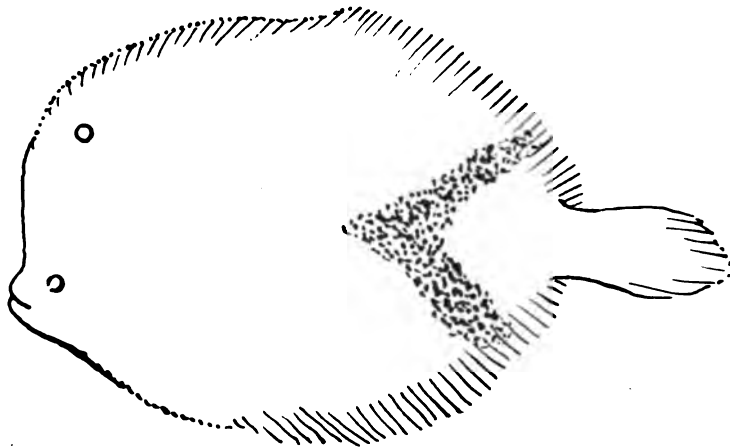


Fig. 2. [1])

*Rhomboidichthys mancus*. Donkere zone na doorsnijding van 3 ruggemergs zenuwen en sympathische verbindingstakken.

Werden meer dan drie takken afgescheurd, dan werd een naar vorm en ligging overigens gelijke, doch breedere band gevonden. Werden na een eerste doorsnijding van bijv. drie takken, nog een paar takken, onmiddellijk kop- of staartwaarts op de vorige volgend,

[1]) Deze en fig. 3, 4, 6, 7, 8, 9 zijn reproducties van in omtrek gedecalqueerde photographieën.

vernield, dan werd geregeld de oorspronkelijk opgemerkte donkere band daarna gelijkmatig verbreed gevonden, doordat, al naar 't geval, de craniale grens zich kopwaarts of de caudale zich staartwaarts verschoven had. Hiermede was een reeks aanduidingen geleverd dat de door elken verbindingstak en grensstrengganglion met kleurstofcel-bewegende (pigmentomotorische) vezels voorziene huidgebieden, zelve ook aaneengesloten, bandvormige velden zijn. Nadere gegevens hieromtrent werden nog op de volgende wijze verkregen.



Fig. 3.
*Solea impar.* Isolatie van vier ruggemergszenuwen tusschen twee maal vier craniaal en caudaal doorgesnedene.



Fig. 4.
Een andere schol, waarbij eene dergelijke operatie verricht was.

Werden eenige, bijv. vier verbindingstakken doorgescheurd, en daarna nogmaals vier andere kop- of staartwaarts van de vorige, doch met intactlating van bijv. weer een viertal takken daartusschen, dan ontstonden twee ongeveer even breede, donkere banen, tusschen welke een lichtere, iets breedere band, beantwoordend aan de onaangeroerde takken. (Fig. 3 en 4). Door dergelijke proeven wordt de onderstelling, dat de grensstrengganglien bandvormige huidgebieden verzorgen, vrijwel tot zekerheid. Ook over de uitgebreidheid dier gebieden werd eenige uitkomst verkregen. Vergelijkende berekeningen, als vroeger aangegeven, uitgaande van zoo nauwkeurig mogelijke metingen der donkere en lichte banden toonden aan, dat de kop-staartwaartsche breedte van een door een grensstrengganglion geïnner-

veerd huidgebied bij schollen van gemiddeld 20 cM. lichaamslengte op ongeveer 7 mM. te stellen is, en dat de velden zelve elkander iets meer dan voor de helft bedekken.

Toen het voorafgaande eenmaal verkregen was, lag de vergelijking tusschen het schema der spinale en der sympatische zenuwverzorging der huid als 't ware voor de hand. Eenmaal, tegelijk met de sympatische verbindingstakken de ventrale (en dorsale) takken van een paar ruggemergszenuwen doorgesneden zijnde, is het uiterst eenvoudig de uitbreiding en de ligging der hierdoor ontstane ongevoelige huidzone te bepalen en te vergelijken met die van den donkeren band. Ter vergemakkelijking dezer bepaling verhoogde ik de reflexprikkelbaarheid der dieren door hen met een kleine hoeveelheid eener oplossing in zeewater van zwavelzure strychnine, ter sterkte van 1 : 10.000, te vergiftigen. Dan volgde op een licht krabben der huid met een speldepunt reeds eene duidelijke algemeene reactie, en was het mogelijk de grenzen tusschen de gevoelige en gevoellooze huidvelden zeer nauwkeurig te bepalen. De resultaten van een reeks proeven zijn mij vrij constant gebleken, zoodat ik ze hier met voldoende zekerheid kan mededeelen.

In 't algemeen dan stemmen de ongevoelige velden en de donkere banden, ontstaan na het doorsnijden van ruggemergszenuwen en bijbehoorende sympathicusverbindingstakken naar uitbreiding, ligging en rangschikking volkomen overeen. De pigmentomotorische sympathicusvezels, afkomstig uit een gegeven grensstrengganglion en verbindingstak, verbreiden zich dus nauwkeurig in het huidgebied, dat door het overeenkomstige ruggemersganglion met vezels voor het gevoel verzorgd wordt. De beide innervatieschema's dekken elkander dus volkomen, en de bijzonderheden voor de kleurstofcelleninnervatie boven beschreven, gelden evenzeer voor de gevoelige huidverzorging. De centrale zenuwverzorging der huid vervalt dus bij Pleuronectidae in een reeks segmentale velden, welke men uit een functioneel oogpunt als gevoelige en pigmentorische huidsegmenten kan onderscheiden doch welke naar ligging en uitbreiding samenvallen.

### *B. De sympathische zenuwverzorging der haarbewegende spieren en de spinale huidverzorging voor het gevoel bij katten.*

LANGLEY's bekende onderzoekingen (1893)[1]) hebben aangetoond,

---

[1]) J. N. LANGLEY. — Preliminary account of the arrangement of the sympathetic nervous system, based chiefly on observations upon pilomotor nerves. Proceedings of the R. Society of London, vol. 52, n⁰. 320, p. 547—556 Februari 1893. London. J. N. LANGLEY. The arrangement of the sympathetic nervous system based chiefly upon pilomotor nerves. Journal of Physiology (Foster) vol. 15 n⁰. 3 p. 176—244. 1893. Cambridge.

dat de voor de haarbewegende spieren van de romphuid bij katten bestemde sympathische zenuwvezels hun oorsprong hebben in de reeks ganglien van de grensstreng van den N. Sympathicus, dat zij langs de grijze verbindingstakken naar de onderscheidenlijk overeenkomstige ruggemergszenuwen geleid worden, om langs de primaire dorsale zenuwstammen en derzelver (dorsale) huidstakken de haarbewegende spieren van de dorsale huidstrook te bereiken. Verder toonde hij aan, dat de overgroote meerderheid der in een sympathisch ganglion ontspringende, gelijk hij ze noemde „pilomotorische" zenuwvezelen langs één zelfden bij het ganglion behoorenden grijzen verbindingstak, naar de éëne segmentaal overeenkomstige ruggemergszenuw geleid worden, en gezamenlijk langs den dorsalen huidtak of takken dezer zenuw de huid bereiken, waar zij zich in een aaneengesloten, scherp afgrensbaar gebied uitbreiden. Hij vond verder dat deze, door de reeks sympathische ganglien met pilomotorische vezels verzorgde huidgebieden eene regelmatige reeks vormen, welke beiderzijds langs de dorsale middellijn van het lichaam gerangschikt ligt. Aangaande de verhouding der zenuwverzorging der huid met vezels voor de haarbewegende spieren uit de sympathische ganglia, ten opzichte van de verzorging met vezels voor het gevoel uit de ruggemergsganglia, moest hij er zich toe bepalen, de door hem bij de kat gevonden rangschikking der pilomotorische grensstrengganglienhuidgebieden te vergelijken met de resultaten der onderzoekingen van Türck en Sherrington betreffende de spinale zenuwverzorging bij den hond en den aap. Rechtstreeksche vergelijkingen tusschen de gevoelige en de pilomotorische huidverzorging werden door hem niet verricht. Dit heb ik thans gedaan.

De weg daartoe wees zich als 't ware van zelf. Wij mogen heden, voornamelijk na de anatomische onderzoekingen van Bolk op den mensch aannemen, dat er tusschen de ruggemergszenuwen der zoogdieren in het rompgebied geen uitwisseling van voor de huid bestemde zenuwvezels plaats vindt. De serieel gerangschikte huidtakken van het dorsale lichaamsgebied vertegenwoordigen dus onderscheidenlijk de voor de ruggehuid van den romp bestemde spinale en sympatische zenuwvezels der ruggemergszenuwen en sympathische verbindingstukken waaruit zij ontspringen. Om dus de zenuwverzorging der ruggehuid onderscheidenlijk door de ruggemergs- en grensstrengganlien te leeren kennen, is het voldoende de uitbreidingsgebieden der in de dorsale huidzenuwtakken verloopende pilomotorische- en gevoelvezels afzonderlijk vast te stellen en te vergelijken, wat op uiterst eenvoudige wijze te bereiken is.

Ik deed het door eerst met de Sherringtonsche isolatiemethode de

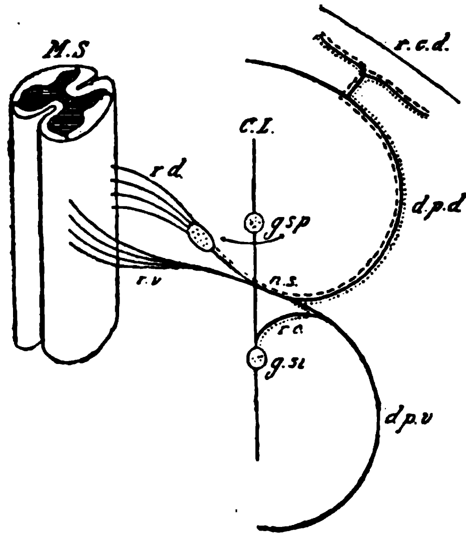



Fig. 5.
Schema van het verloop der (postganglionaire) pilomotorische, en der gevoelszenuwvezels naar de huid van het rompgebied bij katten.

*M.S.* = Ruggemerg. — *r.d.-r.v* = dorsale en ventrale wortel. — *N.S.* = gemengde ruggemergszenuw. — *d p.d.-d.p.v.* = dorsale en ventrale primaire stam van dezelve. — *r.e.d.* = dorsale huidtak. — *C.L.* = grensstreng van den Sympathicus. — *g.sp.-g.si.* = spinaal en sympathisch ganglion. — *r.c.* = sympathische verbindingstak. — De *streepjeslijn* — — — — beduidt 't verloop der spinale vezels voor 't gevoel, de *stippellijn* .... 't verloop der sympathische haarbewegende vezels.

uitbreiding van het gevoelige, door een bepaalden huidtak verzorgde veld af te grenzen en daarna door inductieprikkeling van dezen zelfden tak de uitbreiding van het, door de in denzelven verloopende pilomotorische vezels verzorgde huidgebied zichtbaar te doen worden. Daartoe werden eerst de haren der gebezigde katten met een z. g. tondeuse over de romp tot op ongeveer een halve c.M. gelijkmatig afgeknipt. Dan werd onder narcose en onder aseptische voorzorgen (voorzoover mogelijk daar de huid niet geschoren werd) een overlangsche huidsnee in de dorsale middellijn aangelegd, en de huid naar rechts en naar links omgeklapt. De reeks dorsale huidzenuwen komen dan na 't praepareeren van het bindweefsel meest vrij duidelijk in zicht, en het was uiterst gemakkelijk een bepaalden tak voor de isolatie uit te kiezen, en een drietal takken, caudaal en craniaal onmiddellijk op den gekozenen volgend, na lospraepareeren van de, meest te zamen verloopende bloedvaten, of tusschen dubbele onderbinding door te knippen. Hierna werd de huid gehecht en aan het dier een paar dagen rust gegeven. Daarop werd tot de bepaling der

in de huid aantoonbare gevoelige en ongevoelige velden overgegaan; de grenzen ervan werden met kleurige lijnen nauwkeurig aangeteekend. Ten slotte werd het dier weer onder narcose gebracht, de huidsnee opengemaakt en werden de geïsoleerde zenuwen blootgelegd en geprikkeld. Het veld, waar de haren oprezen, werd met eene andere kleur afgegrensd.

Ik stel mij nu voor eerst een paar woorden aan de in mijn proeven verkregen geïsoleerde gevoelige en pilomotorische huidvelden afzonderlijk te wijden, en daarna beide onderling te vergelijken.

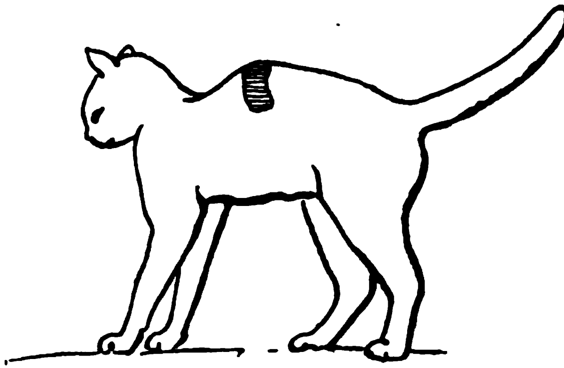


Fig. 6.

Pilomotorisch veld van de 7e thoracale zenuw.

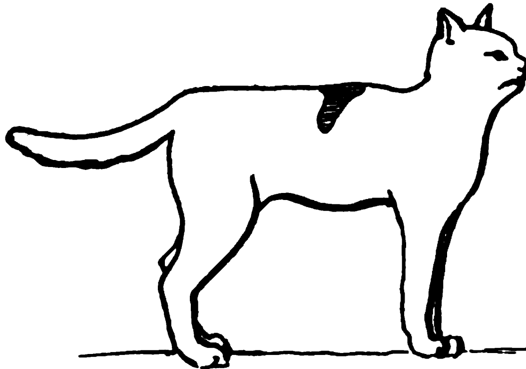


Fig. 7.

Pilomotorisch veld van de 8e thorakale zenuw bij dezelfde kat.

Voor de pilomotorische velden kan ik kort zijn, daar ik aan de uiterst zorgvuldige mededeelingen van Langley hieromtrent nauwelijks iets toe te voegen heb. Evenals hij vond ik dat de velden, waarin bij de proeven gedurende de prikkeling van verschillende huidtakken

en op verschillende dieren de haren omhoog rezen, tamelijk beteekenende verschillen vertoonden, zoowel wat hun uitbreiding, vorm en afgrenzing aangaat, als wel wat de graad van het verschijnsel zelf betreft. Gewoonlijk was het veld waarbinnen de haren oprezen, ongeveer rechthoekig en behoudens eene lichte staartwaarsche afwijking, loodrecht tegen de dorsale middellijn gelegen. In uiterst goed geslaagde proeven strekten zich de pilomotorische velden tot ongeveer tegen de dorsale okselliesplooilijn, over een dorsoventrale uitgestrektheid van bijkans 60 m.m. uit. De cranio-caudale breedte bedroeg gemiddeld 26 m.m. Als voorbeeld van de verhoudingen der pilomotorische velden in een uiterst gunstig geval geef ik de in fig. 6 en 7 weergegeven photographische opnamen.

De geïsoleerde voelende velden hadden gewoonlijk een niet al te zeer van den hierboven voor de pilomotorische velden beschrevenen afwijkenden vorm. Zij waren evenals deze gewoonlijk ongeveer rechthoekig, bijkans loodrecht op de dorsale middellijn gelegen en vertoonden evenals de pilomotorische velden eene misschien zelfs iets sterkere afwijking in caudale richting. Kop- en staartwaarts waren zij door de gevoellooze velden begrensd; ventraalwaarts gingen zij zonder aantoonbare grenzen in het laterale lichaamsgebied over, welks gevoeligheid in haar volle uitgestrektheid behouden was. De cranio-caudale breedte der voelende velden was gemiddeld 30 m.m.; hunne dorsoventrale uitgestrektheid was natuurlijk niet aan te geven; die der gevoellooze velden was gemiddeld 60 m.m.

Gaan wij thans over tot de vergelijking der voelende en pilomotorische huidvelden. Op grond van wat ik boven reeds opmerkte omtrent de wisselvalligheid van vorm en uitbreiding dezer laatste, is reeds af te leiden, dat de uitslag dezer vergelijking ook zeer verschillend geweest is. In één gewichtig punt stemmen echter de resultaten van al mijn proeven overeen: het pilomotorische huidgebied werd altijd binnen het voelende gebied der geïsoleerde zenuwtakken gevonden. In dit opzicht kan het grondvraagstuk, dat ik mij bij mijn onderzoek gesteld had, als opgelost beschouwd worden, althans voor het romphuidgebied waar mijne proeven plaats vonden. Wat verder de wederzijdsche uitgebreidheid der gevoelige en pilomotorische huidgebieden en de juiste ligging dezer laatste in de eerste betreft, heb ik, gelijk ik reeds opmerkte, groote verscheidenheid gevonden. Soms had het pilomotorische veld een uitgestrektheid, bijkans aan die van het voelende veld gelijk, zoodat beide ongeveer geheel samenvielen. In de meerderheid der gevallen echter was het pilomotorische huidgebied in alle richtingen minder uitgebreid van het voelende. De plaats welke het pilomotorische veld dan in het voelende innam, was

zeer verschillend. Gewoonlijk lag het ongeveer in het midden ervan, zooals bij de katten, welker photographieën ik in de figuren 8 en 9 weergeef.

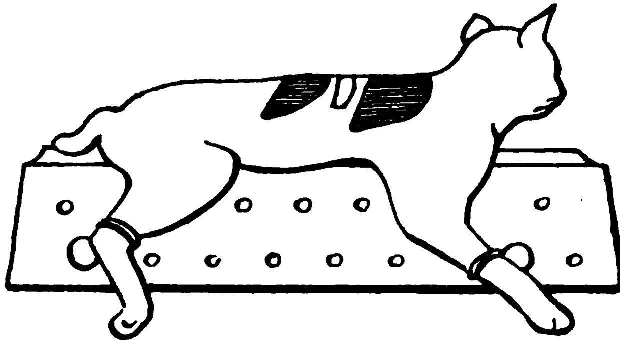


Fig. 8.
Ligging van het pilomotorische huidgebied (wit) in het door ongevoelige (dwarsgestreepte) huidgebieden craniaal- en caudaalwaarts geïsoleerde voelende veld.

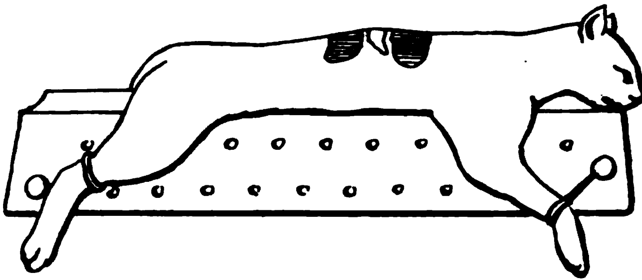


Fig. 9.
't Zelfde bij eene andere kat.

Een andermaal echter lag het meer nabij de craniale of caudale grens van het voelende gebied, eene bepaalde regelmatigheid heb ik hier niet kunnen vaststellen.

Keeren wij thans tot het hoofdvraagstuk van mijn onderzoek terug. Uit het tot hiertoe medegedeelde blijkt duidelijk, dat de pilomotorische vezels en de vezels voor het gevoel, verloopend in de dorsale huidtakken der romphuid bij katten, zich in naar ligging en rangschikking, doch niet naar uitgestrektheid overeenstemmende huidgebieden uitbreiden. Hieruit volgt dat de sympathische grensstrengganglien en de ruggemergsganglien de huid volgens hetzelfde schema verzorgen, en hoewel nu de verhoudingen hier niet zóó eenvoudig zijn als bij de platvisschen gevonden werd, meen ik toch ook hier het schema der pilomotorische zenuwverzorging der huid door de grensstreng van het sympathische zenuwstelsel „segmentaal" te mogen noemen.

**Scheikunde.** — De Heer P. VAN ROMBURGH biedt eene mededeeling aan: *„Over het lupeol.”*

In de Comptes rendus van 24 Juni 1907 deelen JUNGFLEISCH en LEROUX mede, dat in de getah pertja van *Palaquium Treubii* BRCK. lupeolcinnamaat voorkomt.

Vroeger reeds toonde ik aan, dat uit deze getah-soort kaneelzuur verkregen kan worden, terwijl lupeolcinnamaat een bestanddeel van verschillende handelssoorten van getah pertja bleek te zijn. [1])

JUNGFLEISCH en LEROUX hebben nu ook het door hen verkregen lupeol bestudeerd, en geven aan, dat deze stof bij plotselinge verhitting op het „bloc Maquenne” bij 190°—192° smelt, dan weer dadelijk vast wordt om bij 212° op nieuw te smelten. Dit verschijnsel verklaren zij door aan te nemen, dat lupeol water verliest en overgaat in een bij 212° smeltende koolwaterstof, waaraan zij den naam van lupeyleen geven. Bij 130° zou lupeol langzaam, bij 150°—160° zeer snel, en bij 190° plotseling water verliezen.

Verder verkregen zij door behandeling van lupeol met azijnzuuranhydride en natriumacetaat bij 170° geen lupeolacetaat, maar eveneens lupeyleen, terwijl zij er op zinspelen, dat het acetaat, door het gemakkelijke waterverlies van het lupeol, niet zou bestaan.

Nu heb ik indertijd (loc. cit.) in gemeenschap met Dr. V. D. LINDEN door acetyleeren van lupeol een acetaat verkregen, terwijl Dr. COHEN hier eveneens dezen ester bereidde en er verschillende reacties mede bestudeerde.

Het scheen mij daarom niet overbodig toe om de proeven van deze Fransche chemici te herhalen, en ook om het lupeolacetaat opnieuw te bereiden en weer te analyseeren, ten einde zeker te zijn, dat dit lichaam werkelijk bestaat en dat Dr. COHEN, die het niet analyseerde omdat de eigenschappen met de door mij vermelde overeenstemden en een mengsel van het door hem verkregen acetaat met lupeol een aanzienlijke smeltpuntsverlaging toonde, het inderdaad in handen had.

Ik verhitte in de eerste plaats om eene eventueele waterafsplitsing gemakkelijk te kunnen constateeren en het afgesplitste water te zien en te wegen, lupeol gedurende vele uren in een der beenen van een omgekeerde U-vormige, luchtledige buis in een oliebad op 190°, terwijl het andere been in een Weinhold's glas met vloeibare ammoniak afgekoeld werd. In het been waarin zich het lupeol bevond, had

[1]) B.B. 37 (1904) 3442.

[2]) Acad. Proefschrift, Utrecht 1906.

zich boven den oliespiegel een sublimaat in fraaie kristallen afgezet, terwijl zich in het afgekoelde been eveneens eenige aanslag vertoonde.

Het gewicht van het lupeol was 0.5403 G.

De aanslag in het afgekoelde been woog 0.0065 G.

Bij verhitten op 100° bleef daarvan echter over 0.0046 G.

In het afgekoelde been konden dus slechts sporen water aanwezig geweest zijn.

Het sublimaat in het verhitte been smolt bij 212°—213°.

Bij een andere proef werd 1.0806 Gr. lupeol, in een glazen schuitje afgewogen, geplaatst in een horizontale buis, die in een luchtbad verhit kon worden. De horizontale buis was aan een reservoir met zwavelzuur verbonden, en het geheele apparaat werd met een waterluchtpomp geëvacueerd. Eerst verhitte ik het toestel gedurende 10 uren op 140°—160°, het gewichtsverlies bedroeg slechts 0.0066, waarbij opgemerkt moet worden, dat zich in de buis boven het schuitje een sublimaat had afgezet. Vervolgens werd de stof op dezelfde wijze gedurende 6 uren van 190°—200° verhit. Het totale gewichtsverlies bedroeg toen 0.041 gr., maar daar het gewicht van het sublimaat 0.039 bedroeg, was het in werkelijkheid slechts 0.002 gr. Van een waterafsplitsing, — waardoor een gewichtsverlies van ruim 40 mG. veroorzaakt zou zijn — kon dus ook thans geen sprake wezen.

Dat het lupeol onveranderd was gebleven, werd bovendien door de elementair analyse (met loodchromaat) van het uit aceton omgekristalliseerde residu der beide proeven bewezen.

Stof 0.1991 G; $H_2O$ 0.2147 G; $CO_2$ 0.6172 G.

| | H. | C. | |
|---|---|---|---|
| Gevonden : | 12.08 | 84.54 | |
| Berekend : | 11.49 | 84.85 | (voor $C_{31}H_{50}O$)[1]). |

Door koken met azijnzuur-anhydride (10 dl.) en natrium-acetaat (1 dl.) kon het residu gemakkelijk omgezet worden in een bij 213° smeltend acetaat, zooals de analyse aantoont :

Stof 0.2191 G.; $H_2O$ 0.2251 G.; $CO_2$ 0.6588 G.

| | H. | C. | |
|---|---|---|---|
| Gevonden : | 11.51 | 82.04 | |
| Berekend : | 10.93 | 82.41 | (Voor $C_{33}H_{52}O_2$). |

Ter vergelijking werd ook uit niet-verhit lupeol op dezelfde wijze het acetaat bereid en geanalyseerd. Het smolt bij 212°.

1) De vraag of aan lupeol beter de formule $C_{30}H_{50}O$ te geven ware, laat ik hier onbesproken.

Stof 0.2113 G.; $H_2O$ 0,2169 G.; $CO_2$ 0.6362 G,

| | H. | C. |
|---|---|---|
| Gevonden : | 11.5 | 82.11 |
| Berekend : | 10.93 | 82.41 |

Een mengsel van beide geanalyseerde acetaten smolt eveneens bij 212°, terwijl het acetaat met lupeol gemengd eene sterke depressie van het smeltpunt gaf.

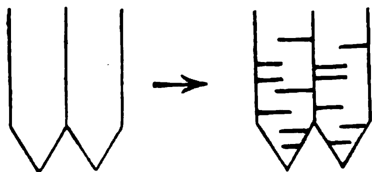
Vervolgens werd nog lupeol in een drogen koolzuurgasstroom op 200° verhit, gedurende $2^1/_2$ uur. In een voorgeschakeld chloorcalciumbuisje was wel eenige toeneming van gewicht waar te nemen, maar tegelijk bleek ook weder vaste stof met den gasstroom vervluchtigd te zijn. De verhitting werd nog 6 uren voortgezet, en daarna het residu tot smeltens toe verwarmd. Door behandeling met benzoylchloride en pyridine liet zich gemakkelijk het bij 267° smeltende lupeolbenzoaat daaruit bereiden, zoodat ook hier het lupeol niet in de koolwaterstof is overgegaan.

Eindelijk heb ik ook nog lupeol met azijnzuuranhydride en natriumacetaat in een toegesmolten buis op 170° verhit gedurende 3 uren. Het reactieproduct werd na behandeling met water uit een mengsel van aceton en alkohol omgekristalliseerd. Het smeltpunt van het verkregen product was 212°. Na menging met lupeolacetaat van eene andere bereiding afkomstig, veranderde het smeltpunt niet. Werd het daarentegen gemengd met lupeol, dan wel met lupeol, dat eenigen tijd op 190° was verhit, dan kon een aanzienlijke smeltpuntsverlaging (± 20°) waargenomen worden.

Door de beschreven proeven is dus overtuigend bewezen, dat lupeol (uit bresk verkregen) onder de door JUNGFLEISCH en LEROUX vermelde omstandigheden niet in lupeyleen overgaat.

Dr. F. M. JAEGER, wien ik daarvoor ook te dezer plaats gaarne mijn dank betuig, had de welwillendheid het gedrag van lupeol bij 't smelten te bestudeeren en deelt mij daarover het volgende mede:

„Smelt men het lupeol tot eene enkelbrekende vloeistof $L$, hetwelk „scherp" geschiedt, dan stolt de massa bij afkoeling deels tot een aggregaat van breede, toegespitste, in hooge interferentiekleuren schitterende naalden $A$, deels tot eene hoornachtige, enkelbrekende



massa *A'*, welke vaak op vloeistofdruppeltjes gelijkende, kogelronde sferoliethjes vertoont, die uiterst zwak dubbelbrekend zijn. De naalden *A* beginnen dan plotseling een onnoemelijk aantal dwarse scheuren te vertoonen (zie fig.), terwijl tevens de pracht van de kleuren sterk vermindert; *A* gaat hier over in eene tweede modifikatie *B*, den gewonen vorm van 't lupeol. Inmiddels is de hoornachtige massa ook aan 't barsten gegaan, en vertoont hier en daar spanningsdubbelbreking benevens een vergrooting van 't aantal „druppeltjes", d.w.z. kristallisatiekernen in embryonalen toestand. *Verhit* men haar voorzichtig eventjes, dan *kristalliseert* ze, en wel tot de naalden *A*, die onmiddellijk overgaan in *B* (door barsten, enz.); de hoornachtige massa *A'* is *identiek* met de naalden *A*: ze is: *A in onderkoelden toestand.* De kristallisatiesnelheid is hier bijna $= 0$, en door de verhitting wordt deze nu zóó vergroot (door verkleining der inwendige wrijving, enz.) dat de massa gaat kristalliseeren. Dit is een mij wèl bekend verschijnsel; fraaie voorbeelden van kristallisatie bij verhitting zijn usnine-zuur en vele vetzure cholesteryl-esters.

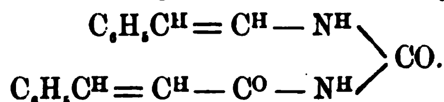
Bij opsmelting van *B* ontstaat soms gedurende enkele korte oogenblikken eerst *A*, dàn *L*. De twee modifikatie's schijnen dus in de relatie van enantiotropie tot elkander te staan."

*Utrecht*, Org. Chem. Lab. d. Univ.

**Scheikunde.** — De Heer HOOGEWERFF biedt eene mededeeling aan van den Heer R. A. WEERMAN: *„Inwerking van kaliumhypochloriet op kaneelzuuramide"*. (2e mededeeling).

Mede aangeboden door den Heer W. A. VAN DORP.

In een vorige mededeeling [1]) werd vermeld, dat uit kaneelzuuramide en kaliumhypochloriet verkregen was het cinnamoylstyrylureum:



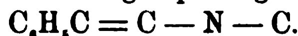
$$\begin{matrix} C_6H_5CH = CH - NH \\ C_6H_5CH = CH - CO - NH \end{matrix} \Big\rangle CO.$$

Hiermede was bewezen, dat er een intramoleculaire atoomverschuiving plaats vindt bij de inwerking van kaliumhypochloriet op kaneelzuuramide en de mogelijkheid dus vastgesteld om uit een verbinding met de atoomgroepeering:



$$C_6H_5C = C - C - N$$

te komen tot een met de atoomgroepeering:

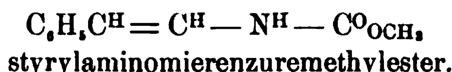


$$C_6H_5C = C - N - C.$$

Een verbinding van deze structuur laat zich nu zeer gemakkelijk

1) Versl. Kon. Acad. van Wetensch. 1906, 262.

verkrijgen uit het kaneelzuuramide door dit in methylalcoholische oplossing met alkalische kaliumhypochlorietoplossing te behandelen. Men verkrijgt op deze wijze met een rendement van ± 70 % het urethaan:


$$C_6H_5CH = CH — NH — CO_{OCH_3}$$

styrylaminomierenzuremethylester.

Kpt. 181°—182° bij 14 mM. Smpt. 122°—123° (gecorr.)

0,1674 gr. stof gaven 0,0914 gr. $H_2O$ en 0,4141 gr. $CO_2$

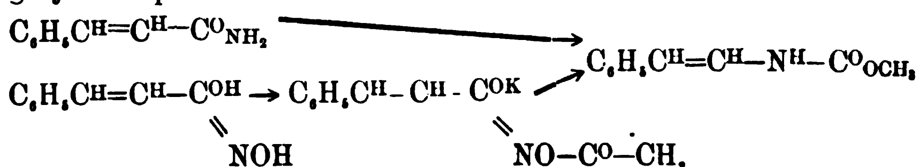
0,1733 „ „ „ 12 cc. $N_2$ bij 14° en 761 mM.

Gevonden: 67,45 % C; 6,11 % H en 8,12 % N.

Berekend voor $C_{10}H_{11}O_2N$: 67,76 % C; 6,27 % H en 7,91 % N.

Een lichaam van dezelfde structuur is reeds beschreven door Thiele en Pickard [1]), die het uit het kaliumzout van het geacetyleerde kaneelhydroxamzuur bereidden. Daar zij voor het smpt. 115° opgeven en ook op een ander punt hunne waarnemingen niet geheel met de mijne overeenstemden, zoo werd ter vergelijking door den Heer W. Ochtman, techn. student, het urethaan op de door Thiele en Pickard aangegeven wijze bereid.

De twee stoffen bleken volkomen identiek te zijn; voor het smpt. werd ook 122°—123° gevonden en een mengsel der twee smolt bij gelijke temperatuur.




Opmerkelijk is deze gemakkelijke urethaanvorming in een waterig-alcoholisch alkalisch medium.

Ik heb mij overtuigd, dat de methode ook van toepassing is bij een derivaat van het kaneelzuur. Zoo ontstaat uit het o-nitrokaneelzuuramide de o-nitrostyrylaminomierenzuremethylester:


$$C_6H_4NO_2 — CH = CH — NH — CO_{OCH_3}$$

Deze kristalliseert in hel geele naalden van smpt 149°—150°.

0,2009 gr. stof gaven 0,3956 gr. $CO_2$ en 0,0781 gr. $H_2O$.

0,1457 „ „ „ 15,8 cc. $N_2$ bij 15° en 758 mM.

Gevonden: 53,70 % C; 4,36 % H en 12,60 % N.

Berekend voor $C_{10}H_{10}O_4N_2$: 54,03 % C; 4,55 % H en 12,61 % N.

Uitvoeriger mededeeling volgt in het Receuil.

*Delft* Juli 1907.

*Scheikundig Laboratorium der Technische Hoogeschool.*

De vergadering wordt gesloten.

---

[1]) Ann. 309, 197.

# ERRATA.

## In Zittingsverslag Mei 1907.

p. 45 r. 5 v. o. leze men achter „energieveranderingen": „bij standvastig volume".

p. 47 r. 3 en 4 v. b. i. p. v. „met de temperatuur" leze men „met temperatuur en druk".

p. 48 r. 3 v. b. i. p. v. „gevonden" leze men: „geworden".

p. 49 r. 2 v. o. i. p. v. „6 + 6 maal 12 sec." leze men: „6 + 6 maal 4 sec."

p. 52 r. 2 v. b. achter 0.01° lassche men in: „met zekerheid".

p. 59 r. 4 v. b. achter „temperatuur" lassche men in: „waarschijnlijk".

## In Zittingsverslag Juni 1907.

p. 162 r. 8 v. o. en p. 164 r. 1 v. b. i. p. v. XVI leze men XIX.

p. 164 tabel XIX N°. 10 i. p. v. 164°.04 leze men 164°.14.

p. 165 r. 4 v. b. i. p. v. XIV leze XVI.

„ „ r. 19 v. o. schrappe men 24.

p. 166 r. 17 v. b. i. p. v. $Pt_I$ en $Pt_{III}$ leze men $Pt_{III}$ en $Pt_V$.

p. 168 r. 13 v. o. i. p. v. „die veroorlooft enz." leze men: „die tot — 217° aansluit en bij de waterstoftemperaturen niet te groote afwijkingen geeft".

p. 172 noot (2) i. p. v. 1893 leze men 1896.

p. 175 r. 9 v. o. i. p. v. $(273.09)^2$ leze men 273.09.

---

**(6 November, 1907).**

# KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

## VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 30 November 1907.

*Voorzitter:* de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
*Secretaris:* de Heer J. D. VAN DER WAALS.

## INHOUD.



Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is:

1°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 28 November l.l. waarbij eenige vragen gesteld worden betreffende de aanleg eener electrische tram in Groningen nabij het terrein waarop het Natuurkundig Laboratorium is gebouwd.

In handen gesteld van de Heeren KAMERLINGH ONNES, JULIUS en ZEEMAN om advies.

2°. Missive van den Heer A. SCHUSTER, Chairman of the Executive Committee for solar Research, waarin opgave gevraagd wordt: 1°. van de namen der leden welke de Commissie uitmaken door de Akademie voor dat onderzoek benoemd; 2°. den naam van hem die de Akademie zal vertegenwoordigen; 3°. de namen van personen, ook niet-leden der Akademie, welke zich met dat onderzoek bezighouden.

De Commissie bestaat uit de Heeren JULIUS en J. C. KAPTEYN en wordt nog aangevuld door den Heer ZEEMAN, die zich daartoe bereid verklaart. De Heer JULIUS is bereid ook voortaan ten deze de Akademie te vertegenwoordigen.

**Natuurkunde**. — De Heer KAMERLINGH ONNES brengt ook namens de Heeren JULIUS en ZEEMAN het volgende Verslag uit over eene missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken, betreffende den aanleg eener electrische tram, nabij het Natuurkundig Laboratorium te Groningen.

In het schrijven van Z.Ex. den Minister van Binnenlandsche Zaken van 28 Oct. l. l. betreffende de schade, welke de aanleg van een electrische tram in de nabijheid van het Natuurkundig Laboratorium der Rijks-Universiteit te Groningen aan dit Laboratorium zou kunnen berokkenen, wordt aan de Afdeeling in de eerste plaats de vraag gesteld of het bedoelde Laboratorium tot dusver voor magnetische waarnemingen in voldoende mate gevrijwaard is tegen invloeden, welke storend inwerken op onderzoek en onderwijs. Wij kunnen daarop antwoorden, dat die beveiliging niet alleen in voldoende, maar in bijzonder hooge mate verkregen is.

Een uitgebreide studie van al wat bevorderlijk kon zijn om een aboratorium bijzonder geschikt te maken voor onderzoekingen, waarvan het welslagen afhangt van het beschikken over een slechts weinig gestoord magnetisch veld, is aan het ontwerpen der plannen voor het Groningsche laboratorium voorafgegaan. Bij den bouw

zijn al de inrichtingen tot stand gebracht en alle voorzorgen in acht genomen, op welke die studie de aandacht had gevestigd. De uitkomsten zijn evenredig geweest aan die zorg. Onder de natuurkundigen is het Laboratorium te Groningen algemeen bekend als voortreffelijk geschikt voor het werk, waarop bij de stichting er van in het bijzonder is gerekend.

Het was dan ook niet noodig, dat wij het Natuurkundig Laboratorium te Groningen, hetwelk ieder van ons reeds vroeger een of meermalen bezocht had, nog eens gingen bezichtigen, of dat wij daar proeven gingen verrichten, welke de doelmatigheid en storingsvrijheid van het magnetische veld, daar zouden doen kennen. Veel beter dan zulk een, uit den aard der zaak beperkt en gebrekkig, onderzoek het zou kunnen doen, wordt de buitengewone geschiktheid van het Groningsche Laboratorium voor magnetisch en galvanometrisch werk in het licht gesteld door de onderzoekingen, welke er door ons medelid WIND met den galvanometer van KOHLRAUSCH zijn gedaan, en door de meting van het electrochemisch equivalent van zilver, door Dr. G. VAN DIJK en Dr. I. KUNST volgens de galvanometrische methode verricht, waarvan de uitkomst een belangrijke plaats onder de bepalingen van fundamenteele constanten der physica inneemt. Voor zulke onderzoekingen bieden slechts weinig laboratoria de gelegenheid. En het feit, dat zij als dissertaties der Groninger Universiteit werden gepubliceerd, bewijst wel hoezeer van de bescherming van het Laboratorium tegen storende invloeden van magnetischen aard bij het onderwijs kan worden partij getrokken.

De aanwezigheid der Electrische Centrale doet aan de geschiktheid van het Laboratorium voor galvanometrische en magnetometrische onderzoekingen geen noemenswaarde afbreuk. De afstand van de Centrale en het Laboratorium is trouwens zoo groot, dat een schadelijke invloed wel niet kan worden verwacht. Het electrisch licht is, waar de voor den aanleg algemeen geldende regelen worden gevolgd, niet te vreezen. Bovendien wordt het zoo goed als alleen 's avonds gebruikt. Wel is het mogelijk, dat verbinding van den nulleider van het gemeentelijke net met de aarde tot het optreden van aardstroomen aanleiding geeft. Deze zullen echter alleen mogelijkerwijze last veroorzaken, wanneer het de studie van het aardmagnetisme geldt. Al is het te betreuren, dat die mogelijkheid bestaat, zoo wordt daarmede gelukkig toch slechts één der vele onderzoekingen in allerlei richting, voor welke het Laboratorium geschikt is, en dan nog wel in zeer geringe mate, belemmerd. Ook op het bepalen van de absolute waarde der aardmagnetische constanten is bijvoorbeeld nimmer gerekend, zoodat het plaatsen van een ijzeren hek kon worden toe-

gelaten evenals het aanbrengen van ijzeren balken en kapspanten in het geologisch-mineralogisch instituut. Voor magnetometrisch en galvanometrisch werk blijft het laboratorium bij uitstek geschikt, zooals blijken kan uit het feit, dat nog dezer dagen, toen een candidaat zich oefende in het bepalen van de horizontale intensiteit van het aardmagnetisme, gedurende 3 uren doorgangen zonder één storing konden worden waargenomen, en dat daarbij kon worden geconstateerd, dat de variatie der declinatie een kleiner bedrag dan het gewone had. In Nederland is er geen ander Laboratorium waar dit zou kunnen geschieden. Trouwens van de andere Nederlandsche Laboratoria onderscheidt het Groningsche zich reeds gunstig door den grooten afstand, waarop het gelegen is van waterwegen, langs welke telkens zoowel 's nachts als overdag ijzeren schepen en stoombooten gaan. Daarbij komt nog, dat het ook wat de dreuningsvrijheid betreft, in zeer gunstige omstandigheden verkeert.

Het aantal zusterinstellingen in het buitenland, waar hetzelfde werk als te Groningen verricht kan worden, is zeker zeer gering. Wat Universiteitslaboratoria betreft is ons geen enkel bekend, dat aan gelijke eischen voldoet. Zoo neemt dan door de mate van beveiliging tegen magnetische storingen, welke het geniet, het Groningsche Laboratorium onder de Natuurkundige Laboratoria een eersten rang in.

Wat de tweede vraag betreft of deze gunstige toestand behouden kan worden, wanneer maar van tramaanleg in de nabijheid van het Laboratorium kan worden afgezien, zoo is ook deze toestemmend te beantwoorden.

Aan de geschiktheid voor aardmagnetische onderzoekingen, aan welke de stichting der Centrale reeds eenigen afbreuk heeft gedaan, zal aanleg van een tram met stroomgeleiding door de rails verder afbreuk doen, doch dit zal alleen dan ernstig in aanmerking komen, wanneer de stroomgeleiding door de rails het Laboratorium tot op korten afstand nadert. Is dit niet het geval en wordt op de lijn van den Frieschen straatweg tot het A-kerkhof de stroomgeleiding door de rails weggenomen (hetgeen bijv. door toepassing van het bedrijf door accumulatoren of door stroomgeleiding door twee bovengrondsche, dicht bij elkander geplaatste, van de aarde geïsoleerde, geleidingen verkregen kan worden), en wordt afgezien van het leggen van retour- en voedingskabels in de nabijheid van het Laboratorium, zoo zijn de storingen niet zoo groot, dat niet toch nog op het gebied van het aardmagnetisme onderzoekingen met een redelijke mate van nauwkeurigheid zouden kunnen worden gedaan. Voor nauwkeurige metingen op dit gebied zou men dan evenals voor magnetometrische metingen van de hoogste nauwkeurigheid den nacht moeten kiezen om ook van

de overblijvende storingen door het trambedrijf, buiten de sectie Friesche straatweg A-kerkhof, bevrijd te zijn. Maar bij de galvanometrische onderzoekingen, die, welke voor het Laboratorium van het hoogste belang zijn, daar zij een uitgebreid deel der physica omvatten, zullen door het hulpmiddel van pantsering der galvanometers de overblijvende storingen van de tram buiten de genoemde sectie op geheel voldoende wijze kunnen worden opgeheven.

Daar het nieuwe stadsdeel in de nabijheid van het Laboratorium bijna uitsluitend uit woonhuizen bestaat en fabrieken van eenigszins grooten omvang daar waarschijnlijk niet zullen komen, het electrisch licht, gelijk wij reeds vermelden, niet hinderlijk is, de magnetische strooiing van motoren zeer gering is, de aanvoerkabels van groote motoren uit den aard der zaak geisoleerd en onmiddellijk naast elkaar geplaatst worden, en die van kleine motoren een zeer geringen stroom gebruiken, is verdere storing bij ontwikkeling van dit stadsgedeelte niet te voorzien. De mogelijkheid bestaat, dat later tot electrische tractie op het Rietdiep wordt overgegaan. Bij toepassing van wisselstroomen zouden storingen geheel zijn buitengesloten. In het ongunstigste geval, dat gelijkstroom en niet wisselstroom gebezigd mocht worden, komt die aanleg op hetzelfde neer als de aanleg van een nieuwe electrische tram. Er zullen op dezelfde wijze als bij den thans beschouwden tramaanleg maatregelen genomen moeten worden om binnen een zekeren afstand van het Laboratorium storingen door die tractie tegen te gaan.

Het Laboratorium zal dus in de toekomst, wanneer maar gezorgd wordt, dat in de nabijheid van het Laboratorium het trambedrijf niet met stroomgeleiding door de rails geschiedt, voor het onderwijs en voor natuurkundige onderzoekingen, zijn eersten rang kunnen handhaven en ook voor sommige aardmagnetische metingen nog een aanmerkelijke waarde behouden.

Terwijl wij hiermede de gestelde vragen voldoende meenen beantwoord te hebben, mogen wij niet nalaten er op te wijzen, hoe schadelijk de bedoelde tramaanleg *zonder de aangegeven voorzorgen* voor het Laboratorium zou zijn. Uit de waarnemingen in het Utrechtsche Laboratorium is gebleken, dat zelfs bij gepantserde galvanometers de invloed van het trambedrijf met stroomgeleiding door de rails zich nog op 60 Meter afstand doet gevoelen. In het Groningsche Laboratorium op eenige malen kleiner afstand van de tramlijn zou met instrumenten van vele malen minder gevoeligheid dan de normale niet meer kunnen worden gewerkt; het Laboratorium zou in één woord voor magnetometrische metingen waardeloos zijn ge-

worden en voor galvanometrische metingen tot lageren rang zijn afgedaald.

Het zou onverantwoordelijk zijn bij den tramaanleg niet de noodige voorzorgen te nemen om te voorkomen dat het Laboratorium te Groningen van zijn hooge waarde voor wetenschap en onderwijs wordt beroofd.

H. Kamerlingh Onnes
W. H. Julius.
P. Zeeman.

Het rapport wordt goedgekeurd en zal in afschrift aan den Minister worden toegezonden.

**Plantkunde.** — De Heer Went doet eene mededeeling naar aanleiding van een onderzoek van den Heer en Mevrouw W. en J. Docters van Leeuwen-Reynvaan: *„Over een tweemalige reductie van het aantal Chromosomen bij het ontstaan der geslachtscellen en over de daarop volgende tweemalige bevruchting bij enkele Polytrichum soorten"*.

(Mede aangeboden door den Heer Pekelharing).

In 1904 verscheen het onderzoek van Ikeno [1]) over de spermatogenesis van Marchantia polymorpha. Na deze publicatie zijn over dit onderwerp tal van onderzoekingen bij levermossen verricht. Over loofmossen wordt wel enkele malen hier en daar gesproken, maar, zoover ons bekend, is, sedert het artikel van Ikeno niets gepubliceerd over de spermatogenesis.

De oudere publicaties, o. a. van Guignard [2]) en Strasburger [3]) behandelen uitsluitend de laatste veranderingen van de spermatiden in spermatozoïden. Om deze reden begonnen wij in 1904, kort na het verschijnen van Ikeno's verhandeling dit onderzoek en vonden zulke van de gewone opvattingen afwijkende feiten, dat wij behalve de spermatogenesis ook de ontwikkeling van de eicel en de bevruchting hiervan nagingen.

Het materiaal werd in den geschikten tijd meestal buiten gefixeerd in een sublimaatmengsel en later met ijzerhaematoxyline volgens Heidenhain gekleurd. Wij gebruikten Polytrichum piliferum, juniperinum en formosum. Het is onze bedoeling in een uitgebreidere verhandeling in het Recueil des Travaux Botaniques Neerlandais ook

[1]) Ikeno. Beihefte zum Botan. Centralblatt. Bd. 16. 1903.
[2]) Guignard. Revue gén. de botanique. I. 1889.
[3]) Strasburger. Hist. Beitr. Heft IV. 1892.

over de methoden bij ons onderzoek gevolgd, uitvoeriger te spreken.

Ikeno deed de merkwaardige ontdekking, dat in de antheridiëncellen vlak voor de deeling een klein rond lichaampje uit de kern in het cytoplasma kwam, zich in twee stukjes verdeelde, die bij de mitose aan de top van de spoel gingen liggen, als echte centrosomen. Sedert zijn deze centrosomen werkelijk bij veel andere levermossen teruggevonden, terwijl zij volgens sommigen bij de deelingen in de antheridiën van Pellia schijnen te ontbreken.

In het diasterstadium verdween het centrosoom, om bij een volgende deeling weer opnieuw uit de kern te gaan. Alleen bij de laatste deeling van de antheridiëncellen bleef het in het cytoplasma liggen en werd tot ciliëndrager of blepharoplast. Vandaar, dat Ikeno de blepharoplast der levermossen als homoloog met het centrosoom beschouwt. Hier zijn later veel beschouwingen, voor en tegen, over gepubliceerd, waar wij verder niet op in willen gaan. Zonder een uitvoerige literatuurbespreking zou dit niet goed mogelijk zijn.

Onze vondsten bij Polytrichum stemmen nu gedeeltelijk met het door Ikeno e. a. gepubliceerde overeen, ten deele wijken zij er ook weer van af.

I. *Over den groei van de antheridiëncellen en de spermatogenesis.*

In de antheridiën liggen de cellen dicht aaneen. De kernen zijn zuiver rond en hebben in het centrum een met ijzerhaematoxyline sterk kleurbare massa. Wij willen in het midden laten of dit een nucleolus is of niet. Er bestaat in de literatuur geen overeenstemming over dit punt en de eene onderzoeker noemt dit, de andere weer iets geheel anders een nucleolus. Het is echter in de botanische literatuur gebruikelijk een dergelijk lichaam een nucleolus te noemen, ofschoon het ook de andere chromatinekleurstoffen sterk opneemt. Hoe dit dan ook zij, deze donkere massa ligt midden in de kern en iets meer naar de peri-pherie ligt dan nog een vrij groote zwarte korrel.

Wanneer men nu kernen in verschillende stadiën van rust en mitose onderzoekt, dan ziet men in de cellen, welke het verst van de eerstvolgende deeling af zijn, alleen de centrale zwarte massa liggen. Iets later komt de korrel te voorschijn, dan nog door een dunnen zwarten draad met de centrale massa verbonden. Spoedig verdwijnt deze verbinding en nadert de korrel al meer en meer de kernmembraan. Na eenigen tijd komt hij uit de kern en blijft hier tegen de kernmembraan in het cytoplasma van de cell liggen. De eerst ronde korrel wordt nu staafvormig, daarna in het midden inge-

snoerd, dus haltervormig en deelt zich vervolgens in twee bolletjes, die langs de kernmembraan voortschuiven en hoe langer hoe verder van elkaar komen te liggen. In dit stadium ziet men dan om ieder bolletje een lichten hof liggen, die vooral sterk is wanneer de korrels zich van de kern verwijderen.

Bij de kerndeeling vindt men dan, dat deze twee korrels aan den top van de spoel liggen en zoo dus wel centrosomen genoemd mogen worden. Er liggen, vooral in deelende cellen, veel zwarte korrels in het cytoplasma. Dit maakt het onderzoek altijd moeilijker, maar eerstens zijn de twee centrosomen grooter, dan de andere korrels, en ten tweede zijn ze door een hof omgeven. Bij dierlijke cellen zou men er niet aan twijfelen of dit centrosomen waren of niet, bij plantaardige objecten is eenige reserve steeds nog zeer gewenscht. Wij aarzelen echter niet deze lichaampjes centrosomen te noemen. Natuurlijk zijn ze niet bij alle kerndeelingen goed gekleurd. Ieder, die naar centrosomen in dierlijke weefsels heeft gezocht, weet wel, dat zelfs in objecten, die er voor beroemd zijn geworden, een kleuring van deze lichaampjes moeilijkheden oplevert. De centrosomen bij Polytrichum zijn dus van chromatische afkomst. Zij ontstaan uit de kern en deelen zich in het cytoplasma van de cel in tweeën.

Ikeno beschrijft nu, dat deze lichaampjes in het diasterstadium verdwijnen. Bij Polytrichum is dit niet zoo. Zij blijven niet op hun plaats, maar men vindt ze in verschillende cellen meer en meer naar den anderen kant van de chromosomen toe verschoven, zoodat ze op 't laatst tegenover elkaar tusschen de spoeldraden in liggen, welke de beide chromosomenmassa's verbinden. Wanneer de dochterkernen zich pas gevormd hebben en de chromosomen dus nog min of meer duidelijk te zien zijn, dan ligt het korreltje hier tusschen en alles wordt dáarna weer tot één zwarte massa. Ook bij de laatste deeling der antheridiëncellen wordt dit centrosoom in de kern opgenomen en hier ontmoeten wij dus nog een afwijking van hetgeen bij levermossen gevonden werd.

Hierna beginnen dan de veranderingen, welke eindelijk tot de vorming der spermatozoïden leiden.

Het is ons niet gelukt jonge sporocarpiën te vinden met veel sporenmoedercellen in deeling; wel vonden wij in jonge sporocarpiën in de vegetatieve cellen talrijke kerndeelingen en zoo was het niet moeilijk uit te maken hoe groot het aantal chromosomen is. De chromosomen zijn wel klein, maar zeer scherp afgegrensd en speciaal in het aequatoriaal vlak goed te herkennen. Wij vonden, dat de cellen van het sporocarpium 12 chromosomen bezitten.

Het was nu, naar analogie met wat van levermossen en vaat-

cryptogamen bekend was, vanzelf sprekend om aan te nemen, dat bij de vorming van de sporen een reductie der chromosomen plaats had en het aantal er van in de generatieve plant dus 6 zou zijn.

Inderdaad vonden wij steeds 6 chromosomen in de cellen van de antheridiën en eveneens in die van vrouwelijke planten.

Wanneer de antheridiën aan het einde van hun ontwikkeling gekomen zijn, krijgen de chromosomen een ander uiterlijk. Eerst zijn ze naar verhouding tot hun lengte vrij dikke staafjes. Maar bij op één na de laatste deeling blijven zij wel even lang, maar worden veel dunner en zijn niet zoo mooi glad meer. Er zijn dan nog altijd duidelijk 6 chromosomen. Doch bij de laatste deeling, dus vlak voor de eigenlijke spermatozoïdenvorming begint, gaan van deze 6 chromosomen er 3 naar de eene en 3 naar de andere pool. De kernen der spermatozoïden bevatten dus niet 6, maar 3 chromosomen, dus een vierde van het aantal chromosomen van de kernen der vegetatieve generatie.

De cellen, waarin de reductiedeeling heeft plaats gehad, en die dus tot een spermatozoid zullen uitgroeien, zijn te herkennen, doordat daarbij de celwand bijna niet te zien is en zij zich beginnen af te ronden. De kern heeft weer een centrale chromatinemassa, welke echter duidelijk kleiner is, dan in de jongere cellen.

Deze massa nu scheidt weder op de gewone manier een chromatinekorrel af, welke naar de peripherie gaat en dan buiten de kern treedt. Dit lichaampje ontstaat dus op dezelfde manier als de centrosomen in de deelende cellen. Het deelt zich nu echter niet in tweeën, doch gaat dadelijk naar de peripherie van de cel toe. Onderwijl splijt de chromatinemassa in de kern weer een stuk af, dat ditmaal zoo groot is, dat het soms bijna geheel gelijk is aan het overblijvende gedeelte. Dit lichaam blijft eerst nog in verbinding met de rest van de chromatine, maar daarna laten beide stukken van elkaar los en ten slotte treedt ook dit deel chromatine uit de kern.

Ikeno beschrijft bij de veranderde spermatiden van Marchantia ook het voorkomen van een chromatine lichaam naast de kern, wanneer het centrosoom reeds geheel aan de peripherie is gekomen. Waar het vandaan komt, weet hij echter niet, evenmin wat er verder mee gebeurt; hij zegt alleen, dat het orgaan later weer verdwijnt en noemt het „chromatoïde Nebenkörper", welken naam wij behouden kunnen.

Buiten de kern gekomen verandert het bij Polytrichum van vorm en rekt zich eerst uit tot een gebogen staafje. Dit staafje groeit verder, tot het eindelijk een gesloten cirkelvormig lichaampje wordt. Daarna wordt het echter weer onduidelijk en in volgende stadia is

't slechts als 'n gestippeld kringetje te zien en het verdwijnt ten slotte geheel. Over de beteekenis van dit lichaam hebben wij niets kunnen vinden.

Onderwijl is het centrosoom ook van vorm veranderd. Het is iets langer geworden en ongeveer knotsvormig. Aan het stompe eind wordt dan een fijne band zichtbaar, die langs de peripherie van de cel gaat en zich van het centrosoom uit differentieert in de richting van de kern. Deze is ook naar de peripherie gegaan, aan de tegenovergestelde zijde als het centrosoom.

Een dergelijke band, die zich tusschen de blepharoplast en de celkern uitstrekt, wordt ook door IKENO beschreven. Hij ontstaat volgens hem uit het cytoplasma en kleurt zich op dezelfde manier, hoewel sterker.

In onze praeparaten met ijzerhaematoxyline gekleurd is hij zeer duidelijk en scherp zwart te zien, doch een onderscheid in kleuring met de chromatine is toch ook waar te nemen.

Terwijl nu deze band langzamerhand uitgroeit en de „chromatoïde Nebenkörper" verdwijnt, wordt door de chromatinemassa in de kern ten derden male 'n hoeveelheid chromatine afgescheiden. Deze keer ontstaat er echter slechts een zeer klein lichaampje, dat ook weer buiten de kern treedt, doch meestal vlak bij de kernmembraan (die trouwens zeer onduidelijk te zien is) liggen blijft.

In een iets verder gevorderd stadium vindt men, dat de band langs den halven celomtrek is voortgegroeid en dus in de nabijheid van de kern gekomen is. Het 3e chromatinelichaampje vindt men dan aan het einde van den band liggen en tegen de kern aan, zoodat het in het spermatozoïd tusschen band en veranderde kern inligt.

De veranderingen, welke de kern zelf ondergaat bij de vorming van het spermatozoïd hebben STRASBURGER e.a. reeds uitvoerig beschreven en het lijkt ons daarom onnoodig deze zaken verder te onderzoeken.

## II. *Ontwikkeling der Eicel en Bevruchting.*

In de jonge archegoniën is de moedercel van de eicel bijzonder groot. Gedurende de verdere ontwikkeling van het archegonium deelt deze cel zich in tweeën en geeft dus aanleiding tot het ontstaan van een eicel en een buikkanaalcel. Een verschil met veel andere mossen bestaat echter hierin, dat bij de onderzochte Polytrichumsoorten deze beide cellen volkomen gelijk in grootte zijn. Deze twee cellen ronden zich nu af en liggen dan los in de holte van het archegonium. Deze wordt grooter en de afgeronde cellen gaan uit elkaar, totdat

de eene aan de basis er van ligt en de andere dicht bij de eerste halskanaalcel. Ondertusschen degenereeren deze laatste, d.w.z. haar wanden verdwijnen en zij ronden zich eenigszins af, zoodat zij weldra los in den hals liggen.

De top van den hals opent zich nu en de halskanaalcellen bewegen zich door deze opening naar buiten toe. Dit was aan levende objecten met volwassen archegoniën te zien. Werden deze in water gelegd, zoo opende zich de hals weldra en de cellen kwamen er een voor een uit te voorschijn.

In het stadium, wanneer de halscellen losgelaten hebben en de hals zelve open zal gaan, vindt men bij gefixeerde objecten, dat een groot aantal der halscellen in de archegoniumholte gekomen is. Zij liggen dan los om de eicel en buikkanaalcel heen.

De buikkanaalcel gaat nu naar de eicel toe en legt er zich tegen aan. Er is dan geen afscheiding tusschen het cytoplasma van beide cellen te zien. De beide kernen leggen zich tegen elkaar aan en versmelten langzamerhand. Dit werd door ons verscheidene malen en in alle opeenvolgende stadiën waargenomen. De rest van de buikkanaalcel schrompelt in en wordt evenals de halskanaalcellen uitgestooten.

Ten slotte ligt de eicel alleen in de holte met een normale, groote, ronde kern.

Een verslijming van de halskanaalcellen, zooals o. a. GAYET [1]) die beschrijft, vindt niet plaats. Wel is later slijm in den hals te vinden, die tot aantrekking van de spermatozoiden kan dienen, maar deze wordt waarschijnlijk door de halscellen zelve afgescheiden.

Het was nu zeer belangrijk te weten hoe groot het aantal chromosomen in de eicelkern was. Helaas zijn kerndeelingen, zooals reeds meer opgemerkt is, zeer weinig talrijk in mossenweefsels te vinden (behalve in de antheridiën) en zoodoende waren de meeste eicellen in het stadium voor of na de kerndeeling. In de andere deelende cellen van het archegonium waren steeds zes chromosomen en in een kern in het stadium vlak voor de mitose van een jonge cel, die na deeling de eicel zou vormen, waren 6 stukken chromatine waar te nemen. Gelukkig vonden wij één zeer goed stadium van mitose. Hier was een groote spoel, evenwijdig met de lengterichting van het achegonium, waaruit bleek, dat hier de deeling van de eimoedercel getroffen was. Er waren 6 chromosomen, maar hoewel ze elkander paarsgewijze nog met een kant raakten, was het andere uiteinde al naar den top van de spoel gericht en was 't hier zeer waarschijnlijk, dat van deze zes chromosomen er 3 naar de eene pool en 3 naar

---

[1]) L. GAYET. Ann. des Sc. nat. Bot. série 8, T. III, 1897.

de andere gingen. Ook door het vinden van een kernversmelting is wel te veronderstellen dat het aantal chromosomen weer verdubbeld was in de eicel, die in de nu met de omgeving in verbinding staande buikholte de bevruchting afwachtte.

Uit deze beide vondsten lijkt het ons niet te bout te concludeeren, dat de eicellen voor de bevruchting zes chromosomen bevatten.

Wij moesten dan trachten te vinden, op welke wijze er na de bevruchting weer 12 chromosomen zouden komen. Er waren 6 chromosomen in de eicel, 3 in het spermatozoïd. Was dus de copulatie zoo als gewoonlijk, dan waren er nog pas 9 chromosomen, terwijl er in de sporocarpien 12 moesten zijn.

Wij fixeerden en sneden daarvoor eenige honderden vrouwelijke Polytrichum. Het was natuurlijk vrij toevallig, wanneer zoo'n plantje juist een bevrucht archegonium zou bevatten en op het goede tijdstip gefixeerd was. Maar in een aantal vonden wij de gewenschte stadia en zoo bezitten wij nu een keurige rij van praeparaten van de bevruchting in geregelde volgorde van het indringen en veranderen der spermatozoïden.

Het aantal spermatozoiden, dat in de holte van het archegonium binnenkomt, is soms bizonder groot, doch nadat er in de eicel binnengedrongen zijn, liggen ze niet meer vlak om de eicel heen, maar meer naar den hals toe, zoodat hier waarschijnlijk ook weer een afstootende kracht van de bevruchte eicel uitgaat.

Het jongste stadium, dat wij nu bezitten en dat eenige keeren waargenomen werd, vertoont dicht bij den omtrek, maar zonder twijfel in het cytoplasma van de eicel gelegen, twee spermatozoiden: lengte, vorm, alles komt daarmee overeen.

In een verder stadium zijn zij beide tegen de kern aangelegen; zij zijn dikker geworden en verkort. Deze verdikking en verkorting gaat nog verder tot er twee lichamen tegen de eicelkern aanliggen, die langwerpig zijn en met enkele donkere korrels in het binnenste ervan.

Ook van het volgende stadium vonden wij een paar voorbeelden, en wel een eicel met duidelijk 3 kernen, elk met een dikke chromatine massa, en dan een eicel, waarbij de afscheiding tusschen de 3 kernen niet zoo duidelijk meer was; de omtrek was echter nog ingesneden en er liggen nu drie donkere chromatine stukken in het binnenste van de kern. Wij vinden dus, dat de sporocarpiumcellen 12 chromosomen bevatten, die van de generatieve planten 6 en dat de spermatozoiden er 3 hebben. De eicel heeft na de versmelting met de buikkanaalcel weer 6 chromosomen en door de copulatie met twee spermatozoiden krijgen wij weer 12 chromosomen.

**Zoölogie.** — De Heer VOSMAER biedt eene mededeeling aan van de Heeren J. BOEKE en G. J. DE GROOT over: „*Physiologische regeneratie van neurofibrillaire eindnetten*".

(Mede aangeboden door den Heer C. A. PEKELHARING).

Reeds meermalen is er door verschillende onderzoekers (o. a. door LENHOSSEK) op gewezen, dat waar men intraepitheliale zenuwen in slijmvlies of epidermis tot de bovenste lagen van het plaveiselepithelium ziet doordringen (zoo bijv. bij de intergemmale zenuwvezelen om de smaakbekers der zoogdieren, de zenuwen van de cornea enz.), zoodat zij zelfs tusschen de oppervlakkige cellen van het epithelium te zien zijn, men tegelijkertijd met het te gronde gaan dier bovenste cellagen, een voortdurenden groei van de einden dier zenuwvezels met hunne eindknopjes moet aannemen. Dat zijn dan echter altijd de fijne, in kleine knopjes (eindlissen der neurofibrillen) uitloopende eindtakken van de zich tusschen de dieper gelegen cellen van het epithelium vertakkende zenuwen. Werkelijke eindnetten, zooals die welke om de basis der MERKEL'sche tastcellen gevormd worden, vindt men steeds in de diepere lagen van het epithelium, waar zij tusschen de overige cellen beschut liggen. Die tastcellen vertoonen dan nergens zulk een snel verval als de cellen in de bovenste lagen van het epithelium, en worden niet door andere, uit de diepte komende, cellen vervangen. Een snelle regeneratie der zenuweindnetten (en tastcellen) is daar niet noodig.

Gesteld nu, dat er in de bovenste lagen van een aan de oppervlakte snel te gronde gaand epitheel (verhoornd, afschilferend) werkelijke tastcellen met duidelijke zenuweindnetten voorkomen, die dus mede aan snel verval onderhevig zijn, hoe zou daar dan de regeneratie der neurofibrillen geschieden?

Een gunstig object om deze vraag te beantwoorden, vonden wij ter gelegenheid van een onderzoek, in het histologisch laboratorium te Leiden verricht; en waarover wij elders hopen te berichten, in de sensibele eindorganen in de snuit van den mol (Talpa europaea).

Men vindt daar een uiterst gevoelig orgaan (het EIMER'sche orgaan) waarvan de elementen slechts door een zeer dunne hoornlaag aan de oppervlakte beschut worden, en dat door zijne ligging aan den top van den snuit in verband met de bekende levenswijze van het dier voortdurend nieuwe elementen aan die snel afschilferende hoornlaag moet kunnen leveren, om te beletten, dat de nog functioneerende cellen, van de beschuttende hoornlaag beroofd, aan de oppervlakte komen.

De bouw van dit door EIMER het eerst (in 1870) beschreven ge-

voelsorgaan en de zenuwverzorging er van zijn in den allerlaatsten tijd door twee onderzoekers [1]) met behulp van de nieuwere kleuringsmethoden voor het zenuwweefsel onderzocht. Beiden komen tot ongeveer gelijkluidende uitkomsten, hoewel andere opvattingen.

Zooals bekend is, bestaan de EIMER'sche tastorganen uit zandlopervormige epitheelzuiltjes, in de dikte van de epidermis liggende, die kleine ronde verhevenheden aan de oppervlakte van den snuit teweegbrengen, en die, daar het zuiltje iets langer is dan de gemiddelde dikte van de epidermis daar ter plaatse, ook naar de zijde van het corium een doorgaans als „buffer"vormig beschreven uitpuiling van de basaalmembraan van het epithelium veroorzaken. Elk zulk een zuiltje bestaat uit laagsgewijze op elkaar gestapelde epitheelcellen, die aan de benedenzijde niet de geheele breedte van het zuiltje innemen en wigvormig in elkaar grijpen, en meer naar boven toe platter en grooter worden, totdat eindelijk slechts twee cellen naast elkaar liggend de bovenste laag van het zuiltje, waar het aan de hoornlaag grenst, vormen (fig. 1, 5). De cellen, die het zuiltje vormen, zijn, zooals door BOTEZAT wordt vermeld, stekelcellen (fig. 3) zooals ook de overige cellen van het stratum spinosum.

In de as van het zuiltje stijgt een dikke zenuwvezel, de asvezel, tot boven in het zuiltje tusschen de cellen omhoog. Somtijds zijn er twee of drie asvezels naast elkaar. Langs den rand van het zuiltje stijgen 18 à 19 dunne zenuwvezels eveneens tusschen de cellen, hier van het zuiltje aan de eene en de omgrenzende epidermiscellen aan de andere zijde, tot boven in het zuiltje omhoog. Deze worden als randvezels van den asvezel onderscheiden.

Aan de basis vindt men naast de zuiltjes enkele MERKEL'sche tastcellen en onder de zuiltjes in het corium 1 of 2 kleine PACINI'sche lichaampjes.

Reeds door EIMER werden zoowel aan den asvezel als aan de randvezelen in het bovenste gedeelte van de epitheelzuiltjes kleine puntvormige varicositeiten beschreven. De zenuwvezels zelf verloopen zigzagvormig. EIMER zelf en na hem vooral HUSS (1898) meenden dat deze knopjes of puntjes *in* de cellen gelegen waren, terwijl de zenuwvezelen zelf tusschen de cellen loopen. De knopjes zijn dus lateraal aan de zenuwvezels bevestigd.

In dit jaar (1907) onderzocht BIELSCHOWSKY [2]) door middel van de door hem uitgewerkte kleuringsmethode deze zenuwen, en hoewel

---

[1]) Zie blz. 321 seq.

[2]) M. BIELSCHOWSKY, Ueber sensibele Nervenendigungen in der Haut zweier Insectivoren (Talpa europaea und Centetes ecaudatus). Anat. Anzeiger. Bd. 31, p. 187—194, 1907.

hij nu, zooals hij trouwens reeds zelf opmerkt, niet zoo heel veel nieuws beschrijft, is zijn artikel toch belangrijk, daar hij met BOTEZAT de eenige onderzoeker is, die de nieuwere methoden van onderzoek hier in toepassing bracht. Waar hij de eigenschappen der zenuwen van het orgaan van EIMER bespreekt, kunnen wij eenvoudigheidshalve zijne woorden hier overnemen, daar zijne opvatting er duidelijk uit blijkt. Hij beschouwt zoowel den asvezel als de randvezels als geheel intercellulair: „irgend ein näherer Konnex der Fasern zu den Epithelzellen findet nicht statt; ihr Verlauf ist ein rein intercellulärer. Im Bereiche der äusseren Schicht weisen sie in scheinbar regelmässigen Abständen die bekannten punktförmigen Varikositäten auf. . . . . . . Die Varikositäten sind offenbar nur auf Zerfallsvorgänge zurückzuführen. Dafür spricht der Umstand, dass sie immer erst in der Verhornungszône des Epithels deutlich hervortreten. Aehnliche Beobachtungen kann man auch am Schweinerüssel and anderen rüsselformigen Säugerschnauzen machen". (l.c. pag. 189).

BOTEZAT, die in zijne verhandeling in 1903 [1]) evenals EIMER en HUSS aannam, dat de knopjes aan de zenuwvezelen in de cellen van het Eimer'sche orgaan binnendrongen, meent in zijn laatste publicatie, in 1907 eenige maanden vóór de publicatie van BIELSCHOWSKY verschenen [2]), steunend op preparaten met methyleenblauw en volgens de methode van RAMON Y CAJAL gekleurd, dat zij epicellulair liggen. „Der Beweis hierfür lässt sich am besten dadurch erbringen, dass man die Terminalknöpfchen fast genau zwischen den Zellen des Organs liegen sieht." De knopjes zelf bezitten volgens hem een netvormige structuur. Daar zij zoo klein zijn, moet de groote gevoeligheid van den snuit meer worden toegeschreven aan het groote aantal dezer terminaalknopjes dan aan hun groot percipieerend vermogen. Het zuiltje van een Eimer's orgaan bestaat nl. uit ongeveer 15 cellagen, en in elke laag komen ongeveer 20 dezer knopjes voor. Het geheele aantal bedraagt dus volgens BOTEZAT vóór één Eimer'sch orgaan 300, voor den geheelen snuit meer dan 100000. Hoewel hij er dus geen groot percipieerend vermogen aan toeschrijft, beschouwt BOTEZAT toch alle varicositeiten van de rand- en asvezels als tastschijfjes, in overeenstemming met de meeste schrijvers. Van een verschil in bouw van de verschillende „tastschijfjes" spreekt hij slechts terloops.

De feiten schijnen ons echter eene andere verklaring toe te laten.

---

[1]) EUGEN BOTEZAT. Ueber die epidermoidalen Tastapparate in der Schnauze des Maulwurfs etc. Archiv für Mikroskopische Anatomie. Bd. 61. p. 730—764. 1903.

[2]) EUGEN BOTEZAT. Die fibrilläre Struktur von Nervenendapparaten in Hautgebilden. Anat. Anzeiger. Bd. 30. p. 321—344. 1907.

De opvatting van BIELSCHOWSKY is ten eenen male onjuist. In de eerste plaats treden de knopjes niet eerst in de verhoorningszone duidelijk op. Zoodra de cellen verhoornen, degenereeren juist de knopjes. In de tweede plaats zijn de knopjes veel te regelmatig en komen zij altijd in nagenoeg hetzelfde aantal voor. Ook de structuur duidt allerminst op „Zerfallsvorgänge."

Doch ook op de beschrijving van BOTEZAT is wel wat af te dingen. Behandelt men kleine stukjes van den snuit volgens de methode BIELSCHOWSKY—POLLACK, en bestudeert men nauwkeurig gedifferentieerde preparaten op dunne (6 $\mu$) doorsneden dan ziet men bij lengte-doorsneden het volgende:

De bouw der knopjes (Terminalknöpfchen, Varicositäten) is niet over den geheelen loop van de zenuwvezels dezelfde. Vervolgt men een randvezel van de basis van het zuiltje tot aan den top, dan blijken de eerste knopjes eerst 10—12 celrijen onder den top voor te komen (zie fig. 1, 5). Het zijn dan nog losmazige, geheel en al in het verloop van den zenuw ingeschakelde netjes, eenvoudig een plaatselijk losser liggen van de neurofibrillen met (vermoedelijk) enkele anastomosen. Vervolgt men de zenuwvezel naar boven, dan ziet men dat volkomen regelmatig langs elke cel zich zulk een netje vertoont, en dat (fig. 1, 3) de netstructuur gaandeweg dichter wordt.

In de bovenste 4 tot 5 rijen ziet men nu, hoe langzamerhand het knopje, dat tot dusverre alleen een in het verloop van den zenuwvezel ingeschakeld netje was, terzijde van den zenuwvezel komt te liggen (fig. 1 en 3 bij a) en langzamerhand door een kort steeltje met den vezel zelf verbonden wordt. Hierbij wijkt het knopje van de randvezelen altijd aan de naar de as van het zuiltje toegekeerde zijde uit (fig. 1). Beziet men dus de randvezelen van de buitenzijde, zooals in fig. 5, dan ziet men van dit uitwijken weinig of niets, en kan men alleen door voorzichtig instellen met den micrometerschroef uitmaken, dat de knopjes werkelijk onder de vezelen komen te liggen.

Wij zien dus in de eerste plaats een volkomen regelmatige verandering van de knopjes of varicositeiten, naarmate men de oppervlakte van het epithelium nadert. Deze verandering is altijd met dezelfde regelmaat te constateeren, zoo men slechts rekening houdt met de ligging van den zenuwvezel, dien men onderzoekt, in het preparaat. In de tweede plaats is het volgende te zien. Terwijl de zenuwvezelen zelf tusschen de cellen verloopen, en de onderste knopjes, de in den loop van de vezelen ingeschakelde netjes, eveneens tusschen de cellen liggen, dringen nu de naar boven gelegen knopjes in het protoplasma der cellen zelf in. Zij worden dus intracellulair. Bij de zeer duidelijke celgrenzen en kernen in de vol-

gens de methode van BIELSCHOWSKY behandelde preparaten is dit feit, zoo men slechts dunne doorsneden bestudeert, met volkomen duidelijkheid vast te stellen. Fig. 1—3 geven hiervan een overtuigend beeld. Men ziet als het ware de netjes van terzijde in de cellen indringen. En ook beelden zooals fig. 4 er een voorstelt, aan eene dwarscoupe door een Eimersch orgaan ontleend, waar het zijdelings aan den zenuwvezel hangende eindknopje de kern van de cel als het ware indeukt, laat geen andere verklaring toe. Dergelijke beelden geeft ook HUSS. Een tweede vraag is evenwel, of de neurofibrillen *in* het protoplasma van de cellen zelf komen te liggen, een integreerend deel daarvan gaan uitmaken. Dit schijnt ons toe niet het geval te zijn. Men verkrijgt den indruk, dat de knopjes of schijfjes, ook daar waar zij in de cellen gelegen zijn, nog altijd door een dunne laag perifibrillaire substantie omgeven zijn, die dan echter aan de buitenzijde toch met het omgevende protoplasma moet samenhangen. Het uit neurofibrillen bestaande eindnetje blijft een afgesloten geheel vormen, doch een trophisch verband (door middel van de perifibrillaire stof) schijnt ons toe wel degelijk te bestaan. Eerst als de netvormige verbreedingen van de zenuwvezels in de cellen indringen, beginnen zij tot werkelijke eindnetjes, zijdelings aan den zenuwvezel verbonden, uit te groeien.

De randvezelen loopen langs den buitenrand van het celzuiltje, de randknopjes dringen binnenwaarts in de cellen in. Op dwarsdoorsneden liggen dus alle knopjes, zoodra zij zijdelings uitgroeien, naar het centrum van het celzuiltje gekeerd. In fig. 6 is dit zeer duidelijk te zien.

De knopjes in de bovenste, wellicht reeds verhoornde, cellaag liggen meestal reeds los in de cellen, de zenuwvezel zelf atrophieert. Zoo zijn de 4 in de bovenste cel gelegen knopjes van fig. 5 volkomen los van de zenuwvezels daaronder, en hetzelfde is te zien in fig. 1 en 3, waar nog een gedeelte van de zenuwvezel zich liet kleuren. Men zou kunnen meenen, dat het afwezig zijn van de verbinding van deze bovenste eindnetjes met de zenuwvezels er onder het gevolg is daarvan, dat de verbinding toevallig juist niet in de coupe getroffen was. In vele gevallen (en zoo ook in de preparaten, waarnaar fig. 1 en 3 geteekend zijn) kon men er zich evenwel met zekerheid van overtuigen, dat de verbinding werkelijk ontbreekt.

De asvezel vertoont dezelfde eigenaardigheden als de randvezelen, doch de eindnetjes zijn grooter en ronder; ook de asvezel loopt, tot boven in het orgaan tusschen de cellen; ook daar waar boven in het celzuiltje, nog slechts twee platte cellen naast elkaar éénе laag vormen, loopt de grenslijn dezer cellen juist midden door het zuiltje

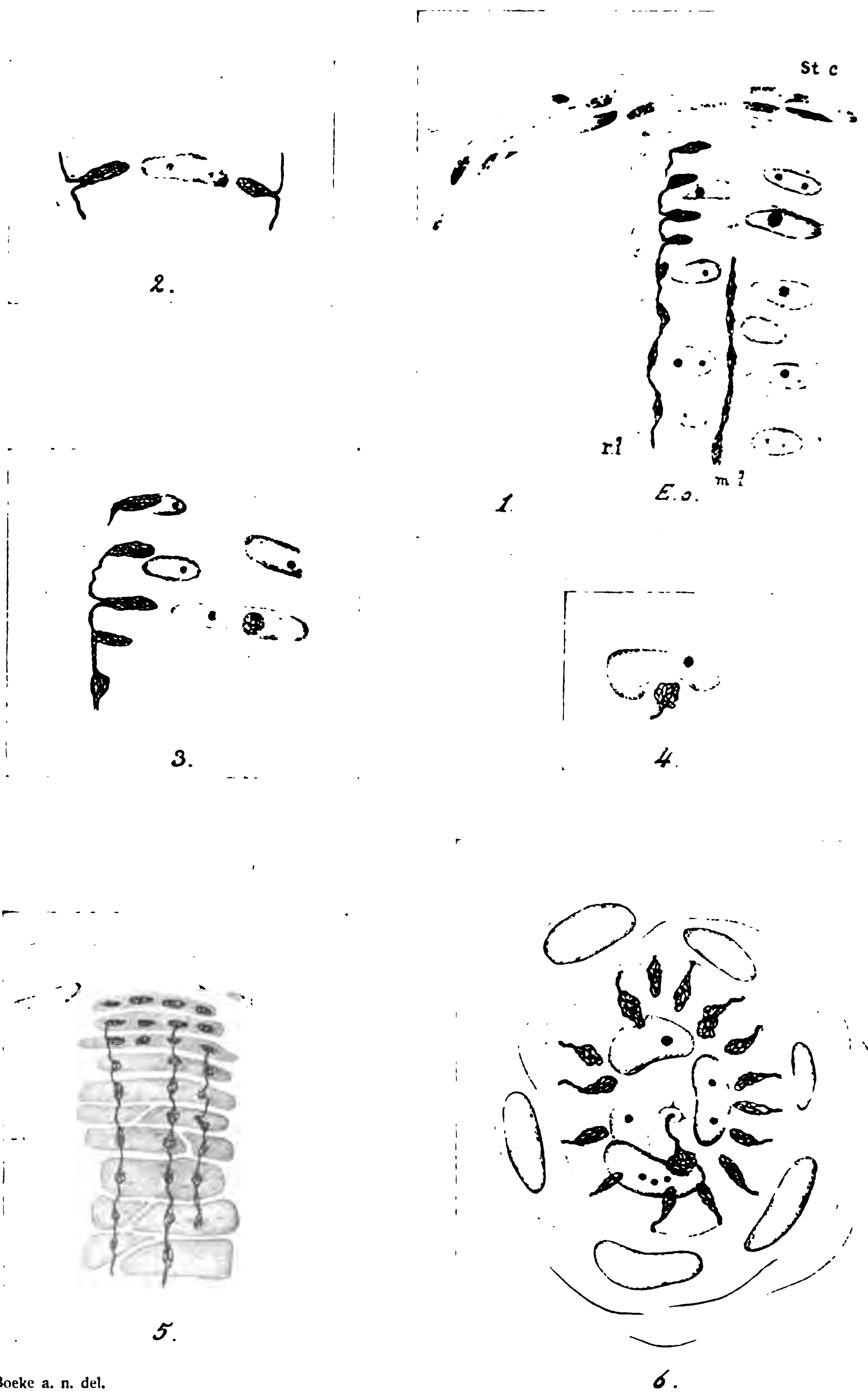
(men vergelijke de teekeningen van Huss), en laat in het centrum eene ruimte over, waardoor de asvezel loopt (fig. 6). De eindnetjes vormen zich nu eens aan deze, dan weer aan gene zijde van de asvezel, en dringen evenals dit bij de randvezels beschreven werd, in de cellen binnen.

In de derde plaats is, wat den algemeenen bouw van het orgaan betreft, steeds te constateeren, dat de hoornlaag boven de celzuiltjes veel dunner is, dan boven het overige epithelium van den snuit. Dat dit voor de functie als tastorgaan niet zonder belang is, behoeft geen betoog.

Wij vinden dus zoowel in de asvezels als in de randvezels eene verandering van de knopjes, die wij kunnen beschrijven als een naar de oppervlakte voortschrijdenden groei en differentiatie, zelfstandiger worden en *in* de cellen indringen van de knopjes. Dat is aan alle zenuwvezels van de Eimersche organen steeds duidelijk te zien. Daarbij wijst de dunne hoornlaag op snel verval.

De vraag in den aanvang gesteld, schijnt ons derhalve, als wij dit alles samenvatten, aldus te moeten worden beantwoord:

Boven de Eimer'sche celzuiltjes is de hoornlaag dunner dan in de omgeving, schilfert snel af, moet snel door de dieper gelegen cellen worden hersteld. Er heeft dus een vrij snelle opschuiving van de cellen plaats, gepaard gaande met eene afplatting. Met deze cellen groeien de zenuwvezelen mede snel naar boven. Reeds ter halver hoogte van het celzuiltje beginnen de zenuwen eindknopjes (tastschijfjes) te vormen, dit proces bestaat eerst in een losser worden en netvormig met elkaar anastomoseeren van de neurofibrillen. Vermoedelijk bezitten deze gedeelten van de zenuwvezels nog geen verhoogd percipieerend vermogen. Zoodra echter deze plaatsen in het zenuwverloop tot werkelijke tastschijfjes worden, groeien zij terzijde uit, komen *in* de aangrenzende cel te liggen en worden met deze opgeschoven. Er onder worden dan telkens weer nieuwe tastschijfjes gevormd, zoodat men in een lengtedoorsnede van de zenuw alle stadien van ontwikkeling aantreft. Bij het platter worden van de cellen groeien deze als het ware om de tastschijfjes heen, of het tastschijfje dringt er dieper in door, zoodat in elk geval de langs de cel loopende zenuw als het ware ingebocht wordt, en het tastschijfje een opstijgenden en afdalenden zenuwtak vertoont (fig. 1, 2, 3). Zoodra de cellen gaan verhoornen, atrophieeren de zenuwvezelen en ten slotte ook de eindknopjes of tastschijfjes. Alleen de bovenste rijen tastschijfjes, *naast* de zenuwvezels gelegen, en nog met de zenuwvezels verbonden, onder de verhoorningszone, zijn ten volle ontwikkeld. Zij worden voortdurend door andere vervangen.




J. Boeke a. n. del.

Wellicht kan de hier ontwikkelde opvatting ook op andere intra-epitheliale zenuweindigingen worden toegepast. Een zoo duidelijk voorbeeld als de Eimer'sche organen zal evenwel bezwaarlijk te vinden zijn.

*Leiden*, Histolog. Afd. v. h. Anatom. Kabinet,
25 November 1907.

### VERKLARING DER FIGUREN OP DE PLAAT.

Alle figuren zijn naar praeparaten, volgens de methode BIELSCHOWSKY-POLLACK behandeld, met een teekenapparaat volgens ABBE geteekend. Bij fig. 1 en 5 is de vergrooting 1200, bij de overige figuren 1600 maal. Apochromaat-olie-immersie. Dikte der doorsneden 6 $\mu$.

Fig 1. Lengtedoorsnede door het bovenste deel van een EIMER'sch orgaan van den mol. Een randvezel (*rf*) en een gedeelte van een asvezel (*mf*) zijn getroffen. De hoornlaag (*stc*) is boven het EIMER'sch orgaan duidelijk dunner dan aan beide zijden er van.

Fig. 2. Lengtedoorsnede van een platte cel uit het bovenste deel van een EIMER'sch orgaan, met twee aan beide zijden in de cel binnendringende tastschijfjes van randvezelen. Ter demonstratie van de netstructuur en den samenhang van het netje met de „opstijgende en afdalende" neurofibrillen.

Fig. 3. Lengtedoorsnede van een gedeelte van den top van een EIMER'sch celzuiltje. Ontwikkeling van de tastschijfjes.

Fig. 4. Uit een dwarsdoorsnede door het bovenste deel van een EIMER'sch orgaan. De celkern door het tastschijfje ingebocht.

Fig. 5. Lengtedoorsnede door den rand van een EIMER'sch celzuiltje. Drie randvezels zijn getroffen. Het zijdelings uitgroeien van de tastschijfjes is hier niet te zien in de teekening, daar de schijfjes achter de zenuwvezelen in de cellen ingroeien. De intracellulaire ligging van de knopjes is duidelijk te zien. De bovenste cel, waarin de 4 zwart gekleurde tastschijfjes los liggen, is reeds bezig te verhoornen, en de zenuwelementen degenereeren.

Fig. 6. Dwarsdoorsnede door het bovenste gedeelte van een EIMER'sch orgaan. In de 6 $\mu$ dikke doorsnede waren 4 cellen te zien, die twee aan twee naast elkaar op hetzelfde niveau lagen. De tastschijfjes van de randvezelen dringen alle centripetaal in de cellen in, de asvezel loopt tusschen de cellen door.

**Wiskunde.** — De Heer W. KAPTEYN biedt eene mededeeling aan: *„Over een oneindig produkt, voorgesteld door een bepaalde integraal."*

In het volgende stel ik mij voor het oneindig produkt

$$\prod_{s=0}^{\infty}\left(1+\frac{v^2}{(u+s)^2}\right)$$

door een bepaalde integraal uit te drukken.

Daartoe ga ik uit van de bekende formule

$$mod.\quad \Gamma(u+iv)=\Gamma(u)\,.\,e^{-P(u,v)}\;(u>0)$$

waarin

$$P(u,v) = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{\infty} lg \left(1 + \frac{v^2}{(u+s)^2}\right) \quad ^{1)}$$

zoodat

$$mod.^2 \quad \Gamma(u + iv) = \frac{\Gamma^2(u)}{\prod_{s=0}^{\infty}\left(1 + \frac{v^2}{(u+s)^2}\right)}.$$

Het bedoelde produkt is dus $\frac{\Gamma^2(u)}{mod^2\ \Gamma(u+iv)}$. Nu is volgens WEIERSTRASS

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_W e^t\, t^{-z}\, dt$$

waarin de integraalweg $W$ van $-\infty$ uitgaat, onder de as der negatieve getallen doorloopt, den oorsprong in pos. richting omloopt en dan boven de as der negatieve getallen tot het uitgangspunt $-\infty$ terugkeert. We kunnen dus ook schrijven

$$\frac{2\pi i}{\Gamma(z)} = e^{\pi i z} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-z}\, dt - e^{-\pi i z} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-z}\, dt.$$

Stellen we hierin $z = u + iv$, dan is

$$\frac{2\pi i}{\Gamma(u+iv)} = e^{-\pi v}\Big(\cos(\pi u) + i \sin(\pi u)\Big) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-u} \Big(\cos(v lg\, t) - i \sin(v lg\, t)\Big) dt$$

$$-e^{\pi v}\Big(\cos(\pi u) - i \sin(\pi u)\Big) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-u} \Big(\cos(v lg\, t) - i \sin(v lg\, t)\Big) dt.$$

Zij nu

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{-u} \cos(v lg\, t)\, dt = M$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{-u} \sin(v lg\, t)\, dt = N$$

$$\frac{2\pi}{\Gamma(u+iv)} = \alpha + i\beta$$

dan is

$$\alpha = (e^{\pi v} + e^{-\pi v}) \sin(\pi u)\, M + (e^{\pi v} - e^{-\pi v}) \cos(\pi u)\, N$$
$$\beta = (e^{\pi v} - e^{-\pi v}) \cos(\pi u)\, M - (e^{\pi v} + e^{-\pi v}) \sin(\pi u)\, N$$

en verder

$$\alpha^2 + \beta^2 = (e^{2\pi v} - 2 \cos 2\pi u + e^{-2\pi v}) (M^2 + N^2).$$

Nu is

---

[1]) Zie Nielsen. Handbuch der Theorie der Gammafunctionen p. 23.

$$M^2 = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{-u} \cos(vlg\, x)\, dx \;.\; \int_0^\infty e^{-y}\, y^{-u} \cos(vlg\, y)\, dy$$

$$N^2 = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{-u} \sin(vlg\, x)\, dx \;.\; \int_0^\infty e^{-y}\, y^{-u} \sin(vlg\, y)\, dy$$

derhalve

$$M^2 + N^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)} (xy)^{-u} \cos\left(vlg \frac{y}{x}\right) dxdy$$

of als men schrijft $x = r \cos\theta,\ y = r \sin\theta$

$$M^2 + N^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r(\cos\theta + \sin\theta)} (r^2 \sin\theta \cos\theta)^{-u} \cos(vlg\, tg\, \theta)\, rdrd\theta\, .$$

Deze dubbele integraal kunnen we nu tot een enkele herleiden, want

$$\int_0^\infty e^{-r(\cos\theta + \sin\theta)}\, r^{-2u+1}\, dr = \frac{\Gamma(2-2u)}{(\cos\theta + \sin\theta)^{2-2u}} \quad (u < 1)$$

zoodat

$$M^2 + N^2 = \Gamma(2-2u) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(vlg\, tg\, \theta) \frac{(\sin\theta \cos\theta)^{-u}}{(\cos\theta + \sin\theta)^{2-2u}}\, d\theta$$

of

$$M^2 + N^2 = 2\,\Gamma(2-2u) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(vlg\, tg\, \theta) \frac{(\sin\theta \cos\theta)^{-u}}{(\cos\theta + \sin\theta)^{2-2u}}\, d\theta\, .$$

Stellen we hierin nog

$$tg\, \theta = e^{-2t}$$

dan komt

$$M^2 + N^2 = 4\ \Gamma(2-2u) \int_0^\infty \frac{\cos(2vt)\, dt}{(e^t + e^{-t})^{2-2u}}$$

en hiermede

$$\frac{4\pi}{mod^2\, \Gamma(u+iv)} = 4\ \Gamma(2-2u)\, (e^{2\pi v} - 2\cos 2\,\pi u + e^{-2\pi v}) \int_0^\infty \frac{\cos(2vt)\, dt}{(e^t + e^{-t})^{2-2u}}$$

Met de vroeger genoemde waarde van $mod^2\, \Gamma(u+iv)$ volgt hieruit

$$\prod_{s=0}^{\infty} \left(1 + \frac{v^2}{(u+s)^2}\right) = \frac{\Gamma^2(u)\,\Gamma(2-2u)}{\pi^2} (e^{2\pi v} - 2\cos 2\pi u + e^{-2\pi v}) \int_0^\infty \frac{\cos(2vt)dt}{(e^t + e^{-t})^{2-2u}}$$

welke formule geldt voor alle waarden van $v$, en voor $0 < u < 1$.

Stelt men bijvoorbeeld $v = \frac{z}{2\pi}$, $u = \frac{1}{4}$ en $u = \frac{3}{4}$, dan vindt men hieruit

$$\left(1 + \frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4z^2}{81\pi^2}\right)\ldots =$$

$$= \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi^2}(e^z + e^{-z})\int^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{zt}{\pi}\right)dt}{(e^t + e^{-t})^{\frac{3}{2}}}$$

en

$$\left(1 + \frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4z^2}{49\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4z^2}{121\pi^2}\right)\ldots =$$

$$= \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi^2}(e^z + e^{-z})\int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{zt}{\pi}\right)dt}{(e^t + e^{-t})^{\frac{1}{2}}}$$

Uit hel voorgaande volgt ook, als men stelt $u = 1 - u'$

$$\frac{1}{mod^2\, \Gamma(1 - u' + iv)} = \frac{\Gamma(2u')}{\pi^2}(e^{2\pi v} - 2\cos 2\pi u' + e^{-2\pi v})\int_0^{\infty} \frac{\cos(2vt)\,dt}{(e^t + e^{-t})^{2u'}}$$

of omdat

$$\Gamma(u' + iv)\,\Gamma(1 - u' + iv) = \frac{\pi}{\sin \pi(u' + iv)}$$

$$mod^2\, \Gamma(u' + iv) = 4\,\Gamma(2u')\int_0^{\infty} \frac{\cos(2vt)\,dt}{(e^t + e^{-t})^{2u'}}$$

welke formule, hoewel slechts bewezen voor $0 < u' < 1$, ook geldt voor $u' > 1$.

Vervangt men nu het eerste lid dezer vergelijking door hare waarde uitgedrukt in een oneindig produkt dan vindt men

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(2vt)\,dt}{e^t + e^{-t})^{2u'}} = \frac{\Gamma^2(u')}{4\,\Gamma(2u')} \frac{1}{\prod\limits_{s=0}^{\infty}\left(1 + \frac{v^2}{(u' + s)^2}\right)}$$

waarmede de integraal, in het eerste lid voorkomende kan berekend worden. Zoo is voor $u' = n =$ geheel getal

$$\prod_{s=0}^{\infty}\left(1 + \frac{v^2}{(n + s)^2}\right) = \prod_{s=n}^{\infty}\left(1 + \frac{v^2}{s^2}\right)$$

en daar

$$\frac{e^{\pi v}-e^{-\pi v}}{2\pi v}=\prod_{s=1}^{\infty}\left(1+\frac{v^2}{s^2}\right)$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(2vt)\,dt}{(e^t+e^{-t})^{2n}}=\frac{\pi v\;\Gamma^2(n)}{2\,\Gamma(2n)}\,\frac{\prod\limits_{s=1}^{n-1}\left(1+\frac{v^2}{s^2}\right)}{e^{\pi v}-e^{-\pi v}}$$

Ook voor $u'=n-\frac{1}{2}$ kan deze integraal in eindigen vorm worden geschreven. Immers dan is

$$\prod_{s=0}^{\infty}\left(1+\frac{v^2}{(n-\frac{1}{2}+s)^2}\right)=\prod_{s=n-1}^{\infty}\left(1+\frac{v^2}{(\frac{1}{2}+s)^2}\right)$$

en

$$\frac{e^{\pi v}+e^{-\pi v}}{2}=\prod_{s=0}^{\infty}\left(1+\frac{v^2}{(\frac{1}{2}+s)^2}\right)$$

dus

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(2\,vt)\,dt}{(e^t+e^{-t})^{2n-1}}=\frac{\Gamma^2(n-\frac{1}{2})}{2\,\Gamma(2n-1)}\cdot\frac{\prod\limits_{s=0}^{n-2}\left(1+\frac{v^2}{(\frac{1}{2}+s)^2}\right)}{e^{\pi v}+e^{-\pi v}}.$$

**Anatomie.** — De Heer PLACE biedt eene mededeeling aan van den Heer Dr. J. W. LANGELAAN, Hoogleeraar te Leiden: *„Over de ontwikkeling van het Corpus callosum in de hersenen van den mensch."*

(Mede aangeboden door den Heer BOLK).

De punten, welke op dit oogenblik van belang schijnen in het vraagstuk der ontwikkeling van den balk, zijn in den vorm van vragen duidelijk door RETZIUS geformuleerd. [1]) Twee dezer vragen luiden: 1. Waar ontstaat de balk; 2. Uit welke elementen bestaat hij bij eersten aanleg? De derde vraag van RETZIUS, is uitgebreid door ZUCKERKANDL [2]) en kan aldus gesteld worden: welke zijn de veranderingen, die in den medialen wand der hemispheer optreden onder invloed van de ontwikkeling van den balk?

Ter beantwoording der eerste vraag stond mij een embryo ten dienste uit het begin van de vierde maand. De fronto-occipitale diameter van den balk bedroeg slechts 0.5 m.M. Figuur I. stelt een

1) RETZIUS. Das Menschenhirn. Stockholm 1896. p. 6.

2) ZUCKERKANDL. Sitzb. K. Acad. der W. Math. Naturw. cl. Bd. CX. h. VIII. Wien 1901. p. 234.

frontale doorsnede voor, door het meer naar achter gelegen deel der lamina terminalis.

Aangezien het sneevlak eenigzins zijdelings afwijkt, ligt hetgeen rechts in de teekening is afgebeeld iets meer naar voren dan hetgeen links is geteekend. Zooals uit de afbeelding blijkt, ligt de balk in de lamina terminalis; vooral is dit links duidelijk waar wij den onderrand van het pallium zien overgaan in een taenia (*T*), welke omslaat in de lamina terminalis (*L.t.*). De voortzetting van het ependym der taenia in den zijrand van de lamina terminalis en ook nog ten deele naar onder van den balk, laat omtrent deze verhouding geen twijfel. Vervolgt men nu de doorsneden meer naar voren, dan blijkt het meest frontale deel van den balk niet meer binnen de lamina terminalis te liggen, doch in een weefselbrug ontstaan door vereeniging der mediale wanden van het pallium. Deze weefselbrug bestaat uit gliaweefsel en sluit zich onmiddellijk aan bij de glialaag, welke de lamina terminalis aan haar voorzijde begrenst.

Op grond dezer waarneming meen ik, dat de balk aanvankelijk in de lamina terminalis ligt, doch zeer spoedig door vergrooting, overwegend in frontale richting, de grenzen der lamina overschrijdt en dan ten deele in de vereenigingszone der mediale wanden van het pallium is gelegen.

Een ouder stadium, midden van de vierde maand, vertoont een balk welks grootste diameter 2.5 m.M. bedraagt. De balk ligt daarbij nog geheel naar voren van het foramen Monroi. Figuur II stelt een frontale doorsnede voor door het meer naar achter gelegen deel van het corpus callosum. In deze doorsnede ligt de balk (*C.c.*) het meest dorsaalwaarts, zijdelings overgaand in den medialen wand van het pallium. Lateraal daarvan en in den medialen wand niet scherp van den balk te scheiden, ligt de fornixbundel (*F.*). Deze bundel kan naar beneden vervolgd worden tot aan de commissura anterior (*C.a.*). In den hoek waar balk en fornixbundel samen komen, ligt een vezelbundel (*Ps.*), welke van achter af komt en nu, ventraalwaarts van den balk, kruist met eenzelfden bundel komend van de andere zijde. Deze kruizende bundel is de fornixcommissuur. Meer naar voren is deze fornixcommissuur niet meer aanwezig en vindt men slechts balk en fornix in de reeds beschreven verhouding.

Uit de liggingsverhouding van balk en fornixcommissuur ten opzichte van elkaar volgt nu, dat het meer naar achter gelegen deel van den balk beantwoordt aan het splenium, terwijl uit de verhouding van balk tot fornixbundel volgt, dat het meer naar voren gelegen deel van den balk met het genu corporis callosi overeenstemt. In den aanleg van den balk is dus als het ware de geheele

**Dr. J. W. LANGELAAN. „Over de ontwikkeling van het Corpus callosum in de hersenen van den mensch."**

Fig. 1.

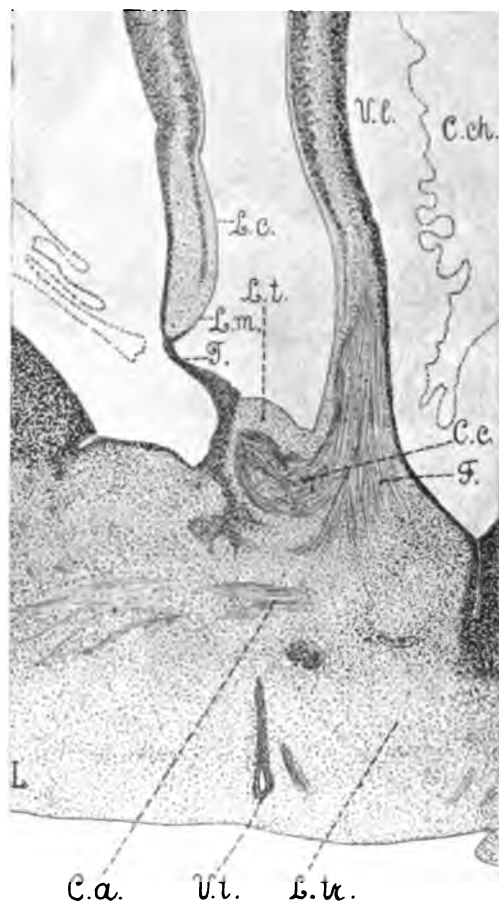
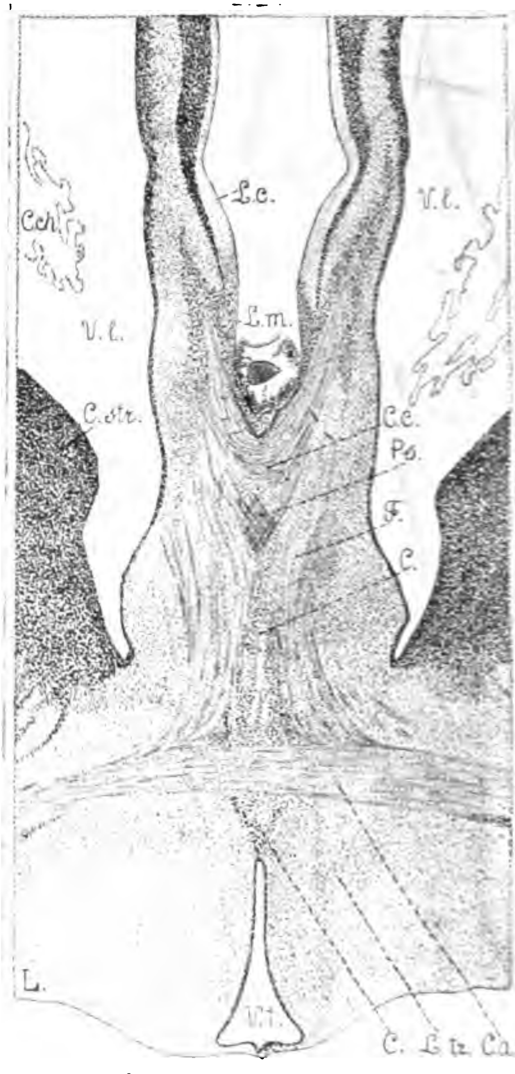



Fig. 2.



balk begrepen; de vergrooting van het corpus callosum geschiedt dus niet doordien telkens nieuwe vezelsystemen gevoegd worden tegen de reeds aanwezige, doch door gelijkmatige vergrooting in overeenstemming met de vergrooting van het pallium.

De meest op den voorgrond tredende verandering in den bouw van den medialen palliumwand, ter hoogte van den balkaanleg, bestaat hierin, dat de schorslaag iets naar binnen buigend scherp uitloopend eindigt. De tusschenlaag van den palliumwand wordt rijker aan kernen ter plaatse van den balkaanleg. Deze kernen omgeven den balk-fornixaanleg als met een hulsel en dringen langs den onderrand der schorslaag in de randzone binnen; ten gevolge hiervan verdwijnt deze laag als zelfstandig herkenbare zoom van den palliumwand.

In het vereenigingsgebied der mediale palliumwanden is deze verandering in den bouw van den wand aanzienlijker; van belang is hier de waarneming, dat de meest mediale bundels van den fornix door het gliaweefsel van het vereenigingsgebied treden, aangezien hieruit volgt, dat de gereconstrueerde mediale wand — het latere septum pellucidum — meer omvat dan de oorspronkelijke mediale wand van het pallium.

## VERKLARING DER FIGUREN.

### Fig. I.

Frontale doorsnede door het meer naar achter gelegen deel der lamina terminalis. Dikte van de coupe 20 $\mu$. haematoxyline-eosinekleuring. Vergrooting 16.5×.

*C.a.* Voorste commissuur.
*C.c.* Balk.
*C.ch.* Corpus chorioideum.
*F.* Fornixbundel.
*L.c.* Limbus corticalis.
*L.m.* Limbus medullaris.
*L.t.* Lamina terminalis.
*L.tr.* Lamina trapezoidea.
*T.* Taenia.
*V.l.* Zijventrikel.
*V.t.* Derde ventrikel.

### Fig. II.

Frontale doorsnede door het meer naar achter gelegen deel van den balk. Dikte van de coupe 15 $\mu$. haematoxyline-eosinekleuring. Vergrooting 13×.

*C.* Vergroeiingsgebied.
*C.a.* Voorste Commissuur.
*C.c.* Balk.
*C.ch.* Corpus chorioideum.
*C.str.* Corpus striatum.
*F.* Fornixbundel.
*L.c.* Limbus corticalis.
*L.m.* Limbus medullaris.
*L.tr.* Lamina trapezoidea.
*Ps.* Fornixcommmissuur
*V.l.* Zijventrikel.
*V.t.* Derde ventrikel.

**Natuurkunde.** — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer Dr. O. POSTMA: *„Beweging van molecuulsystemen waarop geen uitwendige krachten werken.”*

(Mede aangeboden door den Heer J. D. VAN DER WAALS).

§ 1. Tot nog toe zijn vooral twee wegen ingeslagen om aan te toonen, dat een aan zich zelf overgelaten gasmassa, waarop geen uitwendige krachten werken, door de botsingen der moleculen tenslotte in een toestand zal overgaan, waarbij zeer waarschijnlijk de moleculen ongeveer gelijkmatig over het vat verdeeld zijn en de Maxwellsche snelheidsverdeeling bezitten.

De eerste is de methode van BOLTZMANN, die aannemende dat de dichtheid overal in het vat reeds dezelfde is en verder er van uitgaande, dat er geen ordening van de moleculen ten opzichte van de snelheid bestaat, aantoont dat zekere grootheid $H = \int f \, . \, lf \, . \, d\omega$ door de botsingen voortdurend afneemt tot de stationaire toestand bereikt wordt, waarbij zooals blijkt de Maxwellsche snelheidsverdeeling bestaat.

De tweede is de methode voor de helft door BOLTZMANN en geheel door JEANS gevolgd, waarbij wordt aangetoond, dat de toestand met gelijkmatige dichtheid en die met de Maxwellsche snelheidsverdeeling bij bepaalde onderstellingen de waarschijnlijkste zijn. Deze onderstellingen zijn, wat de plaatsverdeeling betreft, dat er telkens voor elke molecule gelijke kans zou bestaan op elke plaats in het vat, wat de snelheidsverdeeling betreft, dat er telkens gelijke kans zou zijn dat het snelheidspunt van een molecule in elk willekeurig volume-elementje zou komen, waarbij tenslotte in rekening zou moeten worden gebracht, dat de totale energie een zekere bepaalde waarde heeft.

Schrijver dezes heeft getracht aan te toonen [1]), dat hierin iets tegenstrijdigs schuilt, dat vermeden zou kunnen worden door aan te nemen, dat de gasmassa willekeurig gekozen wordt uit een microcanonisch ensemble, waarvan alle systemen de energie bezitten, die de gasmassa moet hebben. Hierin toch zijn alle plaatscombinaties en alle snelheidscombinaties met dezelfde energie even talrijk en men heeft dus dezelfde kans ze voor het systeem, dat men er uit kiest, te treffen.

[1]) Verslagen der Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, Dl. XIV, p. 602 en Dl. XV, p. 498.

Men heeft dus ook een bewijs voor de bovengenoemde uitkomst, als men aantoont, dat een willekeurig ensemble van systemen met gelijke energie aan zichzelf overgelaten overgaat in een microcanonisch ensemble. GIBBS tracht dit aan te toonen in het XII$^{de}$ Hoofdstuk van zijn „Statistical Mechanics"; de redeneering wordt duidelijker gemaakt door LORENTZ [1]), hoewel deze niet verder gaat dan de aanname, dat men ten slotte een microcanonische verdeeling zou krijgen, zeer plausibel te noemen.

Nu is echter onlangs door POINCARÉ in een artikel [2]) op een eigenschap opmerkzaam gemaakt, in verband waarmee, naar mij voorkomt, bovenstaande redeneering niet meer kan worden volgehouden. POINCARÉ toont daar n.l. aan, dat de grootheid $S = \int P \log P dx_1 \ldots dx^n$ (waarin $x_1 \ldots x_n$ de veranderlijken voorstellen, waardoor ieder systeem van een zeker ensemble bepaald is, en $P = \frac{D}{N}$ de waarschijnlijkheidscoëfficient, terwijl over de geheele extensie, waarover zich het ensemble uitstrekt, geïntegreerd wordt) bij gelijkblijvende uitwendige omstandigheden constant is, als de betrekking $\Sigma \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$ bestaat (waarbij $X_i = \frac{dx_i}{dt}$). POINCARÉ denkt zich hierbij als veranderlijken de coordinaten en snelheidscomponenten der moleculen; de boven bedoelde grootheid verschilt dus alleen door een constanten factor van de door GIBBS ingevoerde grootheid $\eta$.

GIBBS toont aan, dat $-\bar{\eta}$ bij een canonisch ensemble de eigenschappen van de entropie bezit, POINCARÉ noemt de grootheid $S$ zelf entropie, ook bij een willekeurig ensemble. Deze zal dus moeten afnemen, waar $-\bar{\eta}$ toeneemt.

Men kan de bedoelde eigenschap als volgt afleiden. $P$ bezit de eigenschappen van een dichtheid, dus

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\Sigma \frac{\partial P X_i}{\partial x_i} = -\Sigma X_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \left( \text{daar } \Sigma \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0 \right).$$

Nu zal een willekeurige functie van $P$ zich ook als een dichtheid gedragen. Namelijk:

---

[1]) „Über den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik"; Abhandlungen über Theoretische Physik, Leipzig 1906, p. 289.

[2]) „Réflexions sur la Théorie cinétique des gaz"; Journal de Physique, 1906 p. 369.

$$\frac{\partial f(P)}{\partial t} = f'(P)\frac{\partial P}{\partial t} = -f'(P)\Sigma X_i \frac{\partial P}{\partial x_i} = -f'(P)\Sigma X_i \frac{\partial P}{\partial x_i} - f(P)\Sigma \frac{\partial X_i}{\partial x_i} =$$

$$= -\Sigma X_i f'(P)\frac{\partial P}{\partial x_i} - \Sigma f(P)\frac{\partial X_i}{\partial x_i} = -\Sigma \frac{\partial [X_i f(P)]}{\partial x_i}.$$

De $f(P)$ voldoet dus ook aan een vergelijking van denzelfden vorm als de $P$ zelf, welke vergelijking de uitbreiding tot een ruimte van $n$ dimensies voorstelt van de bekende vergelijking uit de hydrodynamica

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v}{d y} + \frac{\partial \varrho w}{d z} = 0.$$

Nu is $S = \int P \log P d\tau$, (waarin $d\tau = dx_1 \ldots dx_{n_1}$) $= \int f(P)\, d\tau$ de integraal van zulk een $f(P)$, geïntegreerd over de geheele extensie door het ensemble ingenomen. Om de verandering van $S$ na te gaan bij de beweging van het ensemble moet men telkens over de veranderlijke ruimte (hoewel standvastig in grootte) integreeren, waarover zich de phasen uitstrekken of waar $P$ en ook $f(P)$ waarden hebben. We kunnen dus $\frac{dS}{dt}$ geheel vergelijken met de toename in den tijd van een hoeveelheid vloeistof, over alle plaatsen genomen waar deze zich bevindt. Deze toename is echter gelijk nul.

Wanneer echter $S = \int P \log P\, dx_1 \ldots dx_n$ standvastig is kan het ensemble zich niet bewegen naar de microcanonische verdeeling. Dan toch zou $P$ op den duur constant worden over de geheele phaseextensie en dus de integraal zou dan een minimum-waarde verkrijgen.

Nu ligt evenwel de vraag voor de hand: wanneer de functie $S$ of $\bar{\eta}$ standvastig is, is er dan niet een andere grootheid, het ensemble karakteriseerend, die door hare verandering in een bepaalde richting aangeeft de beweging van het ensemble in de richting van de gelijkmatige plaatsverdeeling en de Maxwellsche snelheidsverdeeling? Aan deze beweging kan men toch moeilijk twijfelen en in een bijzonder geval is voor één systeem door Boltzmann in de grootheid $H$ zulk een functie gevonden.

Poincaré meent zulk een functie gevonden te hebben in zijn „entropie grossière", een grootheid van den zelfden vorm als $S$, maar waarbij de elementen der extensie, waarover gesommeerd wordt, niet oneindig klein worden genomen, maar zoo klein, dat men praktisch niet meer onderscheiden kan tusschen systemen binnen hetzelfde elementje gelegen. Men kan deze grootheid dus voorstellen door

$\Sigma \Pi \log \Pi . \sigma$, waarin $\sigma$ het elementje voorstelt en $\Pi$ de gemiddelde dichtheid daarover. In onderscheid met deze entropie wordt nu $S$ de „entropie fine" genoemd en men kan gemakkelijk aantoonen dat de „entropie grossière" altijd kleiner is dan de „entropie fine". Minder gemakkelijk is in te zien, dat de entropie grossière mettertijd afneemt en POINCARÉ toont dit ook niet aan. Van de grootheid toch $S = \iint P \log P \, dl \, d\omega$, die hij in eenige gevallen tracht te bewijzen dat afgenomen zou zijn, is niet best in te zien dat het eene entropie *grossière* voorstelt, terwijl tevens het bewijs op eene m. i. onjuiste aanname berust. Wel zal hier beneden aangetoond worden, dat er grootheden van dezen vorm zijn, die afnemen, maar voor deze is de naam „entropie grossière" niet zeer passend, daar de elementen der extensie waarvoor gesommeerd wordt even goed oneindig klein zijn, al is het van lagere orde dan de oorspronkelijke elementen.

§ 2. Eene zeer geschikte inleiding in de gastheorie vormt het door POINCARÉ herhaaldelijk behandelde *probleem der kleine planeten* [1]. Hierbij wordt de vraag behandeld wat op den duur de verdeeling langs de ecliptica zal worden van een aantal kleine planeten, die te eeniger tijd in haar baan zijn geplaatst op een wijze dat ten minste bij het toebedeelen van de snelheden het toeval in het spel is geweest. POINCARÉ toont aan dat, als het aantal groot is en de planeten elkaar niet hinderen, op den duur de planeten hoogstwaarschijnlijk ongeveer gelijkmatig over de ecliptica verspreid zullen geraken.

Wanneer we het probleem geheel op de wijze van GIBBS wilden behandelen zouden we een ensemble van systemen moeten beschouwen telkens uit $n$ planeten bestaande. Daar de planeten elkaar niet hinderen, kunnen we echter ook een ensemble van telkens één planeet nemen, welk ensemble dan alle mogelijkheden voorstelt, die bij de plaatsing van een planeet kunnen voorkomen. Wanneer nu ieder dergelijk ensemble, aan zekere eenvoudige voorwaarden voldoende, zich langzamerhand gelijkmatig over de ecliptica verspreidt, is er voor elke planeet, willekeurig uit dit ensemble gekozen, ten slotte gelijke kans op elke plaats van de ecliptica, zoodat, als men $n$ maal een planeet uit zulk een ensemble moet kiezen, deze, als $n$ groot is, hoogstwaarschijnlijk ook ongeveer gelijkmatig over de ecliptica verdeeld zullen zijn.

Er wordt aangenomen, dat de banen cirkelvormig zijn en in het vlak van de ecliptica liggen, zoodat iedere planeet bepaald is door

[1]) Zie l. c. benevens: „Calcul des Probabilités", Paris 1896 en „La Science et l'Hypothèse", Paris 1904.

de veranderlijken $l$ (lengte) en $\omega$ (hoeksnelheid), waarbij $\omega$ constant is en $l = l_0 + \omega t$, als we ook grootere hoeken dan $2\pi$ toelaten. De functie $S$ (entropie fine van POINCARÉ) is dus hier $\int\int P \log P \, dl d\omega$ over alle phasen geintegreerd.

Daar $X_1$ aan $l$ beantwoordende $= \omega$ en $X_2$ aan $\omega$ beantwoordende $= 0$, is hier $\sum \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \omega}{\partial l} = 0$, dus de functie $S$ blijft constant.

Toch nadert het ensemble tot gelijkmatige verdeeling over de ecliptica, wat echter geheel iets anders is dan dat de dichtheid $P$ constant zou worden. Dan zou natuurlijk $S$ afnemen (opgemerkt moet worden dat ook $\int\int P dl d\omega$ en $\int\int dl d\omega$ constant blijven). Men ziet dit naderen tot gelijkmatige verdeeling misschien het gemakkelijkst in, wanneer men alleen dat deel van het ensemble beschouwt, dat oorspronkelijk een lengte had liggende tusschen $l_0$ en $l_0 + dl_0$, terwijl de hoeksnelheden liggen tusschen $\omega_1$ en $\omega_2$. Dit deel van het ensemble zich oorspronkelijk in één punt van de ecliptica bevindende, zal door de verschillende snelheden uiteenraken en zich langzamerhand verspreiden over de ecliptica, totdat ten slotte een zeer groot aantal malen de ecliptica in beslag genomen wordt. In een bepaald punt der ecliptica bevinden zich nu deelen, die oorspronkelijk over een groot aantal elementen der extensie, telkens op gelijken afstand van elkaar, verspreid waren en het is gemakkelijk te zien dat, als de functie, die de oorspronkelijke dichtheid voorstelde, en haar afgeleide eindig en continu zijn, ten slotte de dichtheid langs de ecliptica overal dezelfde zal zijn [1]). Bijgaande fig. 1 geeft de beweging van het ensemble aan. Van de oorspronkelijk horizontale strook verschuift ieder punt met constante snelheid loodrecht naar boven, zoodat de extensie telkens een hellende strook in beslag neemt met helling bepaald door $tg\alpha = t$.

De horizontale strooken op afstanden $2\pi$ van elkaar geven de deelen van de extensie aan, die zich in hetzelfde punt van de ecliptica bevinden. Deze hebben zich oorspronkelijk in deelen van de oorspronkelijke strook op gelijke afstanden van elkaar bevonden. Deze afstanden worden steeds kleiner, terwijl de oppervlakte-elementen talrijker en tevens kleiner worden.

Men krijgt nu in plaats van de standvastige grootheid $S = \int\int P \log P dl d\omega$ ($l$ doorloopend gedacht) een veranderlijke, wanneer men de opper-

[1]) Zie bij POINCARÉ l.c.

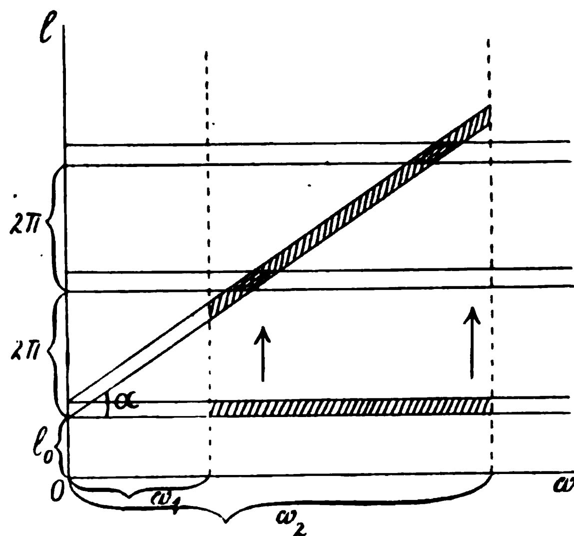



Fig. 1.

vlakte-elementen dadelijk bijeen neemt, die ten opzichte van de plaats op de ecliptica op hetzelfde neerkomen. Men krijgt zoo de grootheid $S_p = \int_0^{2\pi} P' \log P'\, dl$, waarin $P'$ voorstelt de hoeveelheid zich per eenheid van lengte bevindende in de gezamenlijke strooken, ter breedte $dl$ en op afstanden $2\pi$ van elkaar verwijderd, die dezelfde plaatsing op de ecliptica geven. Dus in het bedoelde geval, dat oorspronkelijk een horizontale strook ter breede $dl_0$ werd in beslag genomen, is $P'\, dl = \Sigma\, P_i\, dl_0\, dl \cot \alpha = \Sigma\, P_i \frac{dl_0\, dl}{t}$ dus $P' = \frac{dl_0}{t} \Sigma\, P_i$ waarin $P_i$ de dichtheid voorstelt in elk der punten van de oorspronkelijke strook, die nu op hetzelfde neerkomen.

Deze $P'$ wordt nu, zooals we zagen, op den duur een constante en dus $S_p$ minimaal. Men zou deze grootheid *entropie van plaats* kunnen noemen; „entropie grossière" schijnt minder geschikt, omdat de elementen van extensie nog oneindig klein zijn. Dit op den duur naderen tot een minimum moet niet opgevat worden als een voortdurend kleiner worden. Het is gemakkelijk in te zien, dat de oorspronkelijke dichtheidsfunctie wel zoo gekozen zou kunnen worden, dat er ook tijden zijn, ten minste in het begin, waarin de dichtheden $P'$ meer uiteengaan in plaats van tot elkaar te naderen. Dan zou de grootheid $S_p$ toenemen; dus $\frac{dS_p}{dt}$ is niet zooals de $\frac{dH}{dt}$ van Boltzmann voortdurend negatief.

Wanneer men echter tijden vergelijkt, waarin eerst een hoek $2\pi$, dan $4\pi$ enz. wordt in beslag genomen, kan men met vrij groote zekerheid zeggen, dat telkens $S_p$ is afgenomen. Als men nu in plaats van een horizontale strook een willekeurig ensemble beschouwt, kan men voor elke horizontale strook daaruit de bovenstaande redeneering toepassen. Dus ook nu wordt het ensemble ten slotte gelijkmatig over de ecliptica verspreid en de grootheid $S_p = \int_0^{2\pi} P' \log P' \, dl$ wordt minimaal. Nu is echter $P' \, dl = \Sigma \int P \, dl \, d\omega$ of $P' = \Sigma \int P \, d\omega$, geïntegreerd telkens over alle $\omega$'s, die binnen de horizontale strook bepaald door $dl$ vallen. Deze $P'$ wordt op den duur constant. De beweging van het ensemble in dit meer algemeene geval wordt door fig. 2 uitgedrukt.

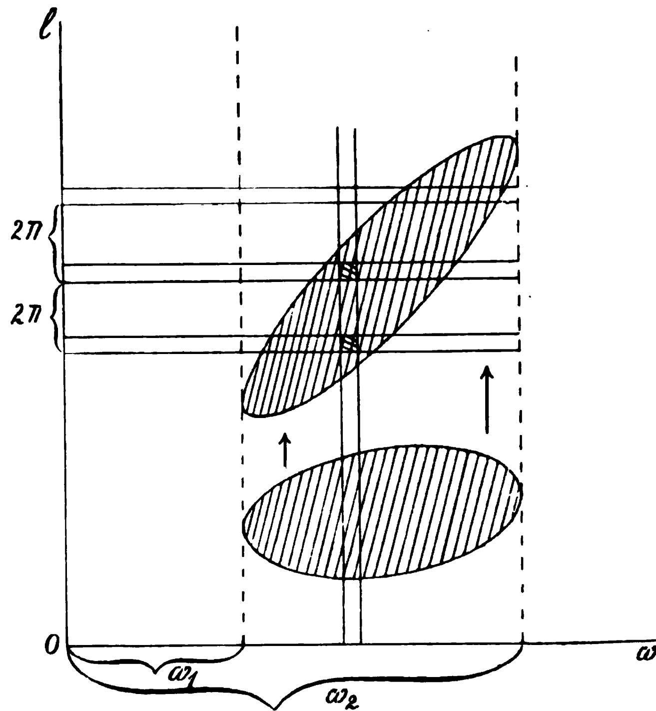


Fig. 2.

De bovenbedoelde onjuistheid in de redeneering van Poincaré bestaat nu hierin. Hij beschouwt de grootheid $S = \iint P \log P \, dl d\omega$, waarbij hij naar $l$ integreert van 0 tot $2\pi$. De $P$ uit deze formule is dus blijkbaar ontstaan door wel te sommeeren voor de verschillende

op hetzelfde neerkomende waarden van $l$, maar niet naar $\omega$ te integreeren. Deze $P$ is dus de som der dichtheden van de elementjes verkregen door een bepaalde $\omega$ te nemen en daarna achtereenvolgens $l, l + 2\pi$ enz. In fig. 2 zijn deze elementjes voor één waarde van $\omega$ dubbel gestreept. Nu neemt POINCARÉ echter verder aan, dat ten slotte voor $t = \infty$ deze $P$, of $\Sigma P$ liever, niet meer van $l$ afhangt maar alleen van $\omega$ [1]). Dit schijnt mij onjuist. Dan toch zou voor iedere verticale strook in fig. 2 de som der dichtheden in de telkens op een afstand $2\pi$ van elkaar verwijderde elementjes ten slotte constant moeten worden. Dit is echter alleen mogelijk, als het aantal termen van deze som ten slotte oneindig groot wordt, wat volstrekt niet het geval is. Iedere verticale afstand binnen de extensie blijft n.l. even lang, zoodat het aantal bij elkaar te nemen elementjes binnen elke verticale strook steeds eindig blijft. Eerst als de voorkomende $\omega$'s zich over een eindigen afstand uitstrekken kan het aantal termen van de som voor $t = \infty$ ook oneindig groot worden.

Een tweede partieele entropie, die *ten opzichte van de snelheden*, krijgt men door die elementen der extensie bij een te nemen, die dezelfde snelheid geven. Dit is dus hier $S_s = \int_{\omega_1}^{\omega_2} P'' \log P'' \, d\omega$, waarin $P'' = \int P \, dl$ langs de verticale strooken geïntegreerd. Deze entropie is ook wel kleiner dan de entropie fine, maar het verschil blijft standvastig en dus $S_s$ standvastig.

§ 3. Een overgangsgeval van dat der planeten naar dat der gasmoleculen wordt gevormd door het geval van het gas van één dimensie. Hieronder verstaat POINCARÉ een gas, waarvan alle moleculen zich evenwijdig aan elkaar heen en weer bewegen tusschen twee evenwijdige wanden loodrecht op de bewegingsrichting der moleculen. We nemen aan, dat er volkomen elastische botsing plaats vindt en dat de afmetingen der moleculen verwaarloosd mogen worden. Wanneer we nu den geheelen weg telkens in één richting uitzetten en den afstand tot een der wanden als variable $l$ invoeren, verder de snelheid $\omega$ voortdurend als positief beschouwen, is dit geval, als we de afstand der wanden $\pi$ noemen, gelijk aan het vorige, alleen met dit verschil, dat nu de afstanden $l, 2\pi - l, 2\pi + l$ enz. op hetzelfde neerkomen, wat de plaatsing der moleculen betreft. Er moeten dus tweemaal zooveel strooken bijeen genomen worden als zooeven en er behoeft nu slechts van 0 tot $\pi$ geïntegreerd te worden.

---

[1]) Réflexions sur la Théorie cinétique des gaz; p. 381, p. 385 enz.

Evenals zooeven heeft men dus een grootheid $S_p = \int_0^\pi P' \log P' \, dl$, die afneemt daar $P' = \Sigma \int P \, d\omega$ op den duur een constante wordt [1]).

Daar zulke moleculen elkaar niet hinderen bij de beweging komen hier evenals bij de planeten het geval van een continu ensemble van telkens één molecule en dat van een werkelijk gas van $n$ moleculen weer vrijwel overeen. Bij een gas van drie dimensies is dit in het algemeen ten gevolge der botsingen niet meer het geval.

Een ander overgangsgeval hebben we in een ensemble van systemen telkens uit $n$ planeten bestaande. De entropie fine is nu

$$S = \int P \log P \, dl_1 \ldots dl_n \, d\omega_1 \ldots d\omega_n,$$

de

$$S_p = \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} P' \log P' \, dl_1 \ldots dl_n,$$

waarin $P' = \Sigma \int P \, d\omega_1 \ldots d\omega_n$, geïntegreerd naar $\omega_1 \ldots \omega_n$ en gesommeerd over alle combinaties van $l_1$ tot $l_n$ die dezelfde plaatsing der planeten geven. Deze combinaties krijgt men door de waarden $l_1$, $2\pi + l_1$ enz. met de waarden $l_2$, $2\pi + l_2$ enz. tot $l_n$, $2\pi + l_n$ enz. te combineeren op alle mogelijke wijzen. Het aantal dezer combinaties, dus het aantal termen bij de sommatie neemt hij de beweging, evenals in de vorige gevallen, onbepaald toe; $P'$ wordt dus constant en $S_p$ nadert de minimumwaarde. Denkt men zich in plaats van de planeten ééndimensionaal bewegende moleculen dan krijgt men $S_p = \int_0^\pi \ldots \int_0^\pi P' \log P' \, dl_1 \ldots dl_n$ waarbij $l_1$, $2\pi - l_1$, $2\pi + l_1$ enz. bijeengenomen moeten worden bij de berekening van $P'$.

Nog een ander overgangsgeval krijgt men door een ensemble te beschouwen van telkens één molecule zich willekeurig bewegend in een vat in den vorm van een rechthoekig parallelopipedum, met ribben $a$, $b$ en $c$. Deze beweging kan samengesteld gedacht worden uit drie bewegingen evenwijdig aan de ribben, die we ieder evenals

---

[1]) Men had hier ook wel in plaats van de doorloopende $l$ de van 0 tot $\pi$ veranderlijke coördinaat $x$ als variable kunnen nemen. De $\omega$ verspringt dan telkens van + naar — en omgekeerd en men krijgt dezelfde termen $\int P d\omega$ als boven, maar nu op één hoogte $x$.

bij het eerste overgangsgeval kunnen behandelen. Noemen we de coördinaten ten opzichte van de zijvlakken $x, y, z$ dan komen, wat de plaats betreft, op hetzelfde neer de afstandcombinaties van $x$, $2a-x$, $2a+x$ enz. met $y$, $2b-y$, $2b+y$ enz. en $z$, $2c-z$, $2c+z$ enz. Men krijgt dus nu de $P'$ door voor de $P$ te integreeren naar de componenten van de snelheid en dan voor al deze combinaties te sommeeren. De $S_p = \int_0^a \int_0^b \int_0^c P' \log P' \, dx \, dy \, dz$ neemt weer af tot de minimumwaarde bereikt is. Een uit het ensemble willekeurig gekozen molecule zal dan gelijke kans op elke plaats in het vat hebben. Als de afmetingen der moleculen niet verwaarloosd worden komen in plaats van de wanden van het vat vlakken op een afstand $r$ daaraan evenwijdig.

Als we van een gasmassa de botsingen der moleculen onderling mogen verwaarloozen, zouden we ieder der $n$ moleculen steeds mogen beschouwen als willekeurig uit zulk een ensemble gekozen en hoogst waarschijnlijk zouden deze $n$ moleculen dus ten slotte vrijwel gelijkmatig over het vat verdeeld zijn.

§ 4. Ten slotte zullen we beschouwen een ensemble van systemen telkens bestaande uit $n$ moleculen zich bewegende in een vat in den vorm van een rechthoekig paralellopipedum. Als we de coördinaten ten opzichte van de zijvlakken als veranderlijken aannemen, zullen de componenten der snelheden ook negatief kunnen zijn en het voorstellende punt van een systeem kan elke plaats innemen binnen de ruimte

$$\int_r^{a-r} dx_1 \ldots dx_n \int_r^{b-r} dy_1 \ldots dy_n \int_r^{c-r} dz_1 \ldots dz_n \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \ldots d\xi_n \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 \ldots d\eta_n \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_1 \ldots d\zeta_n$$

waarbij alleen nog in rekening behoeft gebracht te worden, dat bij de beweging de kinetische energie of ook de $\Sigma v^2$ constant blijft. We zullen dus nu hebben na te gaan welke deelen uit de phase-extensie dezelfde plaatsing der moleculen, en welke dezelfde moleculaire snelheden zullen geven en te zien of de $P$ over deze ruimten geïntegreerd en gesommeerd ook op den duur constant wordt.

Het ligt voor de hand, dat hier het vraagstuk der snelheidsverdeeling het eenvoudigst zal zijn, daar de botsing deze direct en de plaatsverdeeling eerst indirect wijzigt.

Op het voorbeeld van § 2, waar we om de plaatsing te bestudeeren een strook uit de oorspronkelijke extensie beschouwden gelegen tusschen $l_0$ en $l_0 + dl_0$, zullen we hier een deel uit de extensie nemen

door oneindig dicht bij elkaar gelegen snelheidsgrenzen bepaald maar een eindig deel van de $3n$-dimensionale coördinaten-ruimte beslaande. In verband met de conditie dat $\Sigma v^2 = C$ nemen we uit de $3n$-dimensionale snelheden-ruimte een elementje van een bolvormige schil, waarvan de straal gelijk is aan $\sqrt{\Sigma v^2}$. Hiermee correspondeert een prismatisch of cylindrisch deel der extensie, waarvan het bedoelde elementje het grondvlak voorstelt. Ten opzichte van de snelheidsverdeeling komen nu de punten uit deze en dergelijke prismatische of cylindrische kokers met elkaar overeen. De elementjes van de bolvormige schil stellen de projectie van de kokers op de snelhedenruimte voor. We hebben nu maar te onderzoeken of de hoeveelheid stof, die zich oorspronkelijk boven het genoemde elementje in een bepaalden koker bevindt, ten slotte niet zich gelijkmatig verdeeld zal hebben over al de kokers, zoodat boven ieder even groot elementje van de schil dezelfde hoeveelheid zich zal bevinden. Als dit het geval mocht zijn zal $S_s = \int P' \log P' d\tau$ weer minimaal worden als $d\tau$ de grootte van zulk een elementje voorstelt en $P' d\tau$ de hoeveelheid, die zich in $d\tau$ projecteert.

We kunnen de punten uit het elementje van de bolvormige schil ook de snelheidspunten van de systemen noemen en de vector, die den oorsprong met zulk een snelheidspunt verbindt, stelt alle snelheden van het systeem tegelijk naar grootte en richting voor; de projecties van den vector op de $3n$ assen van de ruimte zijn de componenten der moleculaire snelheden.

Het zich op den duur gelijkmatig uiteenspreiden van deze punten over de genoemde hyperspheer kan misschien het beste aangetoond worden door gebruik te maken van een voorstellingswijze van BOREL en diens methode gedeeltelijk te volgen [1]).

BOREL stelt zich voor dat in dezelfde 3n-dimensionale ruimte, waarin de coördinaten der moleculen worden uitgezet (zoodat men voor elk systeem een punt krijgt, dat de totale plaatsing voorstelt), ook de snelheidscomponenten worden uitgezet van het genoemde voorstellende punt uit. De vector, die men dan krijgt, stelt de snelheid voor van het voorstellende punt en we kunnen nu nagaan, wat er met dezen vector bij de beweging gebeurt. Het blijkt nu gemakkelijk, dat het voorstellende punt zich beweegt in een ruimte in gesloten door vlakken of ruimten als $x_1 = r$, $x_1 = a - r$ enz., waartegen het botst als een der moleculen van het systeem tegen een wand

[1]) „Sur les Principes de la Théorie cinétique des gaz" par EMILE BOREL. Annales de l'Ecole Normale Supérieure IIIe Série, 1906, N°. 1, p. 9.

van het vat botst. Als twee moleculen tegen elkaar botsen, botst het voorstellende punt tegen een oppervlak, waarvan de vergelijking van den vorm :

$$(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2 = 4r^2$$

is. Nu toont BOREL aan, dat voor deze botsing dezelfde wetten gelden als bij gewone botsing, zoodat de lijnen, waarlangs het punt zich vóór en na de botsing beweegt, met de normaal in eenzelfde plat vlak liggen, terwijl de normaal den hoek van de eerste beide lijnen midden door deelt. Verder blijft de snelheid dezelfde. Wij moeten ons nu volgens het bovenstaande voorstellen dat een eindige ruimte met zulke voorstellende punten gevuld is, terwijl van ieder punt een oneindig kleine bundel van snelheidsvectoren uitgaat, onderling gelijk en ook voor alle punten gelijk. Een aantal van deze voorstellende punten nu botst tegen een zeker van de bovengenoemde oppervlakken, b.v. met vergelijking $(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2 = 4r^2$; dit beteekent dan dat voor die systemen de eerste en tweede molecule tegen elkaar botsen. Dit oppervlak is dat van een omwentelings cylinder van den $3n$-3[en] trap, waar de punten van buiten tegen aan botsen [1]. Het „grondvlak" van den cylinder is een bol, de beschrijvende lijnen zijn hier beschrijvende ruimten geworden en wel platte ruimten van $3n—3$ dimensies.

Bij de bedoelde botsing zal, daar de uitgestrektheid waarvan de punten komen groot is ten opzichte van de afmetingen van de doorsnede van den cylinder (of ten minste van dezelfde orde) de oneindig kleine bundel uiteengespreid worden in de richtingen van de loodrechte doorsnede van den cylinder, dus hier in 3 dimensies en wel tot een bundel van eindige wijdte. Neemt men hiervan weer een oneindig klein deel, dan komt dit uit een bepaald punt van elke bol-doorsnede en dus uit de punten van een beschrijvende ruimte van den cylinder [2]). Hiervan kaatst weer een deel tegen een tweeden cylinder (hetgeen b.v. botsing van de 1[e] en 3[e] molecule beteekent) en de oneindig nauwe bundel wordt weer tot eindige wijdte uiteengespreid; enz.

De voorstellende punten die deze botsingen niet meegemaakt hebben botsen weer tegen een ander oppervlak en de bundel wordt telkens uiteengespreid tot een oneindig maal wijderen, maar telkens weer in andere ruimten. Wanneer echter in een systeem een zelfde molecule

---

[1]) Voert men de nieuwe coördinaten $\xi$, $\xi'$, $\eta$, $\eta'$, $\zeta$ en $\zeta'$ in bepaald door $\xi = \frac{1}{2}(x_1-x_2)\sqrt{2}$, $\xi' = \frac{1}{2}(x_2+x_3)\sqrt{2}$ enz. dan wordt de vergelijking van het oppervlak: $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2r^2$.

[2]) Eigenlijk een smalle strook in de richting van die beschrijvende ruimte.

een groot aantal botsingen heeft gehad, heeft bij elk dier botsingen de uitbreiding ook een projectie gehad op de ruimte bepaald door de coördinaten-assen van het 1e molecuul. Wanneer dus elke molecule een groot aantal botsingen heeft gehad is de bovenbedoelde snelheidsvector in elke richting een groot aantal malen den bol, waarop de snelheidspunten liggen, rondgegaan. De snelheidspunten, die oorspronkelijk een elementje van de bolschil innamen, zullen nu zeer vele malen het geheele boloppervlak in beslag nemen. Daar nu echter de punten van den bol, waar een snelheidspunt na één, twee enz. omwentelingen in zekere richting is, op hetzelfde neerkomen ten opzichte van de snelheidsverdeeling der moleculen, kunnen we weer evenals in al de vorige gevallen aannemen, dat ten slotte de dichtheid over het geheele boloppervlak dezelfde is.

Voor de overige oorspronkelijk in beslag genomen elementen van dezelfde bolvormige schil kan men evenzoo redeneeren. Heeft men ook systemen met andere kinetische energie in het ensemble dan verdeelen ook hier de punten zich homogeen in bolvormige lagen; daar echter de eene soort niet in de andere kan overgaan kan de dichtheid voor de lagen verschillend zijn. Het is evenzoo als bij de plaatsverdeeling, wanneer de gasmassa's in verschillende vaten zich bevinden. [1])

Nu het vraagstuk van de plaatsing der moleculen. Wij beschouwen daarvoor een deel der phase-extensie, oorspronkelijk naar de plaats door oneindig dicht bij elkaar gelegen grenzen bepaald, maar

---

[1]) Ook zonder de voorstellingswijze van Borel kan men zich de bovenbedoelde uiteenspreiding eenigermate voorstellen. In een aantal systemen hebben de moleculen telkens dezelfde snelheden, maar een andere plaats. Nu zal het geheel van de onderlinge ligging b.v. der moleculen 1 en 2 in verband met hare snelheden afhangen, wat bij de botsing de richting der normaal wordt en dus, tot zekere hoogte, wat de eindsnelheden worden. In elk geval krijgt men uit een enkel snelhedenpaar een oneindig groot aantal. Had men oneindig nauwe grenzen, waar tusschen de snelheidscomponenten moeten liggen, men krijgt nu een eindig gebied. Heeft men uit de eindsnelheden-paren een bepaald gekozen, dus ook een bepaalde snelheid van het 1e molecuul, dan kan deze molecule weer allerlei standen hebben ten opzichte van de 2e molecule, waarmee ze aanstonds botsen zal, dus ook de botsingsnormaal kan allerlei richtingen hebben en dus de oneindig nauw gedachte grenzen worden weer op eindigen afstand gebracht, enz. Denkt men zich nu in plaats van de snelheidscomponenten als veranderlijken de hoeken van den algemeenen snelheidsvector mét de snelheidsassen, dan zal uiteengaan der grenzen een grooter bedrag van ingenomen hoeken geven, zoodat ten slotte een groot aantal malen $2\pi$ wordt ingenomen. Brengt men nu in rekening, dat toename van zulk een hoek met een bedrag $2\pi$ geen uitwerking heeft, dan komt men tot beschouwingen en conclusies van geheel denzelfden aard als bij de boven behandelde vraagstukken.

een eindig deel der snelheden-ruimte innemende. We hebben nu aan te toonen, dat dit ensemble zich ten slotte gelijkmatig over alle plaats-combinaties zal verdeelen. In dat geval zal er weer een gedeeltelijke entropie $S_p$ zijn (naar de snelheden geïntegreerd), die minimaal is geworden.

Wij kunnen beproeven hier ook weer van de BOREL'sche voorstellingswijze gebruik te maken en zullen als inleidend geval nemen een ensemble van telkens 2 moleculen zich langs dezelfde lijn loodrecht op twee evenwijdige wanden tusschen die wanden bewegend.

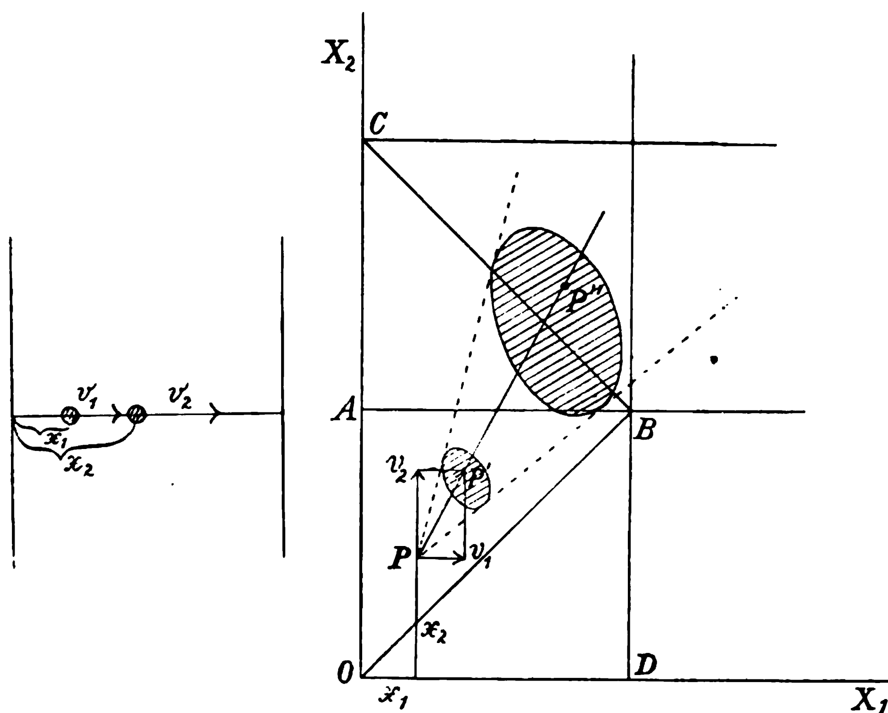



Fig. 3*a* Fig. 3*b*

Fig. $3_a$ stelt voor één systeem uit het ensemble, fig. $3_b$ de beweging van het geheele ensemble, als de afmetingen der moleculen verwaarloosd worden. Alle systemen bevinden zich oorspronkelijk in een elementje geplaatst bij $P(x_1\, x_2)$, terwijl de snelheidspunten binnen een willekeurige figuur liggen. Hier zullen zich de voorstellende punten na 1 sec. bevinden, terwijl ze, als er geen botsing was, dus een steeds grooter wordende figuur zouden innemen. Botsing van de moleculen tegen de wanden wordt hier voorgesteld door botsing van het voorstellende punt tegen de lijnen $OA$ en $AB$, botsing der moleculen tegen elkaar door botsing tegen de lijn $OB$.

Wij kunnen nu echter ook de beweging na de botsing b.v. tegen $AB$ voortgezet denken voorbij $AB$, als we den driehoek $ABO$, die dan voor den tweeden keer zou doorloopen worden, met de snelheid na de botsing om $AB$ omgeslagen denken. Het punt gaat nu ongehinderd door. Een daarna komende botsing tegen $OB$ wordt nu botsing tegen $BC$; we kunnen nu weer evenzoo handelen. De bundel gaat dan geheel ongehinderd door, maar we moeten in rekening brengen, dat de oppervlakte-elementjes, die op die wijze uit elkaar ontstaan, dezelfde plaatsing der beide moleculen voorstellen. De zich steeds uitbreidende figuur der voorstellende punten zal ten slotte een zeer groot aantal van zulke op hetzelfde neerkomende oppervlakte-elementjes van elke soort bevatten of een zeer groot aantal der omgeslagen driehoeken, zoodat de punten ten slotte gelijkmatig verdeeld zullen zijn over de sommen der oppervlakte-elementjes. Iedere plaatsing der beide moleculen, die voorgesteld wordt door een punt in $\Delta ABO$, komt dan dus even dikwijls voor. Een punt van $\Delta BDO$ wordt echter nooit bereikt; iedere plaatsing, waarbij de 2e molecule zich rechts van de 1e bevindt is dus ten slotte even waarschijnlijk, maar de 2e kan niet links van de 1e komen.

Deze redeneering zouden we nu tot het geval van meer dan twee dimensies hebben uit te breiden. De terugkaatsing tegen de wanden levert geen verschil in beschouwing op. De botsing tegen de moleculen tegen elkaar wordt nu echter voorgesteld door botsing tegen een cylinder oppervlak. Dit verspert nu wel den weg maar sluit niet meer een deel der ruimte af. Men kan het geval vergelijken met dat van fig. $3_b$ als de lijn $OB$ wordt vervangen door een cirkelomtrek. Het is mij niet gelukt het vraagstuk voor dit algemeene geval tot een oplossing te brengen. Het schijnt echter wel zeer plausibel, dat het eindig aantal cylinders niet zal kunnen beletten, dat de gelijkmatige verdeeling der voorstellende punten over de sommen der op hetzelfde neerkomende volume-elementjes, die zooals wij in § 3 zagen als er geen botsing was ten slotte zou ontstaan, ook nu tot stand zal komen. Dan zouden dus alle plaats-combinaties der moleculen even dikwijls voorkomen.

§ 5. Eindelijk kan nog aangetoond worden, dat wanneer alle plaatscombinaties en alle snelheidscombinaties evenveel voorkomen, hieruit volgt, dat voor de groote meerderheid der systemen de moleculen ongeveer gelijkmatig over het vat verdeeld zijn en de Maxwellsche snelheidsverdeeling bezitten. Tot nog toe hebben we steeds onderscheid gemaakt tusschen de individueele moleculen, nu zal in rekening gebracht moeten worden, dat verwisseling der mole-

culen geen invloed heeft op de plaats- of snelheids*verdeeling*, vóór zoover wij hiervan kennis kunnen nemen. Alle combinaties, die door verwisseling der moleculen uit elkaar ontstaan, komen dus nu op hetzelfde neer. Als dus van $s$ moleculen $s_1$ zich bevinden in het 1e volume-elementje, $s_2$ in het 2e enz. zijn er $\frac{s!}{s_1!\, s_2! \ldots s_n!}$ combinaties, die dezelfde plaatsverdeeling geven. Zooals door BOLTZMANN is aangetoond, kan de noemer bij benadering worden voorgesteld door $ce^{\int f(xyz) \log f(xyz)\, dx\, dy\, dz}$ waarin $f(xyz)$ de verdeelingsfunctie der moleculen over het vat voorstelt. Deze integraal is minimaal als $f(xyz) = C$, dan is dus het aantal combinaties maximaal of de gelijkmatige verdeeling is de meest voorkomende. Om aan te toonen, dat de afwijking van deze verdeeling meestal niet groot is, kan men nagaan hoeveel combinaties een verdeeling geven, waarbij in plaats van $\frac{s}{n}$ in de elementjes $\frac{s}{n} + x_1$, $\frac{s}{n} + x_2$ enz. moleculen voorkomen. Dit aantal is

$$\frac{s!}{\left(\frac{s}{n} + x_1\right)! \left(\frac{s}{n} + x_2\right)! \ldots \left(\frac{s}{n} + x_n\right)!}.$$

Door $s! = s^{s+\frac{1}{2}} e^{-s} \sqrt{2\pi}$ te stellen enz. krijgt men hiervoor, er gebruik van makende dat $x_1 + x_2 + \ldots x_n = 0$:

$$\frac{n^{s+\frac{n}{2}}}{(\sqrt{2\pi s})^{n-1} \left(1 + \frac{n x_1}{s}\right)^{\frac{s}{n} + x_1 + \frac{1}{2}} \ldots \left(1 + \frac{n x_n}{s}\right)^{\frac{s}{n} + x_n + \frac{1}{2}}}.$$

Nu is bij benadering

$$\log \left(1 + \frac{n x_1}{s}\right)^{\frac{s}{n} + x_1 + \frac{1}{2}} = \left(\frac{s}{n} + x_1 + \tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{n x_1}{s} - \frac{n^2 x_1^2}{2 s^2} + \ldots\right) =$$
$$= x_1 + \frac{n x_1}{2s} + \frac{n x_1^2}{2s} \ldots$$

Dus is de *log* van den noemer (op den eersten factor na) bij benadering

$$\Sigma x + \frac{n \Sigma x}{2s} + \frac{n}{2s} \Sigma x^2 = \frac{n}{2s} \Sigma x^2$$

Het aantal combinaties wordt dus nu:

$$\frac{n^{s+\frac{n}{2}}}{(\sqrt{2\pi s})^{n-1}} e^{-\frac{n}{2s} \Sigma x^2};$$

stelt men $\Sigma x^2 = nu^2$ dan kan de kans dat de middelbare afwijking kleiner dan $u$ is, worden voorgesteld door

$$c\,\frac{n^{s+\frac{n}{2}}}{(\sqrt{2\pi s})^{n-1}}\int_0^u e^{-\frac{u^2}{\frac{2s}{n^2}}}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{u}{\frac{1}{n}\sqrt{2s}}} e^{-t^2}\,dt.$$

Deze waarde is echter al spoedig zeer groot, als $u$ nog maar eenige malen $\frac{1}{n}\sqrt{2s}$ is; dan is $u$ of de middelbare $x$ echter nog klein ten opzichte van $\frac{s}{n}$, het gemiddelde aantal moleculen per volume-element.

Op dergelijke wijze is het vraagstuk der snelheidsverdeeling te behandelen. Hier kan de noemer van de uitdrukking $\frac{s!}{s_1!\,.\,s_2!\,\ldots\,s_N!}$ worden herleid tot $Ce^{\int f(\xi\eta\zeta)\log f(\xi\eta\zeta)d\xi d\eta d\zeta}$ waarin $f(\zeta\eta\xi)$ de verdeelingsfunctie der snelheidspunten voorstelt. De integraal is minimaal, in aanmerking nemende dat $\Sigma v^2$ constant is, als $f(\zeta\eta\xi) = ae^{-b(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}$. Nu moet nog onderzocht worden, wat de kans op zekere afwijking van deze verdeeling is. Wij kunnen deze afwijking bepalen door de getallen $x_1, x_1' \ldots x_2, x_2' \ldots$ enz. aangevende het relatieve te veel aan snelheidspunten in de volumeelementen, respectievelijk met de snelheden $v_1, v_2$ enz. In het eerste elementje bevindt zich dan de hoeveelheid $s_1 = ae^{-bv_1^2}(1+x_1)$[1]), in het tweede $s_2 = ae^{-bv_1^2}(1+x_1')$ enz., zoodat het aantal bijeen te nemen combinaties:

$$\frac{s!}{[ae^{-bv_1^2}(1+x_1)]!\,[ae^{-bv_1^2}(1+x_1')]!\ldots[ae^{-bv_2^2}(1+x_2)]!\ldots}.$$

De eerste factor van den noemer is gelijk aan (bij benadering):

$$(ae^{-bv_1^2})^{ae^{-bv_1^2}(1+x_1)+\frac{1}{2}}\times(1+x_1)^{ae^{-bv_1^2}(1+x_1)+\frac{1}{2}}\times e^{-ae^{-bv_1^2}(1+x_1)}\times\sqrt{2\pi} =$$
$$= C_1\,(ae^{-bv_1^2})^{ae^{-bv_1^2}x_1}\times(1+x_1)^{ae^{-bv_1^2}(1+x_1)+\frac{1}{2}}\times e^{-ae^{-bv_1^2}x_1}.$$

Als we vermenigvuldigen met de andere factoren, valt het laatste gedeelte weg, daar $\Sigma ae^{-bv_1^2}x_1 = 0$. Wij houden dus

$$C\,(ae^{-bv_1^2})^{ae^{-bv_1^2}x_1}(1+x_1)^{ae^{-bv_1^2}(1+x_1)+\frac{1}{2}}\times(ae^{-bv_1^2})^{ae^{-bv_1^2}x_1'}$$
$$(1+x_1')^{ae^{-bv_1^2}(1+x_1')+\frac{1}{2}}\times\ enz.$$

Nemen we hiervan de Nep. log. dan valt het eerste gedeelte weg, daar ook $\Sigma\,ae^{-bv_1^2}x_1\,.\,v_1^2 = 0$, zoodat log. noemer

$$= \Sigma\,[ae^{-bv_1^2}(1+x_1)+\tfrac{1}{2}]\log(1+x_1)+C.$$

Dit is bij benadering

1) Deze $a$ is gelijk aan de bovenstaande maal $d\xi d\eta d\zeta$.

$$ae^{-bv_1^2}\left\{x_1+\frac{x_1^2}{1.2}+\ldots\right\}+ae^{-bv_1^2}\left\{x_1'+\frac{x_1'^2}{1.2}+\ldots\right\}+enz.+C$$

of

$$ae^{-bv_1^2}\frac{\Sigma x_1^2}{1.2}+ae^{-bv_2^2}\frac{\Sigma x_2^2}{1.2}+\ldots+C,$$

zoodat de geheele vorm kan worden voorgesteld door

$$Ce^{-\left[ae^{-bv_1^2}\frac{\Sigma x_1^2}{1.2}+ae^{-bv_2^2}\frac{\Sigma x_2^2}{1.2}+\ldots\right]}$$

of als we de waarschijnlijkste hoeveelheden per element $a_1$, $a_2$ enz. noemen:

$$Ce^{-\left[a_1\frac{\Sigma x_1^2}{1.2}+a_2\frac{\Sigma x_2^2}{1.2}+\ldots\right]}$$

Deze exponent komt geheel overeen met die bij het vorig vraagstuk verkregen. We kunnen deze in den vorm $-\Sigma\left(\frac{ax}{\sqrt{2a}}\right)^2$ en de vorige in den vorm $-\Sigma\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{2s}{n}}}\right)^2$ brengen; ze stellen nu voor de negatieve som van de kwadraten der absolute afwijkingen gedeeld door den wortel uit het dubbele van het normale aantal. Evenals bij het vorig vraagstuk is nu de kans zeer groot op een combinatie van afwijkingen, waarbij de wortel uit deze laatste som niet meer dan eenige geheelen bedraagt. Wanneer wij nu als maat voor de afwijking de middelbare relatieve afwijking nemen of $\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}}$ zien we dat deze waarde zeer klein is ten opzichte van $\sqrt{\sum\frac{ax^2}{2}}$ zoodat deze middelbare afwijking zeer gering zal zijn [1]).

Eindelijk zij nog opgemerkt dat dus, om ten slotte zoowel gelijkmatige verdeeling der moleculen over het vat als de Maxwellsche snelheidsverdeeling te krijgen, er oorspronkelijk zoowel een eindig deel van de snelhedenruimte als van de coördinatenruimte moet zijn in beslag genomen. Of ook er moet een zoodanige onzekerheid betreffende de oorspronkelijke plaatsing en snelheden der moleculen bestaan, dat we een eindig geheel van combinaties betreffende beide als mogelijk moeten onderstellen. Dit eindig geheel van mogelijke combinaties vormt het ensemble, dat we in plaats van het binnen zekere grenzen onbekende systeem op zijn weg vervolgen.

1) Daar bij de berekening is aangenomen dat in ieder element nog een aanmerkelijk aantal snelheidspunten voorkomen, mag bij het schatten van het aantal elementen $N$ niet aan de geheele snelhedenruimte gedacht worden.

**Anatomie.** — De Heer WINKLER biedt eene mededeeling aan van den Heer Dr. S. J. DE LANGE: *„Opstijgende degeneratie na gedeeltelijke doorsnijding van het ruggemerg”.*

(Mede aangeboden door den Heer L. BOLK).

Dit onderzoek heeft ten doel na te gaan in hoeverre er verbindingen bestaan tusschen het ruggemerg en den fasciculus longitudinalis dorsalis in opstijgende richting en verder om nogmaals het verloop van den opstijgenden anterolateralen bundel van GOWERS en de verhouding daarvan tot de dorsale kleinhersenzijstrengen vast te stellen.

Uit de uitgebreide literatuur over dit onderwerp zal ik slechts hier en daar iets citeeren, wanneer de door anderen verkregen resultaten in tegenspraak zijn, met hetgeen ik meen gezien te hebben. De teekeningen zijn ontleend aan 4 proefdieren: 1 volwassen konijn waarbij een hemisectie verricht is in het begin van de medulla oblongata (fig. 1) en 3 jonge katten, bij welke op verschillende plaatsen van het ruggemerg laesies gemaakt zijn (fig. 2, 3 en 4) in $C^7$ $C^4$ en $D^4$.

Van deze dieren werd het centraal zenuwstelsel volgens de MARCHI-methode behandeld en vervolgens in serie gesneden van 25 $\mu$ dikte.

Bij alle proefdieren is een duidelijke degeneratie te vinden in de tractus spino-cerebellaris anterior of den GOWER'schen bundel. Ook in de dorsale kleinhersenzijstreng is degeneratie, maar veel minder duidelijk, behalve bij het eerste proefdier met de hooge hemisectie. Hier toch is een zeer compacte degeneratie in het corpus restiforme, die echter niet alleen veroorzaakt wordt door spino-cerebellaire vezels, maar tevens en voor een groot deel door bulbo-cerebellaire vezels, die bij de verwonding mede gelaedeerd zijn [1]).

In de figuren 5 tot 11, wordt de degeneratie gegeven, zooals die zich in mijne praeparaten voordoet. Wij zien het dorsale en het ventrale spino-cerebellair systeem in de eerste coupes nog als één geheel een longitudinaal verloop vertoonen. Langzamerhand wijken de vezels van het dorso-laterale deel af van de longitudinale richting, die door het ventrale deel nog steeds gevolgd wordt. In langzamen spiraalgang gaan de dorsale vezels naar het corpus restiforme, zoo dat er langzamerhand verschillende gewichtige deelen van de medulla oblongata tusschen de beide deelen der kleinherzenzijstrengen komen

[1]) Tot juist begrip dient de plaats van laesie nauwkeuriger omschreven. Deze bevindt zich even onder de caudaalste hypoglossuswortel en verloopt wat schuin naar boven. Bloeding wordt nog gevonden tot in de coupes, waarin de olijf de grootste doorsnede vertoont.

te liggen. Dit laatste is vooral duidelijk in fig. XV, afkomstig van de eerste kat, die een bijna totale doorsnijding in $C^7$ had ondergaan. Door het ontbreken van degeneratie der olivocerebellaire baan komt de scheiding tusschen corpus restiforme en anterolaterale bundel veel meer uit.

Van beide proefdieren heb ik afgebeeld de uitstraling van het corpus restiforme in de kleine hersenen (dorsaal deel der kleinhersenzijstrengen) en van den GOWER'schen bundel (antero-lateraal deel der kleinhersenzijstrengen): fig. 10 en 11, 17 en 18. De eerste uitstraling heeft plaats door den pedunculus ad cerebellum inferior, die van den Gowersche bundel door den pedunculus ad cerebellum superior.

Om dezen laatsten te bereiken gaan de vezels van den tractus spino-cerebellaris anterior, die langen tijd hun longitudinalen loop behouden, in den streek van de bovenolijf en bij het eerste optreden van vezels behoorende tot het corpus trapezoides, een schuine dorsale richting aannemen. In dorso-laterale richting doorkruisen zij de vezels van het corpus trapezoïdes en vertoonen daardoor op de doorsnede een eigenaardige laagsgewijze plaatsing (fig. 9). Tot aan de trigeminus-uittrede blijft de plaats ongeveer dezelfde, slechts komen de vezels dichter bij elkaar te liggen tot zij, even frontaal van den trigeminus, plotseling ombuigen een dorsale richting aannemen, meegaande in het verloop van het laterale lint, hoofdzakelijk aan den buitenrand daarvan blijvende. Door den pedunculus ad cerebellum superior bereiken nu de meeste vezels de kleine hersenen, waar zij een retrograde richting nemen en zich waaiervormig uitbreiden in de vermis inferior. Slechts enkele vezels volgen het verloop van het overige deel van het laterale lint en bereiken het corpus quadrigeminum posticum der zelfde zijde. Sommige autoren meenen ook vezels te kunnen vervolgen tot aan het corpus quadrigeminum anticum (THOMAS, WALLENBERG, BIANCHI, COLLIER en anderen), doch v. GEHUCHTEN, EDINGER en MOTT zijn het daaromtrent eens met LOEWENTHAL, die den GOWER'schen bundel het eerst nauwkeurig beschreven heeft.

Zooals ik reeds gezegd heb, vertoont het beeld der ruggemergslaesies alleen verschil wat betreft het dorsale deel der kleinhersenzijstrengen, men vindt daarin veel minder degeneratie dan bij de hooge doorsnijding. Dit is nu niet alleen toe te schrijven aan de afwezigheid van gedegenereerde bulbo-cerebellaire vezels, maar ook, omdat uit de praeparaten blijkt, dat vele vezels van den dorsalen bundel bij den overgang van het ruggemerg in het myelencephalon een voorloopig einde vinden. Terwijl dus in het ventrale deel bijna uitsluitend lange vezels voorkomen, zijn in het dorsale deel der kleinhersenzijstrengen, lange en korte vezels dooreen gemengd en

zal de verbinding waarschijnlijk voor een groot deel uit twee neuronen bestaan.

In al mijne praeparaten is ook degeneratie waar te nemen in den fasciculus longitudinalis posterior. Deze verzamelplaats van talrijke vezels, zoo opstijgende als afdalende, afkomstig van zeer verschillende deelen van den hersenstam, vertoont over de geheele lengte degeneratie en het maakt den indruk, alsof van uit deze bundel alle kernen van motorische hersen zenuwen voorzien worden van afferente vezels, ja de MARCHI korrels vertoonen zich ook in de motorische wortels. Over de mogelijke beteekenis dezer MARCHI-korreling, die wellicht een zeer vèr strekkende is, zal ik mij hier niet verder uitlaten. Andere onderzoekingsmethoden zullen beter in staat zijn dit vraagstuk tot een nadere oplossing te brengen. In fig. 19 en 20 is de betreffende korreling weergegeven, zooals die zich voordeed bij een kat, met een centrale laesie in het 4de dorsaal segment (fig. 3). Wel echter meen ik het recht te hebben uit de praeparaten te concludeeren dat er lange opstijgende vezels zijn, die waarschijnlijk hun oorsprong hebben in den omtrek van het centraal kanaal. In het ruggemerg verloopen zij dan in den voorsten bundel, ten deele ook in den anterolateralen bundel (fig. 12). De eerste soort vezels begeven zich bij het begin van de medulla oblongata meer centraal waarts en komen uit in den fasciculus longidutinalis dorsalis. De tweede soort buigt zich om ter hoogte van den meest caudalen hypoglossus wortel en gaat in het verloop van dien wortel centraalwaarts naar den fasciculus longitudinalis (fig. 13, 14 en 25). Deze opstijgende vezels vindt men zelfs nog in de kern van den N. oculimotorius terug, zooals fig. 26 aanduidt.

RAMON Y CAJAL neemt eveneens het bestaan dezer vezels aan. v. GEHUCHTEN echter heeft slechts opstijgende degeneratie gevonden bij laesie van den nucleus DEITER, maar geeft niet aan of door hem seriën gezien zijn met centrale laesies van het ruggemerg. In het laboratorium van VAN GEHUCHTEN deed LUBOUSCHINE dergelijke experimenten, door het inspuiten van druppels water. Zijn doel was echter het verwoesten van een deel van den achterhoorn om den oorsprong van den anterolateralen bundel op te sporen. Hij vond dan ook dezen gedegenereerd, maar geen degeneratie in den fasciculus longitudinalis, waarschijnlijk omdat het centrale deel van het ruggemerg niet gelaedeerd was.

Bij de hooge hemisectie werd verder gedegenereerd gevonden de tractus bulbo-cerebellaris, die van de olijf als fibrae arcuatae internae en externae zich naar de peripherie van het corpus restiforme begeeft. Voor het meerendeel zijn deze vezels gekruist, maar enkele zijn van dezelfde zijde afkomstig.

Fig. I. HEMISECTIO MEDULLA OBL.

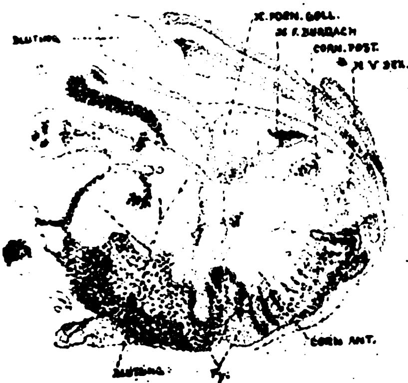



Fig. II. HEMISECTIO IN C. 7




Fig. III. LAESIO CENTR. in D. 4.



Fig. IV HEMISECTIO IN C. 4.



Fig. V.

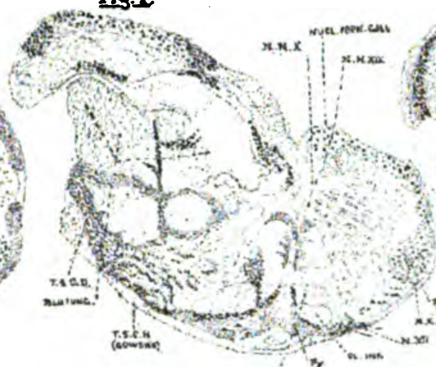



Fig. VI.

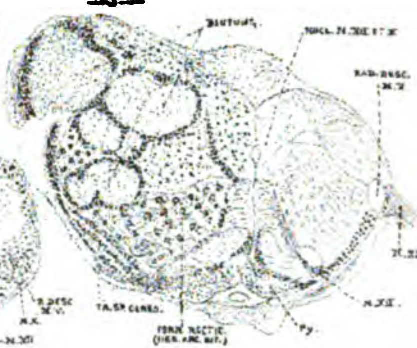



Fig. VII.

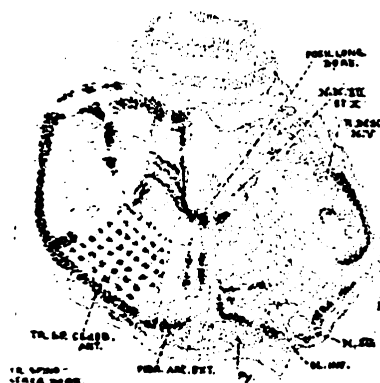



Fig. VIII.

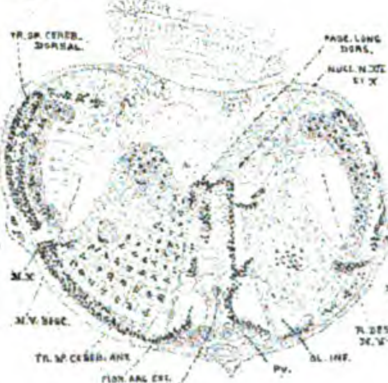



Fig. IX.

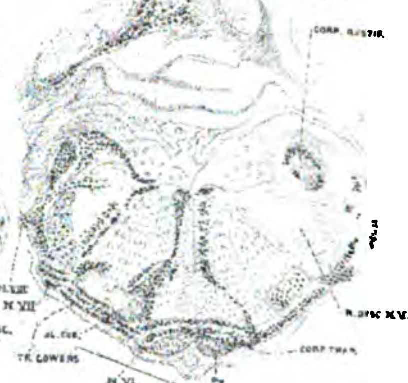



Fig. X.

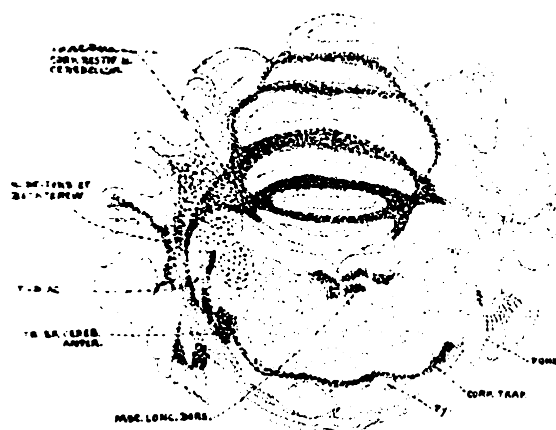



Fig. XI.

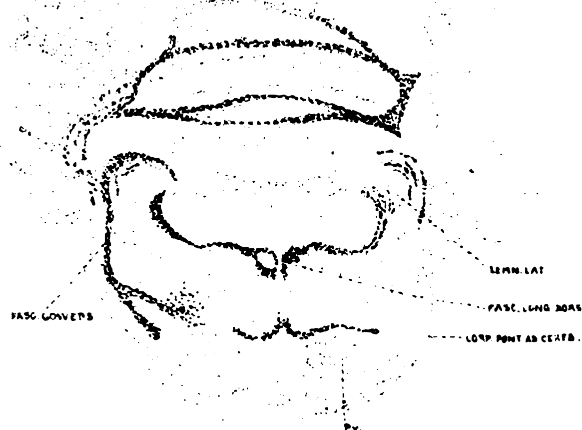


Fig. XII.



Fig. XIII.



Fig. XIV.

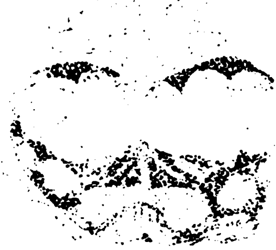


Fig. XV.



Fig. XVI. CORPUS TRAPEZOIDES.



Fig. XVII.




Fig. XVIII.




Fig. XIX.




Fig. XX.

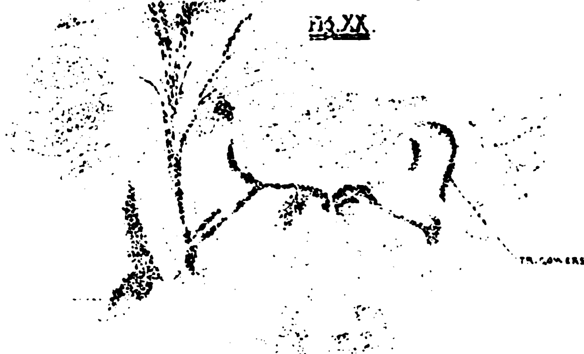



Fig. XXI.



Fig. XXII.



Fig. XXIII.

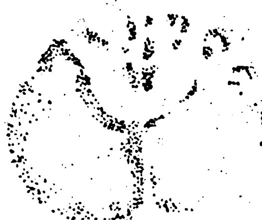


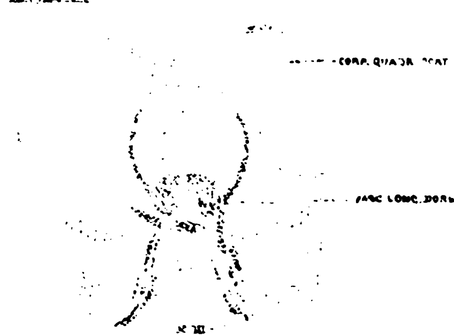
Fig. XXIV.



Fig. XXV.




Fig. XXVI.



Behalve deze vezels zijn er in het basale deel van de formatio reticularis een groot aantal gedegenereerde vezels te vinden, die longitudinaal opstijgen en waarschijnlijk behooren tot de secundaire sensibele baan (fig. 7—11). Een deel dezer vezels overschrijdt de mediaanlijn en zoekt het mediale lint op van de niet gelaedeerde zijde, de overige vereenigen zich ter hoogte van de bovenolijf en verloopen in het mediale lint meer binnenwaarts dan de vezels van den GOWER'schen bundel. Zij zijn te vervolgen tot in het corpus quadrigeminum posterius.

Welke beteekenis er gehecht moet worden aan korreling in het corpus trapezoides, die steeds weer is waar te nemen, is mij niet duidelijk, het feit van het constant voorkomen dier korreling wil ik echter niet met stilzwijgen voorbijgaan.

Recapituleerende vindt ik na éénzijdige laesie van het ruggemerg opstijgend gedegenereerd de volgende systemen:

1°. de gelijkzijdige achterstrengen, te vervolgen tot in de GOLL'sche en BURDACH'sche kern.

2°. De kleinhersenzijstrengen.
   *a.* het dorsale deel bijna uitsluitend aan de gelaedeerde zijde.
   *b.* het antero-laterale deel beiderzijds, maar toch in hoofdzaak aan de gelaedeerde zijde.

3°. De fasciculus longitudinalis dorsalis beiderzijds.

4°. Het corpus trapezoïdes beiderzijds (?)

De neerdalende degeneratie is geschetst in de figuren **21**, **22**, **23** en **24** en omvat:

1°. De voorstreng, hoofdzakelijk aan de gelaedeerde zijde, waarschijnlijk centrifugale vezels uit den fasc. long. dors.

2°. De pyramidenzijstreng aan de gelaedeerde zijde.

3°. De tractus rubro-spinalis, in den zijstreng. (VAN GEHUCHTEN).

4°. De tractus vestibulo-spinalis, vóór de vóórhoren. (EDINGER).

5°. Vezels in de achterstrengen, die eensdeels gelocaliseerd zijn langs den sulcus longitudinalis posterior, anderdeels langs de intredende achterwortels, waarschijnlijk een homologon voor de vezels van het ovale veld en de komma van SCHULTZE.

**Natuurkunde.** — De Heer P. ZEEMAN biedt een mededeeling aan over: *„Magnetische splitsing der spectraallijnen en veldsterkte."* (2[de] gedeelte)[1]).

*Asymmetrie in sterke velden.*

2. Met *de methode van het ongelijkmatige veld*, welke ik in het eerste gedeelte dezer mededeeling heb aangegeven, kan onmiddellijk een verschijnsel dat van de intensiteit van het magnetische veld afhangt bij een reeks van verschillende intensiteiten overzien worden, terwijl men de zekerheid heeft dat alle andere omstandigheden gelijk zijn.

Zooals ik toen opmerkte hoopte ik deze methode toe te passen bij een onderzoek naar de het eerst door VOIGT[2]) uit de theorie voorspelde asymmetrie bij de splitsing der spectraallijnen, welke door LORENTZ[3]) onlangs uit een ander gezichtspunt is beschouwd.

Het theoretisch resultaat van VOIGT luidt, voor het geval men met de splitsing in een *triplet* te doen heeft, in zijn eigen woorden: „dass das normal zu den Kraftlinien wahrnehmbare Duplet der parallel zu $R$ [magnetische kracht] polarisirten Componenten bei kleineren Feldstärken in der Weise unsymmetrisch ist, dass die nach Rot liegende *Componente die grössere Intensität, die nach Violett hin liegende aber den grösseren Abstand von der ursprünglichen Absorptionslinie besitzt.*" VOIGT spreekt hier van eene absorptielijn omdat hij van het zoogenaamde inverse effect uitgaat, echter zullen wegens het parallellisme tusschen de verschijnselen der emissie en der absorptie, de emissielijnen analoge verschijnselen vertoonen.

Het bedrag der asymmetrie van de afstanden, d. w. z. het verschil der afstanden van de uiterste componenten tot de middelste lijn, zou volgens de formules van VOIGT van de veldsterkte onafhankelijk zijn. Verder is te verwachten dat de beschreven asymmetrie aan de grenzen van het waarneembare moet liggen.

Ik heb reeds vroeger[4]) op enkele gevallen van asymmetrische splitsing opmerkzaam gemaakt en de daarna gepubliceerde metingen van andere onderzoekers bevestigen zeker het bestaan daarvan.

Een detail-onderzoek naar het verloop der splitsing, indien de geheele schaal van veldsterkten van groote tot kleine waarden doorloopen wordt, schijnt mij echter van belang voor de theorie te zijn. Natuurlijk zijn de meest interessante gedeelten der schaal de zeer sterke en de zwakke velden.

---

1) Vervolg der mededeeling in de Verslagen van April 1906.

2) VOIGT. Ann. d. Phys 1. p. 376. 1900.

3) LORENTZ. Verslagen Kon. Ak. v. Wetensch. November, December 1905.

4) ZEEMAN. ibid. December 1899. Archiv. Néerl. (2) T. 5. 237—242. 1900.

Het sterkste voorbeeld van asymmetrische splitsing, dat mij bekend is, komt voor bij een der gele kwiklijnen (5790). Van een lijn als deze zou een onderzoek der structuur met MICHELSON's interferometer ongeoorloofd zijn. Immers de onderstelling van symmetrie welke volgens RAYLEIGH [1]) noodig is om de structuur uit de zichtbaarheidskromme afteleiden is hier zeker niet vervuld.

3. Volgens de in het 1ste gedeelte nader beschreven methode heb ik met een groot concaaf tralie van ROWLAND, dat ik aan de Hollandsche maatschappij der wetenschappen verschuldigd ben, proeven genomen over het gedrag der lijn in sterke velden. Binnenkort hoop ik de uitkomsten van een onderzoek in zwakke velden met eene interferentie methode verkregen hierop te laten volgen.

Het bedoelde tralie heeft 10.000 lijnen per inch en een kromtestraal van 6.5 M., terwijl het gedeelde oppervlak 14 cm. breed is. Voor de door mij gebezigde methode is het eene voorwaarde dat het tralie stigmatisch is opgesteld. ROWLAND's concaaf tralie kan stigmatisch gebruikt worden op de wijze door RUNGE en PASCHEN [2]) aangegeven en werd bij een paar vroegere onderzoekingen reeds door mij, [3]) HALLO en GEEST [4]) aldus gebezigd.

De proeven waaromtrent ik hier eene mededeeling doe zijn alle verricht met het spectrum der $1^{ste}$ orde.

4. Terwijl de kwiklijn 5790 eene asymmetrische splitsing ondergaat, wordt de nabij gelegen lijn 5769 volkomen, of op uiterst weinig na, symmetrisch door het magnetische veld opgelost. Ik heb hiervan gebruik gemaakt om de optische methode van veldmeting (zie § 1) hier toe te passen, daar de genoemde gele lijnen gemakkelijk gelijktijdig gephotographeerd kunnen worden.

In Fig. 1 is eene ongeveer 9 malige vergrooting van een der negatieven opgenomen. Volgens de metingen van KAYSER en RUNGE [5]) bedraagt het verschil in golflengten der beide kwiklijnen 5790.49—5769.45 = 21.05 A. E. en dan komt met 1 m.M. in Fig. 1 een afstand van 0.551 A. E. overeen. Het is reeds in Fig. 1 duidelijk dat de lijn 5790 asymmetrisch wordt geplitst. Beter nog komt dit uit in de vergrootingen Fig. 2 en Fig. 3 van deelen van Fig. 1.

We wenschen te weten hoe het bij verschillende veldsterkten met het bestaan en het verloop der asymmetrie gesteld is.

---

1) RAYLEIGH. Phil. Mag. November 1892.

2) RUNGE en PASCHEN. Wied. Ann. Bd. 61. p. 641. 1897.

3) ZEEMAN. Archiv. Néerl. (2) T. 5. 237. 1900. Verslagen Ak. v. Wet. Mei 1902, Mei 1903, Dec. 1904.

4) HALLO. Archiv. Néerl. (2) T. 10. p. 148., GEEST. (2) T. 10 p. 291. 1905.

5) Ueber die Spektren der Elemente. IV. Berlin Akad. 1891.

De gang van het onderzoek was de volgende. Een negatief werd onder een comparateur zoodanig vastgelegd, dat de middellijn van een der tripletten juist tusschen de op kleinen onderlingen afstand aangebrachte evenwijdige draden in een der afleesmikroskopen begrepen was. De evenwijdige draden stonden loodrecht op de richting waarin het negatief bewogen kan worden. Het bleek dat indien bij een der tripletten de bedoelde instelling bereikt was, dit ook bij het andere het geval was. Een systeem kruisdraden, nog buitendien aangebracht, die elkaar onder een hoek van 50° snijden, diende voor de instelling bij de metingen en veroorloofde voor een willekeurig punt der lijnen de splitsing te bepalen.

Hierbij werd dan de splitsing voor één waarde der magnetische kracht bij de eene lijn gemeten en dadelijk daarna die in het correspondeerende punt der andere.

De splitsing der lijn 5769 bleek op zoo weinig na symmetrisch te zijn, dat zij als maat voor de magnetische kracht kon dienen.

In het geheel zijn 34 reeksen van metingen op de verkregen negatieven verricht. Zij hebben betrekking op verschillende punten van 10 negatieven die op verschillende tijden zijn opgenomen.

De gebezigde vacuum buisjes werden opzettelijk niet gelijkvormig gemaakt.

Evenzoo geschiedden de opnamen met verschillende maximale veldsterkten om de resultaten onderling te kunnen controleeren.

Eindelijk kan men de opnamen in twee groepen verdeelen, die verschilden door den stand van het tralie. Nadat 24 reeksen waren opgenomen besloot ik het tralie in zijn eigen vlak 180° te draaien ten einde na te gaan of dit eenigen invloed op de asymmetrie had.

Dit bleek niet het geval te zijn, maar wel veranderde op merkwaardige wijze de schijnbare intensiteitsverdeeling in de tripletten. Want terwijl bij den eenen stand van het tralie de figuren 1—5 werden opgenomen waarbij steeds de middelste component sterk en de buitenste zwakker waren, bleek na de draaiing de lichtverdeeling juist te zijn omgekeerd. Zij was dan die welke ik in eene vorige mededeeling aangaf. (Zie Fig. 1. der Verslagen van October 1907).

De middelste component was zeer zwak de uiterste zijn sterk.

5. De resultaten der metingen zijn op de volgende wijze behandeld. De bedragen der splitsing naar de zijde van het rood en naar die van het violet bij lijn 5790 worden als functien opgevat van de splitsing bij lijn 5769, welke aan de magnetische kracht evenredig mag gesteld worden. Men kan zich dan de splitsing bij lijn 5769 als abscis, de beide andere splitsingen als ordinaten voorgesteld denken.

Groepen van vier of vijf enkele nabij elkaar gelegen uitkomsten

werden eenvoudig zoodanig gecombineerd dat aan de gemiddelde abscis de gemiddelde ordinaat werd toegewezen.

De 2 × 7 aldus verkregen hoofdwaarden zijn in de eerste drie kolommen der volgende tabel weergegeven.

| Gemiddelde splitsing 5769 | Splitsing 5790 | | Asymmetrie | Veldsterkte in Gauss |
|---|---|---|---|---|
| | naar rood | naar violet | | |
| 270 | 234 | 259 | 25 | 14800 |
| 328 | 283 | 312 | 29 | 18020 |
| 362 | 313 | 345 | 32 | 19860 |
| 399 | 353 | 388 | 35 | 21910 |
| 440 | 394 | 431 | 37 | 24140 |
| 453 | 404 | 442 | 38 | 24880 |
| 532 | 475 | 523 | 48 | 29220 |

Al deze verschillen in golflengte zijn in duizendste deelen eener ÅNGSTRÖM eenheid gegeven.

De vierde kolom geeft op dezelfde wijze het bedrag der asymmetrie.

6. In de laatste kolom is de veldsterkte in Gauss opgenomen. Bij de berekening hiervan is aangenomen dat er evenredigheid tusschen splitsing en veldsterkte bestaat bij normale lijnen.

Naarmate de nauwkeurigheid der metingen is toegenomen kon deze evenredigheid met toenemende scherpte worden aangetoond en de onderzoekingen van FÄRBER [1]), WEISS en COTTON [2]), PASCHEN [3]) en STETTENHEIMER [4]) hebben deze eenvoudige wet tot een hoogen graad van zekerheid gebracht.

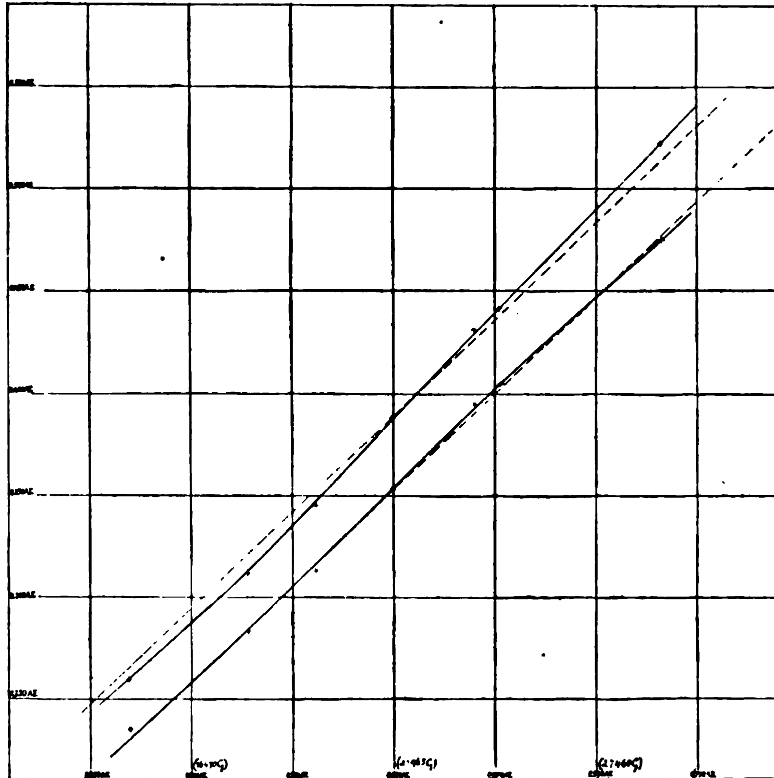
De getallen in de vijfde kolom zijn afgeleid met behulp van de door RUNGE en PASCHEN opgegeven splitsing van + 0.414 en — 0.415 A. E. voor de lijn 5769 in het voor hen gebruikte veld.

Volgens eene vriendelijke mededeeling van Prof. PASCHEN hebben de metingen van hem en RUNGE over de kwikzilverlijnen betrekking op een veld dat volgens de metingen van Frl. STETTENHEIMER 22750 Gauss, volgens nog niet gepubliceerde metingen van GMELIN 22780 bedraagt. Ik heb derhalve de waarde van 22765 en het gemiddelde der beide genoemde getallen voor de splitsing bij de reductie gebezigd.

1) FÄRBER. Diss. Tübingen, 1902; Ann. d. Phys. 9, 886, 1902.
2) WEISS en COTTON. Journal de Physique. Juin 1907.
3) PASCHEN. Physik. Zeitschr. 8 Jahrgang N°. 16. 522, 1907.
4) STETTENHEIMER. Diss. Tübingen, 1907; Ann. d. Phys. 24, 384, 1907.

7. In de volgende figuur zijn de uitkomsten grapisch voorgesteld. De abscissen zijn de splitsingen in A. E. van lijn 5769, en de correspondeerende veldsterkten in Gauss, de ordinaten de correspondeerende splitsingen van 5790. De kruisjes geven de in de tabel van § 5 gegeven waarnemingen aan.

De volgetrokken lijnen sluiten zich zoo goed mogelijk bij de waarnemingen aan. De gestippelde rechte lijnen hebben de volgende beteekenis.



Neemt men het gemiddelde van de 34 afzonderlijke waarden der asymmetrie dan volgt daarvoor 0.036 A. E. De onderste rechte stippellijn valt over een deel van hare lengte volkomen met de volgetrokken lijn samen en wijkt voor een ander deel slechts uiterst weinig daarvan af. De bovenste stippellijn is op een afstand van 36 duizendsten eener Ångström eenheid, langs de ordinaat gemeten, aan de andere rechte evenwijdig getrokken.

8. Als resultaat der proeven kan worden beweerd dat bij de gebezigde veldsterkten, liggende tusschen 15000 en 30000 Gauss er ongetwijfeld eene asymmetrie bestaat die in elk geval groote overeenkomst vertoont met de door Voigt uit de theorie afgeleide. Bij beide, de theoretische en de uit onze proeven volgende, is er verschil

in de afstanden tusschen de middelste en de beide uiterste componenten, en wel zoodanig dat de component naar den kant van het rood dichter bij de centrale component staat dan die naar den violetten kant, juist zooals door de theorie werd voorzien.

Ook bestaat er eene asymmetrie in *de intensiteit* tusschen de uiterste componenten in den zin der theorie.

Beziet men bijv. het oorspronkelijke negatief waarvan Fig. 1 eene 9-malige vergrooting is, of de reproductie Fig. 1, of nog duidelijker de afdrukken op photographisch papier van de 29-malige vergrooting, die in Fig. 2 wordt gegeven of ook zelfs die figuur dan is er eene zwakke asymmetrie in intensiteit zichtbaar. Men bemerkt deze misschien het duidelijkst wanneer men de figuur op een niet te kleinen afstand beziet, of de middelste component met een strookje papier bedekt. Deze asymmetrie is niet te bemerken bij lijn 5769, zie ook de vergrootingen Fig. 4 en Fig. 5 van de middenste en uiterste deelen dezer lijn op Fig. 1.

Van den anderen kant bestaat er in zooverre eene afwijking tusschen theorie en waarneming, dat het bedrag der asymmetrie niet constant schijnt. De tabel in § 5 en de graphische voorstelling geven duidelijk aan dat bij het dalen van de veldsterkte van 30000 op 15000 Gauss ook de asymmetrie bijna op de helft is gezonken. [1])

Wel zou het niet absoluut onwaarschijnlijk zijn (zie § 9) dat bij één afzonderlijk punt der bovenste lijn een fout is gemaakt die dit op de stippellijn doet komen, maar eene combinatie van fouten die zou maken dat waarden die op de bovenste stippellijn behoorden alle op de volgetrokken lijn zouden komen te liggen is wel uiterst onwaarschijnlijk.

Het gaat natuurlijk niet aan om uit het nu bekende stuk der bovenste lijn te willen afleiden of deze bij het verder dalen der magnetische kracht al dan niet asymptotisch op eenigen afstand van de onderste zal naderen.

9. Men kan zich ook de vraag stellen door welke rechte lijnen de beide puntreeksen het best worden weergegeven. Bij een puntenreeks kan men de loodrechte afstanden tusschen de punten en de lijn opmaken en de som der kwadraten der afstanden tot een minimum maken. De aldus bepaalde lijn is dan tevens de hoofdtraagheidsas voor het puntensysteem. [2])

---

[1]) Een iets langzamer daling, bij gelijk gemiddeld bedrag der asymmetrie wordt opgeleverd door eene goede reeks waarnemingen verricht na het indienen van dit stuk.

[2]) KARL PEARSON. On Lines and Planes of closest Fit to Systems of Points in space. Phil. Mag. p. 559. Vol. 2. 1901. Hierin: „The best fitting straight line for a system of points in a space of any order goes through the centroid of the system" vg. KEESOM. Verslagen. Kon Akad. Amsterdam, 31 Mei, 1902.

Voert men deze berekening uit dan blijkt het dat de best passende benedenste lijn gaat door het punt met de coordinaten 398, 351, met een helling bepaald door $\theta_1 = 43°6'$. Voor de bovenste lijn worden deze getallen 398, 386, terwijl $\theta_2 = 45°35'$ wordt.

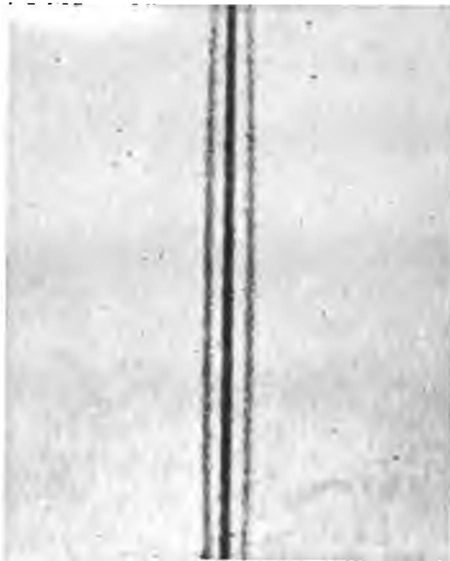
Om te beoordeelen met welke nauwkeurigheid deze rechte lijnen, waarvan dus de bovenste van de in de figuur § 7 getrokken moet verschillen, de waarnemingen weergeven dient de volgende tabel, waarin in de derde en vierde kolom, resp. zesde en zevende kolom de fouten zijn aangegeven, die men in de abscissen en ordinaten van de beide puntenreeksen moet aannemen indien men de rechte lijnen als juist beschouwd. Hierbij heeft de index 1 op de onderste, 2 op de bovenste lijn betrekking.

| Gemiddelde splitsing 5769 | Splitsing 5790 naar rood | $\Delta a_1$ | $\Delta o_1$ | Splitsing 5790 naar violet | $\Delta a_2$ | $\Delta o_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 270 | 234 | + 1.6 | — 1.8 | 259 | + 1.4 | — 1.3 |
| 328 | 283 | — 1.2 | + 1.4 | 312 | — 1.6 | + 1.6 |
| 362 | 313 | — 2.1 | + 2.2 | 345 | — 2 0 | + 2.0 |
| 399 | 353 | + 0.1 | — 0.1 | 388 | 0 | 0 |
| 440 | 394 | + 1.3 | — 1.5 | 431 | + 1.0 | — 0.9 |
| 453 | 404 | + 0.2 | — 0.2 | 442 | 0 | 0 |
| 532 | 475 | — 1.0 | + 1.2 | 523 | 0 | 0 |

Het blijkt dat de lijnen de waarnemingen volledig weergeven, wanneer men eene gemiddelde onzekerheid van 0.0013 A. E. in de metingen bij lijn 5769 en van 0.0014 A. E, resp. van 0.0011 A. E. bij de componenten naar rood resp. naar violet bij lijn 5790 kan aannemen; men moet dit aannemen, zooals uit de verdeeling der afwijkingen blijkt.

10. Eén punt van iedere lijn kan men nog vergelijken met de uitkomsten van de metingen van Runge en Paschen. Zij geven op dat de splitsing bij 5769 naar rood resp. naar violet $+ 414 \pm 1.7$, resp. $- 415 \pm 1.7$ bedraagt, terwijl bij dezelfde velsterkte voor 5790 deze getallen zijn $+ 366 \pm 6.7$ resp. $399 \pm 6.7$ indien de getallen achter het $\pm$ teeken de middelbare fouten aangeven. Volgens onze krommen behooren bij de abscis 415 de ordinaten 368 en 403, dus eene voortreffelijke overeenstemming.

Fig. 2.



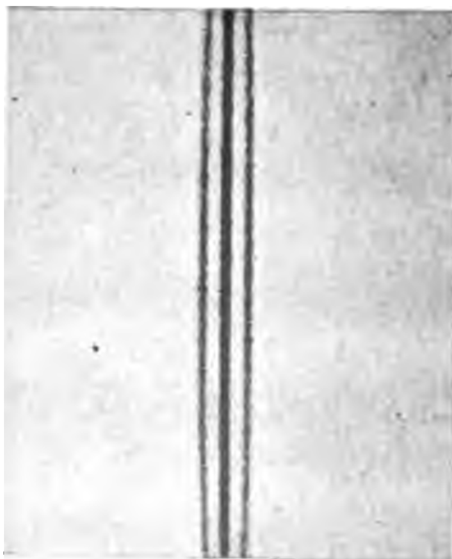

5790
Vergrooting van middendeel van
Fig. 1. 5790.

Fig. 3.



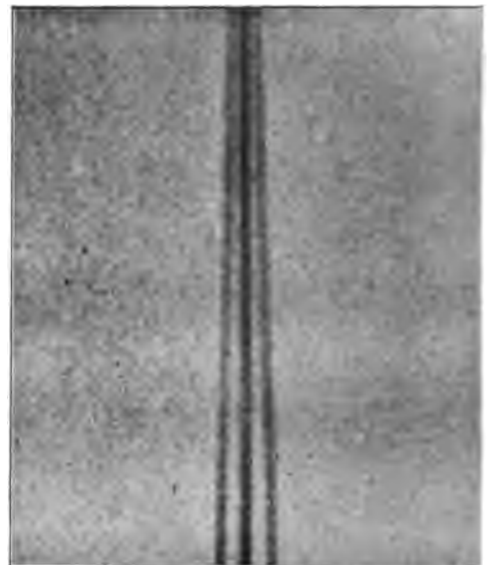

5790
Vergrooting der punt van
Fig. 1. 5790.

Fig. 4.




5769
Vergrooting van middendeel van
Fig. 1. 5769.

Fig. 5.



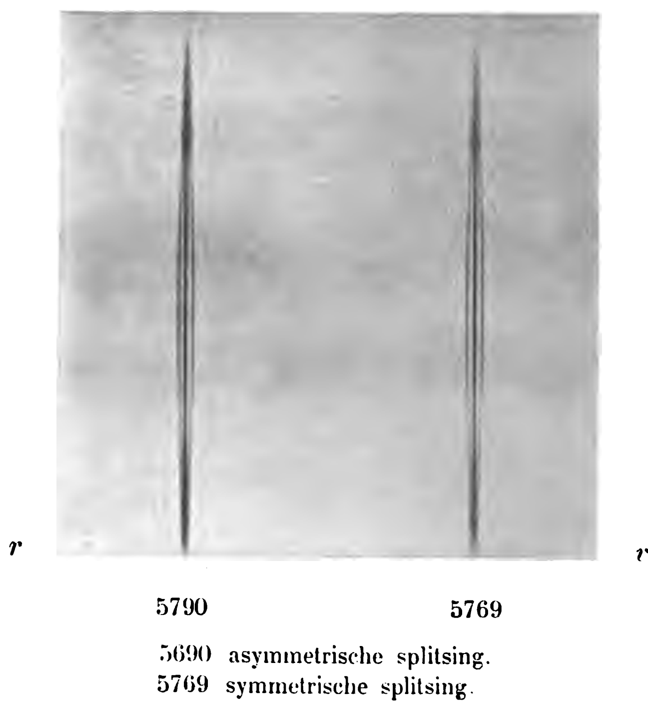

5769
Vergrooting der punt van
Fig. 1. 5769.

**P. ZEEMAN. „Magnetische splitsing der spectraallijnen en veldsterkte."**

**(2de gedeelte.)**

**Plaat II.**

Fig. 1.




5690 asymmetrische splitsing.
5769 symmetrische splitsing.

11. Uit het uiterst geringe bedrag der asymmetrie n.l. 0.036 A. E. zou men door eene vergelijking met de breedte der spectraallijnen in onze figuren misschien willen besluiten dat de asymmetrie slechts een klein breukdeel is van de breedte eener spectraallijn. Intusschen zou zulk een besluit te haastig zijn.

Wel volgt uit de figuren eene schijnbare breedte van de uiterste componenten van ongeveer 0.19 A. E. Echter is de opname voor Fig. 1 niet bij oneindig nauwe spleet geschied, maar had deze eene breedte van 0.08 mm. Andere opnamen geschiedden bij een spleetwijdte van 0.02 mm. ook dan vindt men niet veel minder voor de breedte der spectraallijn.

Veiliger schijnt het eene bepaling te gebruiken die ik met een echelon spectroscoop van groot oplossend vermogen heb gedaan terwijl de kwikbuis in dezelfde omstandigheden verkeerde. Ik bepaalde de breedte der spectraallijn op ongeveer $^1/_{11}$ deel van den afstand van twee opvolgende orden in den echelon. Daar deze 0.694 A. E. bedraagt in de buurt der Hg-lijnen zoo wordt dus de breedte der gele Hg-lijnen in het magnetisch veld ongeveer $\frac{0.694}{11} = 0.063$ A. E.

Hiermede kan men nog vergelijken een waarde welke men ontleenen kan aan bepalingen van MICHELSON. MICHELSON [1]) heeft n.l. met den interferometer gevonden dat in een veld van 10000 Gauss de totale splitsing voor de gele kwiklijnen 0.36 A. E. bedraagt. Uit zijne figuur op pag. 354 l. c. kan men ontnemen dat de breedte der spectraallijn één vierde gedeelte van de splitsing bedraagt dus 0.09 A. E. was.

Neemt men dus een gemiddelde waarde voor de breedte van 0.07 A. E. aan, dan komt men tot de conclusie dat de gevonden asymmetrie ongeveer de helft van de breedte der lijn bedraagt of althans van dezelfde orde van grootte als deze is.

## VERKLARING DER PLATEN II EN III.

Plaat II. Fig. 1. De figuur is eene ongeveer 9-malige vergrooting van het oorspronkelijk negatief. De gele kwiklijnen 5790 en 5769 in ongelijkmatig veld. 1 mm. op de figuur is 0.551 A. E.

Plaat III. Fig. 2—5. zijn 29-maal vergroot naar het origineel.

| | |
|---|---|
| Fig. 2. Middendeel van de lijn 5790 in Fig. 1. | asymmetrische splitsing. |
| Fig. 3. Punt van de lijn 5790 in Fig. 1. | |
| Fig. 4. Middendeel van de lijn 5769 in Fig. 1. | symmetrische splitsing. |
| Fig. 5. Punt van de lijn 5769 in Fig. 1. | |

De letter *r* en *v* geven aan aan welken kant het rood en het violet liggen.

---

1) MICHELSON. Phil. mag. Vol. 45, p. 348. 1898.

**Aardkunde.** — De Heer WICHMANN biedt eene mededeeling aan van den Heer J. SCHMUTZER: „*Over de scheeve uitdooving van rhombische kristallen.*"

(Mede aangeboden door den Heer G. A. F. MOLENGRAAFF).

Nog in 1901 heeft ALFRED HARKER er in eene korte mededeeling[1]) op gewezen, dat bij rhombische kristallen de scheeve uitdooving op vlakken, die een kleinen hoek met de *c*-as maken, alleen dan te verwaarloozen is, wanneer de hoek der optische assen een geringe waarde bezit. Dat dit niet overbodig was, is misschien voor een deel hieraan toe te schrijven, dat men zich met de toepassing der theoretisch afgeleide resultaten omtrent de uitdooving van kristaldoorsneden beperkt heeft tot monokliene en trikliene mineralen, bij voorkeur de veldspaten. [2]) Op de omstandigheid, dat rhombische mineralen als regel scheef uitdooven en slechts *bij uitzondering* eene rechte uitdooving vertoonen, schijnt daarom niet voldoenden nadruk te zijn gelegd, al is het feit natuurlijk bekend. [3]) Vandaar dat nog in de jongere petrographische literatuur vaak tot staving der rhombische natuur van een mineraal wordt aangevoerd, dat alle doorsneden daarvan ‚recht' uitdooven, terwijl bij deels rechte, deels scheeve uitdooving der kristaldoorsneden het bewijs voor een monokliene natuur wordt beschouwd te zijn geleverd. [4]) Een scheiding van rhombische en monokliene pyroxenen, olivien en diopsied, zoïsiet en klinozoïsiet op grond van het karakter der uitdooving is niet door te voeren, slechts bij kleine assenhoeken verkrijgt dit kenmerk waarde als onderscheidingsmiddel. Het aantreffen van aanzienlijke uitdoovingen ten opzichte van een bijzonder goed ontwikkelde pinakoïdale splijting bij olivien was de eerste aanleiding tot de berekening der uitdoovingshoeken voor dit mineraal, terwijl tot vergelijking

---

1) Mineralogical Magazine, XIII, 1903, p. 66—68.

2) MICHEL LÉVY, Ann. d. Mines, (7), XII, 1877, p. 392—471, Ref. Zeitschr. f. Kryst. III, 1879, 217—231; Minéraux des Roches, 1888. p. 9 vv.; FOUQUÉ en MICHEL LÉVY, Minéralogie Micrographique, Paris 1879; A. HARKER, Min. Mag. X, 1893, p. 239—240; G. CÉSARO, Mém. cour. Acad. Roy. Belg. LIV, 1895; DALY, Proc. Americ. Acad. Arts a. Sc. XXXIV, 1899, p. 311—328; A. A. FERRO, Riv. di Min., Padua XX, 1898; Atti Soc. Lig. di Sc. nat. Genova, IX, 1898, Ref. Zeitschr. f. Kryst. XXXII, 1900, 532; VICENTE DE SOUSA BRANDÃO, Communicações da direcção d. serviç. geol. de. Portug. IV, 1901, 13—126.

3) Vgl. o.a. FOUQUÉ et MICHEL LÉVY, Minéralogie Micrographique, p. 55—57.

4) Vgl. LACROIX, over Fouqueït in Contributions à l'étude des gneiss à pyroxène et des roches à wernérite, Bull. Soc. franç. de Minéralogie XII, Paris 1889, p. 328.

met de daaruit gewonnen resultaten dezelfde berekeningen nog zijn uitgevoerd voor talk.

*Olivien en Talk.*

Zij $O$ de doorsnijding van de scherpe bissectrix met den projectiebol $\rho = 1$, $A$ en $B$ de projecties van de optische assen, $ZO$ de as van een zone, waaruit $ZQb$ een willekeurig vlak met zijn pool $N$ voorstelt, dan wordt volgens FRESNEL de uitdooving op het vlak $ZQb$ ten opzichte van de zone-as gegeven door den boog $Zc$, wanneer het vlak $cN$ den hoek $BNA$ middendoor deelt. Noemen wij $\frown OQ$, de helling van het vlak $(N)$ ten opzichte van de scherpe bissectrix, $x$, en den uitdoovingshoek ten opzichte van de zone-as, $\frown Zc = y$, dan kan volgens MICHEL LÉVY [1]) de waarde van $y$ berekend worden uit de betrekking:

$$cot\, 2y = cot\,(aZ + bZ).$$



Fig. 1.

$$\frown aZ = \frac{\pi}{2} - \angle ANa'.$$

In den rechthoekigen $\Delta ANa'$ is nu

$$tg\, ANa' = \frac{tg\, Aa'}{sin\, Na'} = \frac{cot\, \mu}{cos\,(x + \gamma)}$$

zoodat:

$$tg\, aZ = cot\, ANa' = tg\, \mu\, cos\,(x + \gamma).$$

---

[1]) Les Minéraux des Roches, p. 9.

Op gelijke wijze vindt men:

$$tg\, bZ = tg\, \nu \cos(x - \gamma).$$

Nu is

$$\cot 2y = \cot(aZ + bZ) = \frac{1 - tg\, aZ\, tg\, bZ}{tg\, aZ + tg\, bZ} = \frac{1 - tg\, \mu\, tg\, \nu \cos(x+\gamma)\cos(x-\gamma)}{tg\, \mu \cos(x+\gamma) + tg\, \nu \cos(x-\gamma)} \quad . \ (1)$$

Zooals in de figuur is aangegeven wordt hier het bijzondere geval beschouwd, dat de zone-as ligt in het vlak, dat ⊥ op de scherpe bissectrix staat, zoodat $\mu + \nu = \pi$. Laat men de zone-as successievelijk verschillende van 0 tot $\pi$ varieerende hoeken $a$ met $OP$ maken, en laat men het vlak tevens om deze as een wenteling uitvoeren, dan doorloopt $N$ het geheele oppervlak van den bol en kan dus voor elke willekeurige snede door het kristal de uitdooving ten opzichte van $OZ$ berekend worden als functie van $a$ en $x$.

Daar $\mu + \nu = \pi$, kan de formule (1) als volgt vereenvoudigd worden:

$$\cot 2y = \frac{1 + tg^2 \mu \cos(x+\gamma)\cos(x-\gamma)}{tg\, \mu\, [\cos(x+\gamma) - \cos(x-\gamma)]}$$

waaruit men bij uitwerking vindt:

$$\cot 2y = \frac{-(\cos^2 \mu + \sin^2 \mu \cos^2 \gamma) + \sin^2 \mu \sin^2 x}{\sin 2\mu \sin \gamma \sin x} =$$

$$= -\frac{\cos^2 \mu + \sin^2 \mu \cos^2 \gamma}{\sin 2\mu \sin \gamma} \cdot \frac{1}{\sin x} + \frac{\sin^2 \mu}{\sin 2\mu \sin \gamma} \cdot \sin x \quad . \ . \ (2)$$

$$= \frac{A}{\sin x} + B \sin x \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

Nu is in $\Delta\, ZOA$ $\cos \mu = \sin OA \cos a = \sin V \cos a$

en in $\Delta\, ZPA$ $\cos \angle AZP = \dfrac{tg\, PZ}{tg\, AZ}$

of

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin \gamma = \frac{tg\, a}{tg\, \mu}.$$

Vervangt men in (2) $\mu$ en $\gamma$ door de waarden in $a$ en $V$, dan wordt:

$$\cot 2y = -\frac{1 - \sin^2 \mu \sin^2 \gamma}{\sin 2\mu \sin \gamma} \cdot \frac{1}{\sin x} + \frac{\sin^2 \mu}{\sin 2\mu \sin \gamma} \cdot \sin x =$$

$$= -\frac{1 - tg^2 a \cos^2 \mu}{2 \cos^2 \mu\, tg\, a} \cdot \frac{1}{\sin x} + \frac{1 - \cos^2 \mu}{2 \cos^2 \mu\, tg\, a} \cdot \sin x =$$

$$= -\frac{1 - \sin^2 V \sin^2 a}{\sin 2a \cdot \sin^2 V} \cdot \frac{1}{\sin x} + \frac{1 - \sin^2 V \cos^2 a}{\sin 2a \sin^2 V} \cdot \sin x \quad . \ . \ (4)$$

Uit dezen vorm kan men het volgende afleiden. Voor $x = 0$ wordt

$y = \frac{\pi}{2}$ voor alle waarden van $\alpha$, en hetzelfde heeft plaats bij $\alpha = 0$ voor alle waarden van $x$. Op alle vlakken evenwijdig aan de scherpe of aan de stompe bissectrix is dus de uitdooving ten opzichte dezer bissectrices recht. Wanneer de richting van den middelsten brekingsindex ($OR$) zoneas wordt, bij $\alpha = \frac{\pi}{2}$, treedt er eene bijzonderheid op. Voor deze waarde van $\alpha$ neemt (4) den volgenden vorm aan:

$$\cot 2y = \frac{1}{\underset{(2\alpha=\pi)}{\sin 2\alpha}}\left(-\frac{1-\sin^2 V}{\sin^2 V}\cdot\frac{1}{\sin x}+\frac{\sin x}{\sin^2 V}\right)=$$

$$=\frac{1}{\underset{(2\alpha=\pi)}{\sin 2\alpha}}\left(-\frac{\cos^2 V}{\sin^2 V.\sin x}+\frac{\sin x}{\sin^2 V}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Voor $x = 0$ wordt dus $y = \frac{\pi}{2}$.

Voor $x = \frac{\pi}{2} - V$ gaat (5) over in:

$$\cot 2y = \frac{1}{\underset{(2\alpha=\pi)}{\sin 2\alpha}}\left(-\frac{\cos V}{\sin^2 V}+\frac{\cos V}{\sin^2 V}\right)=\frac{0}{0}.$$

$y$ wordt onbepaald; de pool $N$ van het vlak valt op dit oogenblik samen met een optische as.

Voor $x = \frac{\pi}{2}$ eindelijk wordt $y = 0°$. De uitdooving is dus $\frac{\pi}{2}$ voor een waarde van $x$ tusschen 0° en $\frac{\pi}{2} - V$, wordt dan onbepaald en blijft 0° voor $x = \frac{\pi}{2} - V$ tot $\frac{\pi}{2}$, zooals het teeken van $\cot 2y$ leert.

Wat betreft de waarden van $y$ in het algemeen, kan dit worden opgemerkt. In (4) is steeds, wanneer $\frac{\pi}{2} > V > 0$ wordt aangenomen,

$$1 \geqq 1 - \sin^2 V \sin^2 \alpha > 0$$
$$1 \geqq 1 - \sin^2 V \cos^2 \alpha > 0$$

Voor een bepaalde waarde van $\alpha$ houdt $\cot 2y$ hetzelfde teeken, wanneer $x$ variëert tusschen 0 en $\pi$, verkrijgt echter negatieve waarden voor $x$ tusschen 0 en $-\pi$. Bepalen wij ons tot een variatie van $x$ tusschen de grenzen 0 en $\frac{\pi}{2}$, dan wordt voor de waarden van $\alpha$, begrepen tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$, het teeken van $\cot 2y$ negatief, voor

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ echter positief, terwijl de absolute waarden van $y$ gelijk zijn voor twee polen, die symmetrisch liggen ten opzichte van het vlak $RO$. Geheel hetzelfde geldt voor de uitdooving op vlakken, die symmetrisch liggen ten opzichte van het vlak $OP$, zoodat de op den bol getrokken isogyren symmetrisch zullen verloopen ten opzichte der vlakken $RO$, $OP$ en eveneens $RP$. Evenals de symmetrie ten opzichte van $RO$ en $OP$ samengaat met een omdraaiing van teeken, is dit ook voor het vlak $RP$ het geval.

De uitdooving ten opzichte van de variabele zoneas $OZ$ is gemakkelijk te herleiden tot die ten opzichte van de scherpe bissectrix, daar deze laatste gegeven wordt door $\angle\, ONc = \frown Qc = \frac{\pi}{2} - y = y'$.

$$y = \frac{\pi}{2} - y'$$

$$\cot 2y = \cot (\pi - 2y') = -\cot 2y'.$$

waaruit volgens (3) volgt;

$$\cot 2y' = -\frac{A}{\sin x} - B \sin x \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad . \ (6)$$

waarin:

$$A = -\frac{\cos^2 \mu + \sin^2 \mu \cos^2 \gamma}{\sin 2\mu \sin \gamma}$$

$$B = \frac{\sin^2 \mu}{\sin 2\mu \sin \gamma}.$$

Voor de bepaling der maximale uitdooving ten opzichte van de scherpe bissectrix bij $x =$ constant en een variabelen hoek $\alpha$ kan men als volgt te werk gaan [1]). Noemt men $\angle\, ANO = \psi$, $\angle\, BNO = \psi'$, dan vindt men uit de driehoeken $ANO$ en $BNO$:

$$tg\, \psi = \frac{\sin \angle\, AON}{\sin ON \cot V - \cos ON \cos \angle\, AON} =$$

$$= \frac{\sin V \cos \alpha}{\cos x \cos V - \sin x \sin V \sin \alpha}.$$

en

$$tg\, \psi' = \frac{\sin V \cos \alpha}{\cos V \cos x + \sin V \sin x \sin \alpha}.$$

Nu is $2y' = \psi - \psi'$

$$tg\, 2y' = tg\, (\psi - \psi') = \frac{-2 \sin^2 V \sin \alpha \cos \alpha \sin x}{\sin^2 V \cos^2 \alpha + \cos^2 V \cos^2 x - \sin^2 V \sin^2 \alpha \sin^2 x},$$

hetgeen, uitgewerkt, geeft:

---

1) A. Harker, Min. Mag. XIII, 1903, p. 66—67.

$$\cot^2 \alpha\,(\sin^2 V + \cos^2 V \cos^2 x) - 2 \cot \alpha \sin^2 V \sin x \cot 2y' + (\cos^2 x - \sin^2 V) = 0$$

$$\cot \alpha = \frac{\sin^2 V \sin x \cot 2y'}{\sin^2 V + \cos^2 V \cos^2 x} \pm$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{\sin^2 V \sin x \cot 2y'}{\sin^2 V + \cos^2 V \cos^2 x}\right)^2 - \left(\frac{\cos^2 x - \sin^2 V}{\sin^2 V + \cos^2 V \cos^2 x}\right)}.$$

Zoolang de tweede term kleiner blijft dan de eerste, waartoe de voorwaarde is, dat $\cos x > \sin V$, dus $x < \frac{\pi}{2} - V$, zal deze vergelijking twee positieve wortels leveren, en zullen er dus 2 waarden van $\alpha$ tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$ aan voldoen bij een gegeven waarde van $2y$ kleiner dan het maximum. De uitdooving zal het maximum bereikt hebben, als beide wortels evengroot zijn, dus als

$$(\sin^2 V \sin x \cot 2y')^2 = (\sin^2 V + \cos^2 V \cos^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 V)$$

of wel:

$$\sin 2y'_{max} = \frac{\sin V \, tg\, V}{\cos x \cot x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

terwijl de bijbehoorende waarde van $\alpha$ [1]) gevonden wordt uit

$$\cot \alpha_{max} = \frac{\sin^2 V \sin x \cot 2y'_{max}}{\sin^2 V + \cos^2 V \cos^2 x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Het vlak $ON$, waarin de bijbehoorende pool ligt, maakt dan met het vlak $OP$ een hoek $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Neemt men voor olivien de waarde $2V = 87°$ aan [2]), dan levert de berekening volgens bovenstaande formules de volgende cijfers:

TABEL I.

| $x$ | $\mu$ | $\gamma$ | $A$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|
| 15° | 48°19′ 35″ | 13°48′ 20″ | —4.0052 | 2.3539 |
| 30 | 53 24 25 | 25 23 10 | —2.1480 | 1.5708 |
| 45 | 60 52 23 | 33 51 47 | —1.6103 | 1.6103 |
| 60 | 69 52 7 | 39 25 0 | —1.5708 | 2.1482 |
| 75 | 79 44 14 | 42 20 39 | —2.3548 | 4.0868 |

1) $\alpha_{(y'=max)}$ is overal, daar het geen aanleiding tot dubbelzinnigheid kon geven, verkort als $\alpha_{max}$ aangeduid.

2) Min. d. Roches, p. 248.

waaruit de volgende uitdoovingen ten opzichte van de scherpe bissectrix worden berekend:

TABEL II.

| $x$ | Waarden van $y'$ bij $\alpha =$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha = 15°$ | $\alpha = 30°$ | $\alpha = 45°$ | $\alpha = 60°$ | $\alpha = 75°$ |
| 15° | 1°53′ 6″ | 3°36′ 38″ | 4°53′ 14″ | 5° 8′ 26″ | 3°32′ 41″ |
| 30 | 4 4 28 | 7 56 59 | 11 14 42 | 12 54 21 | 10 16 52 |
| 45 | 6 49 59 | 13 42 48 | 20 38 46 | 27 27 29 | 33 6 56 |
| 60 | 10 14 10 | 20 52 53 | 32 32 7 | 46 20 3 | 64 40 45 |
| 75 | 13 32 29 | 27 22 46 | 41 47 36 | 57 4 59 | 73 14 21 |
| 90 | 15 (+18″) | 30 (+11″) | 45 | 60 (—4″) | 75 (—1″) |

De door berekening voor $y'$ gevonden waarden bij $x = 90°$, welke dus de uitdoovingslimiet ten opzichte van de scherpe bissectrix op het loodrecht op deze laatste staande vlak voorstellen, geven een maat voor de nauwkeurigheid der gevonden waarden. De fouten bedragen succ. + 18″, + 11″, 0″, — 4″ — 1″.

Uit de formules (7) en (8) is nu de maximale uitdooving voor verschillende waarden van $x$ met den bijbehoorenden hoek $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ te berekenen; men verkrijgt het volgend resultaat:

| $x$ | $y'_{max}$ | $\frac{\pi}{2} - \alpha$ |
|---|---|---|
| 15° | 5°13′ 12″ | 34°36′ 4″ |
| 30 | 12 54 29 | 29 25 6 |
| 45 | 33 44 35 | 10 40 21 |
| $\frac{\pi}{2} - V =$ 46°30′ | 45° | 0° |

Om uit

$$\cot \alpha_{max} = \frac{\sin^2 V \sin x \cot 2y'_{max}}{\sin^2 V + \cos^2 V \cos^2 x}$$

de waarde van $\alpha_{max}$ te berekenen wanneer $\sin x = 0$, elimineert men $y'$.

Daar

$$\sin 2y'_{max} = \frac{\sin V \, tg \, V}{\cos x \, \cot x}$$

wordt

$$\cot a_{max} = \frac{\dfrac{\sin^2 V \sin x \sqrt{1 - \left(\dfrac{\sin V \, tg \, V}{\cos x \, \cot x}\right)^2}}{\dfrac{\sin V \, tg \, V}{\cos x \, \cot x}}}{\sin^2 V + \cos^2 V \cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sin^2 V \sin x \sqrt{\cos^2 x \cot^2 x - \sin^2 V \, tg^2 \, V}}{\sin V \, tg \, V (\sin^2 V + \cos^2 V \cos^2 x)} =$$

$$= \frac{\sin x \cos V \sqrt{\dfrac{\cos^4 x}{\sin^2 x} - \dfrac{\sin^4 V}{\cos^2 V}}}{\sin^2 V + \cos^2 V \cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sqrt{\cos^4 x \cos^2 V - \sin^2 x \sin^4 V}}{\sin^2 V + \cos^2 V \cos^2 x} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Bij $x = 0$, is

$$\cot a_{max} = \pm \cos V.$$

Waaruit voor olivien de waarde volgt:

$$\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = bg \, tg \, (\pm) \cos V =$$

$$= bg \, tg \, (\pm) \cos 43°30'$$

$$= (\pm) \, 35°57'22''.$$

In de volgende figuur zijn deze resultaten graphisch samengesteld. De doorgetrokken lijnen verbinden de polen van vlakken met gelijke positieve, de gestippelde van vlakken met gelijke negatieve uitdooving. Daarbij zijn de hoeken positief gerekend van af de scherpe bissectrix met de wijzers van een uurwerk mede; negatief in tegengestelden zin.

De krommen $MM'$ en $NN'$, die door de optische assen gaan, verbinden de polen der vlakken met maximale (positieve en negatieve) uitdooving bij gelijke helling ten opzichte van de scherpe bissectrix. Het punt, waarin genoemde krommen een isogyr snijden, bezit op die isogyr den grootsten boogafstand van $O$. Overigens behoeft aan wat uit de figuur te lezen is, weinig te worden toegevoegd. Zij doet ten duidelijkste zien, dat een uitdooving ten opzichte van de scherpe bissectrix, welke weinig van 0° afwijkt, beperkt is tot de onmiddellijke nabijheid van de hoofdvlakken van symmetrie.

Fig. 2.

Voor talk ($2\,V = 13°$) [1]) werden op dezelfde wijze de volgende waarden berekend :

---

[1]) Hintze, Handbuch der Mineralogie, II, 1897, p. 815, cf. Bauer, Pogg. Ann. 1869, CXXXVIII, 368.

| α | μ | γ | A | B |
|---|---|---|---|---|
| 15° | 83°43′ 21″ | 1°42′ (± 1′) | — 156.05 | 154.32 |
| 30 | 84 22 26 | 3 15 | — 89.846 | 89.268 |
| 35 | 84 40 45 | 3 44 | — 82.815 | 82.45 |
| 40 | 85 1 25 | 4 11 | — 78.895 | 78.718 |
| 45 | 85 24 31 | 4 36 | — 77.628 | 77.628 |
| 50 | 85 49 38 | 4 59 | — 78.717 | 78.891 |
| 55 | 86 16 38 | 5 20 | — 82.31 | 82.672 |
| 60 | 86 45 19 | 5 38 | — 89.268 | 89.846 |
| 65 | 87 15 5 | 5 53 30″ | — 100.62 | 101.46 |
| 70 | 87 46 48 | 6 6 | — 120.16 | 121.38 |
| 75 | 88 19 16 | 6 16 30 | — 154.32 | 156.05 |
| 80 | 88 52 25 | 6 24 | — 225.49 | 228.14 |
| 85 | 89 26 4 | 6 28 30 | — 443.61 | 449.28 |

waaraan de uitdoovingen beantwoorden:

| x | α = 15 | α = 30 | α = 35 | α = 40 | α = 45 | α = 50 | α = 55 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 0° 3′ 4″ | 0° 4′ 54″ | — | — | 0° 6′ 9″ | — | — |
| 30 | 0 7 9 | 0 12 44 | — | — | 0 14 46 | — | — |
| 45 | 0 8 12 | 0 26 53 | — | — | 0 31 19 | — | — |
| 60 | 0 36 55 | 1 4 59 | — | — | 1 16 39 | — | — |
| 70 | 1 21 38 | 2 26 12 | 2°40′ 54″ | 2°51′ 34″ | 2 57 13 | 2°57′ 48″ | 2°52′ 14″ |
| 75 | 2 17 13 | 4 11 16 | 4 39 53 | 5 1 35 | 5 15 26 | 5 21 1 | 5 17 6 |
| 80 | 4 23 11 | 8 24 35 | 9 31 30 | 10 33 35 | 11 23 43 | 12 1 43 | 12 24 4 |
| 85 | 9 27 9 | 19 10 28 | 22 33 26 | 26 2 27 | 29 36 9 | 33 23 25 | 37 31 53 |
| 90 | 15°(+53″) | 30°(—50″) | — | — | 45° | — | — |

| $x$ | $\alpha = 60$ | $\alpha = 65$ | $\alpha = 70$ | $\alpha = 75$ | $\alpha = 80$ | $\alpha = 85$ | $\alpha = 90$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 0° 5′ 21″ | — | — | 0° 3′ 14″ | — | — | 0° |
| 30 | 0 12 52 | — | — | 0 7 28 | — | — | 0 |
| 45 | 0 27 21 | — | — | 0 15 56 | — | — | 0 |
| 60 | 1 7 57 | — | — | 0 39 55 | — | — | 0 |
| 70 | 2 41 57 | 2°29′ 6″ | 2° 4′ 20″ | 1 7 40 | 1° 7′ 27″ | 0°34′ 26″ | 0 |
| 75 | 5 1 13 | 4 35 53 | 3 58 51 | 3 9 35 | 2 12 10 | 1 7 58 | 0 |
| 80 | 12 19 51 | 11 53 14 | 10 58 49 | 9 9 38 | 6 42 42 | 3 33 47 | 0 |
| 85 | 41 34 43 | 46 43 1 | 53 20 59 | 59 24 19 | 67 38 33 | 78 3 57 | 90 |
| 90 | 60°(+51″) | — | — | 75°(— 8″) | — | — | 90° |

Voor de maximale uitdooving en bijbehoorenden hoek vindt men:

| $x$ | $y'_{max.}$ | $\frac{\pi}{2} - \alpha$ |
|---|---|---|
| 0° | 0° | 44°48′ 56″ |
| 15 | 0° 6′ 9″ | 44 48 31 |
| 30 | 0 14 47 | 44 41 24 |
| 45 | 0 31 21 | 44 27 2 |
| 60 | 1 16 50 | 43 38 28 |
| 75 | 5 21 33 | 39 38 9 |
| $\frac{\pi}{2} - V =$ 83°30′ | 45° | 0° |

Fig. 3 geeft van de uitkomsten een overzicht. Stelt men het gedeelte van het boloppervlak, dat buiten den parallelcirkel van 60° nog binnen de isogyr van 1° valt, ruwweg gelijk aan het deel, dat binnen dienzelfden cirkel buiten de isogyr valt, dan blijkt, dat op ongeveer $^7/_8$ van den bol een uitdooving van minder dan 1° wordt waargenomen, dus practisch een rechte uitdooving. De sneden nu, die grootere uitdoovingen opleveren, liggen verder zoozeer in de nabijheid van de vlakken, die loodrecht op de optische assen staan, dat zij voor het grootste deel onbruikbaar zijn voor de bepaling der uitdoovingsrichting. De vergelijking der figuren 2 en 3 levert het resultaat,

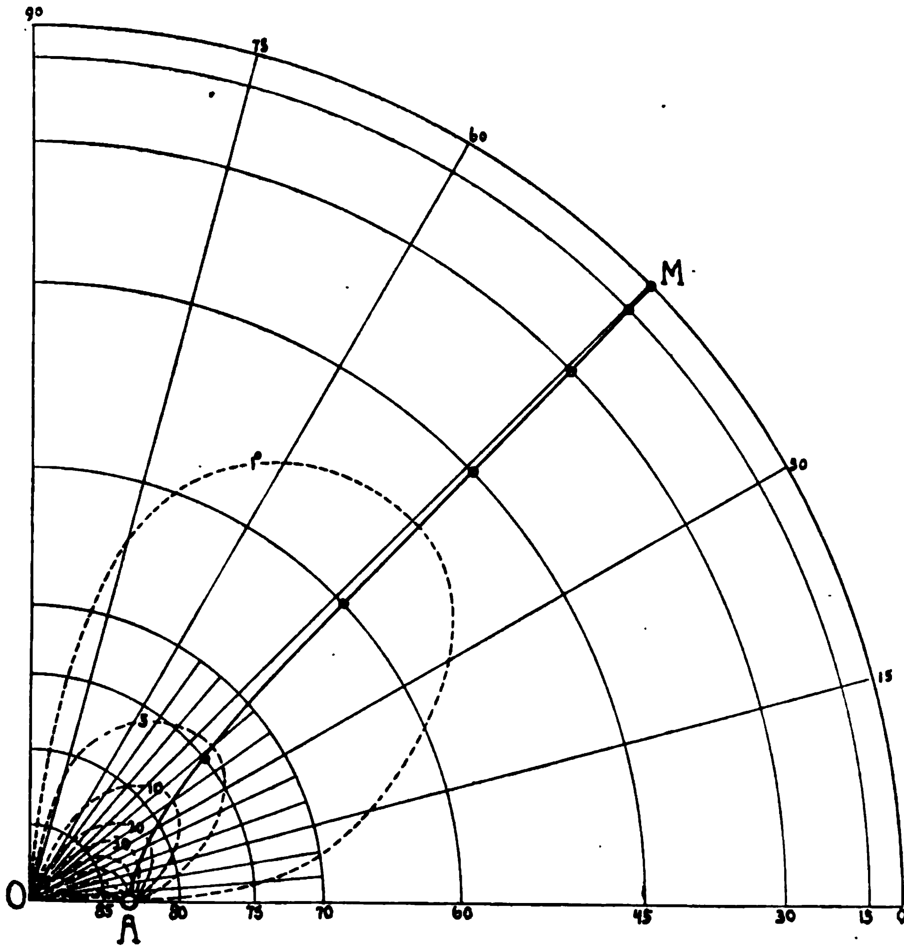



Fig. 3.

dat bij rhombische kristallen met een grooten assenhoek de scheeve, bij die met een kleinen assenhoek de „rechte" uitdooving zal domineeren, wanneer men met willekeurige sneden, zooals in een gesteentepraeparaat, te doen heeft. Het aantreffen van een absoluut rechte uitdooving is echter in beide gevallen even zeldzaam. Bij hexagonale en tetragonale kristallen komt echter uitsluitend rechte uitdooving ten opzichte van de optische as voor, daar voor $V = 0$ de vergelijking (4)

$$\cot 2y = \frac{1}{\sin^2 V}\left(-\frac{1-\sin^2 V \sin^2 a}{\sin 2a}\cdot\frac{1}{\sin x}+\frac{1-\sin^2 V.\cos^2 a}{\sin 2a}\sin x\right)$$

steeds $\infty$ wordt.

In fig. 4 is de maximale uitdooving als functie van $x$ voor één boloctant voorgesteld; $MA_1$ heeft betrekking op talk, $MA_2$ op olivien, $MA_3$ op een mineraal met een assenhoek $2V = 160°$. De waarden

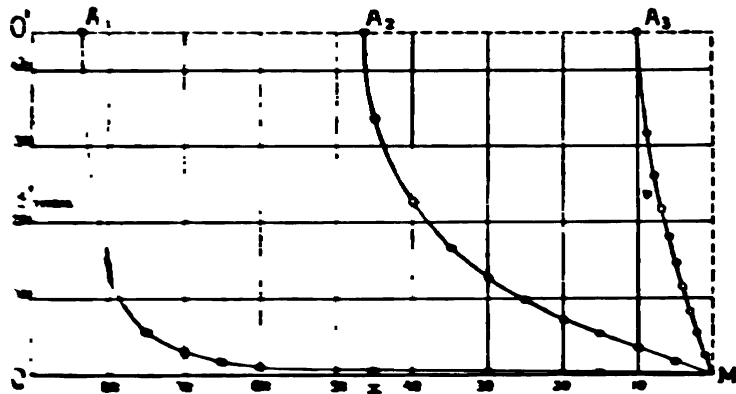



Fig. 4.

[illegible] geven de grootte van $\Gamma$. De algemeene vergelijking der krommen [illegible] is

[illegible]

waaruit:

[illegible] (10)

[illegible] gegeven door:

[illegible]

[illegible] De raaklijnen in [illegible]

[illegible] de stijging van de kromme [illegible] maarmate de [illegible] Wordt $\Gamma = 0$, [illegible] dan wordt ook

$$\frac{dy'_{max}}{dx} = 0 ,$$

zoodat de kromme $MA$ samenvalt met de abscissen-as $MO$. Wat eindelijk den vorm betreft van de curve, die den hoek $\left(\frac{\pi}{2} - a_{max}\right)$ voorstelt als functie van $x$, zoo blijkt reeds uit vergelijking der figuren 2 en 3, dat deze curve $MA$ met het kleiner worden van den assenhoek steeds meer nadert tot de rechte, die den hoek tusschen $OA$ en de normaal daarop in $O$, halveert.

Inderdaad levert (9).

$$\cot a_{max} = \frac{\sqrt{\cos^4 x \cos^2 V - \sin^2 x \sin^4 V}}{\sin^2 V + \cos^2 V \cos^2 x},$$

$$= tg\left(\frac{\pi}{2} - a_{max}\right) = \frac{\sqrt{\cos^4 x - (\cos^4 x + \sin^2 x \sin^2 V) \sin^2 V}}{\cos^2 x + \sin^2 x \sin^2 V}.$$

Wordt $V$ kleiner, dan neemt $tg\left(\frac{\pi}{2} - a_{max}\right)$ toe, en bereikt bij $V = 0$ de maximale waarde $\overset{+}{(-)}1$, zoodat dan $a_{max} = 45°$ wordt. De krommen $M'AM$ en $NBN'$ gaan dan over in twee rechten, die elkaar in $O$ onder een rechten hoek snijden, en ten opzichte van de richting $AB$ 45° gedraaid zijn.

Van groot belang voor de praktijk is de oplossing van het vraagstuk, hoe groot de uitdooving is ten opzichte van de trace van een

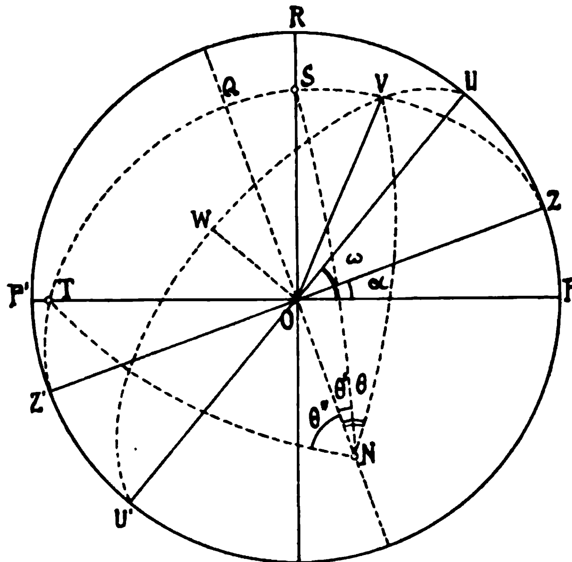



Fig. 5.

splijtvlak. Daarvoor is, wanneer de uitdoovingshoek ten opzichte van de scherpe bissectrix bekend is, alleen nog noodig de waarde van den schijnbaren hoek tusschen de genoemde trace en dezelfde bissectrix. Beide waarden behoeven dan alleen van elkaar te worden afgetrokken.

Zij $ZZ'$ weer de as van een zone, waaruit $ZQZ_1$ een willekeurig vlak, $N$ de daarbij behoorende pool voorstelt, en zij het vlak weer bepaald door $\alpha$ en $OQ = x$; zij $UWU'$ een willekeurig splijtvlak, bepaald door $\omega$ en $WO = y$, dan is $VO$ de snijlijn van beide vlakken, $VQ = \angle QNV = \theta$ de schijnbare hoek tusschen de scherpe bissectrix $QO$ en $VO$.

Nu is $VQ = \frac{\pi}{2} - VZ$ en in $\angle VUZ$ is

$$\angle Z = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\angle U = \frac{\pi}{2} + y$$

$$UZ = \omega - \alpha.$$

Dus is

$$[illegible] = \frac{[illegible]\left(\frac{\pi}{2} - x\right)[illegible]\left(\frac{\pi}{2} + y\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(\omega - \alpha)}{\sin(\omega - \alpha)}$$

$$= \frac{-[illegible] - [illegible]\,(\omega - \alpha)}{[illegible]\,(\omega - \alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Passen [illegible] deze formule toe op de splijtvlakken $h$ (100) en [illegible] (010) van [illegible], dan wordt bij

$$[illegible] \ldots \quad \omega = 0, [illegible] = 0$$

$$[illegible] \ldots \ldots \omega = \frac{\pi}{2}, [illegible] = 0$$

en [illegible] gaat over in

$$[illegible] = [illegible]$$

$$[illegible] = - [illegible]$$

[illegible] tusschen de tracen [illegible]

[illegible] varieeren tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$, [illegible]

| α bij θ′′ (−) | x = 0 | x = 15 | x = 30 | x = 45 | x = 60 | x = 75 | x = 90 | α bij θ′ (+) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | onbep^d | 90° | 90° | 90° | 90° | 90° | 90° | 90° |
| 1 | 0° | 86° 8′ 30″ | 88° 0′ 2″ | 88°35′ 50″ | 88°50′ 43″ | 88°57′ 53″ | 89 | 89 |
| 2 | 0 | 82 18 57 | 86 0 17 | 87 10 22 | 87 41 27 | 87 55 46 | 88 | 88 |
| 3 | 0 | 78 33 11 | 84 0 59 | 85 45 40 | 86 32 13 | 86 53 39 | 87 | 87 |
| 4 | 0 | 74 52 5 | 82 2 19 | 84 21 9 | 85 23 2 | 85 51 34 | 86 | 86 |
| 5 | 0 | 71 19 25 | 80 4 30 | 82 56 43 | 84 13 53 | 84 49 28 | 85 | 85 |
| 10 | 0 | 55 44 4 | 70 34 28 | 75 59 53 | 78 29 29 | 79 39 17 | 80 | 80 |
| 15 | 0 | 44 0 26 | 61 48 38 | 69 14 48 | 72 48 29 | 74 29 45 | 75 | 75 |
| 30 | 0 | 21 8 46 | 40 33 34 | 50 46 7 | 56 18 35 | 59 7 56 | 60 | 60 |
| 45 | 0 | 14 30 39 | 26 33 55 | 35 15 53 | 40 53 36 | 44 0 24 | 45 | 45 |
| 60 | 0 | 8 29 56 | 16 6 8 | 22 12 28 | 26 33 54 | 29 8 50 | 30 | 30 |
| 75 | 0 | 3 58 2 | 7 37 51 | 10 43 43 | 13 3 52 | 14 30 38 | 15 | 15 |
| 80 | 0 | 2 36 57 | 5 2 18 | 7 6 25 | 8 40 56 | 9 39 57 | 10 | 10 |
| 85 | 0 | 1 17 49 | 2 30 17 | 3 32 24 | 4 19 58 | 4 49 49 | 5 | 5 |
| 86 | 0 | 1 2 13 | 2 0 9 | 2 49 50 | 3 27 56 | 3 51 50 | 4 | 4 |
| 87 | 0 | 0 46 38 | 1 30 4 | 2 7 20 | 2 35 55 | 2 53 52 | 3 | 3 |
| 88 | 0 | 0 31 4 | 1 0 1 | 1 24 52 | 1 43 56 | 1 55 55 | 2 | 2 |
| 89 | 0 | 0 15 32 | 0 30 0 | 0 42 26 | 0 51 53 | 0 57 57 | 1 | 1 |
| 90 | 0 | 0° | 0° | 0° | 0° | 0° | 0 | 0 |

Zooals ook op de tabel tot uitdrukking komt, wordt

$$\theta' = bg\ tg\ sin\ x\ tg\ \alpha$$

voor $x = 0$, $\alpha < \frac{\pi}{2}$ gelijk aan 0,

voor $x = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ onbepaald, en

voor $\alpha = 0$ ook steeds 0, terwijl

$$-\theta'' = bg\ tg\ sin\ x\ cot\ \alpha$$

voor $x = 0$, $\alpha > 0$ gelijk aan 0,
voor $x = 0$, $\alpha = 0$ onbepaald en eindelijk
voor $\alpha = \frac{\pi}{2}$ steeds 0 wordt.

Om de uitdooving op het vlak ($N$) ten opzichte van de trace van $g'$ (010) of $h'$ (100) te weten, combineert men deze tabel met tab. II.

Voor $\frac{\pi}{2} \geqq \alpha \geqq 0$, $\frac{\pi}{2} \geqq x \geqq 0$ worden de uitdoovingen succ. $(-\theta' + y')$ en $(-\theta'' + y')$. Daarvoor vindt men de volgende waarden:

$$\varphi' = y' - \theta^1.$$

| $\alpha$ | $x=0$ | $x=15$ | $x=30$ | $x=45$ | $x=60$ | $x=75$ | $x=90$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0° | 0° | 0° | 0° | 0° | 0° | 0° |
| 15 | 0 | — 2° 4′ 56″ | — 3°33′ 23″ | — 3°33′ 44″ | — 2°49′ 42″ | — 0°58′ 9″ | 0 |
| 30 | 0 | — 4 53 18 | — 8 9 9 | — 8 29 40 | — 5 41 1 | — 1 46 4 | 0 |
| 45 | 0 | — 9 37 25 | —15 19 13 | —14 37 7 | — 8 21 29 | — 2 12 48 | 0 |
| 60 | 0 | —19 0 20 | —27 59 13 | —23 18 38 | — 9 58 32 | — 2 2 57 | 0 |
| 75 | 0 | —40 27 45 | —51 31 46 | —36 7 52 | — 8 7 44 | — 1 15 21 | 0 |
| 90 | onbep$^d$ | —90° | —90° | —90° | 0° | 0° | 0 |

Bij $\alpha = 90°$ en $x = \left(\frac{\pi}{2} - V\right) = 46°30'$ wordt de uitdooving onbepaald; 't is hier, dat de overgang van 90° op 0° plaats heeft. Op dezelfde wijze vindt men voor

$$\varphi'' = y' - \theta''.$$

| $\alpha$ | $x=0$ | $x=15$ | $x=30$ | $x=45$ | $x=60$ | $x=75$ | $x=90$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | onbepaald | 90° | 90° | 90° | 90° | 90° | 90° |
| 15 | 0° | 45°53′ 32″ | 65°53′ 6″ | 76° 4′ 47′ | 83° 2′ 39″ | 88° 2′ 14″ | 90 |
| 30 | 0 | 27 45 24 | 48 50 33 | 64 28 55 | 77 11 28 | 86 30 42 | 90 |
| 45 | 0 | 19 23 53 | 37 48 37 | 55 54 29 | 73 25 43 | 85 48 0 | 90 |
| 60 | 0 | 13 38 22 | 29 0 29 | 49 39 57 | 72 53 57 | 86 13 49 | 90 |
| 75 | 0 | 7 30 43 | 17 54 43 | 43 50 39 | 77 44 37 | 87 44 59 | 90 |
| 90 | 0 | 0° | 0° | 0° | 90° | 90° | 90 |

Ook hier wordt de uitdooving voor $\alpha = 90°$ en $x = \left(\frac{\pi}{2} - V\right) = 46°30'$ onbepaald.

Het verloop der $\varphi$-isogyren is in fig. 6 voorgesteld. De doorgetrokken lijnen hebben betrekking op $\varphi''$, de gestippelde op $\varphi'$; $\varphi''$ levert de waarde der positieve uitdooving ten opzichte van de trace van

$h'$ (100), $\varphi'$ die der negatieve uitdooving ten opzichte van de trace van $g'$ (010) op het vlak ($N$).

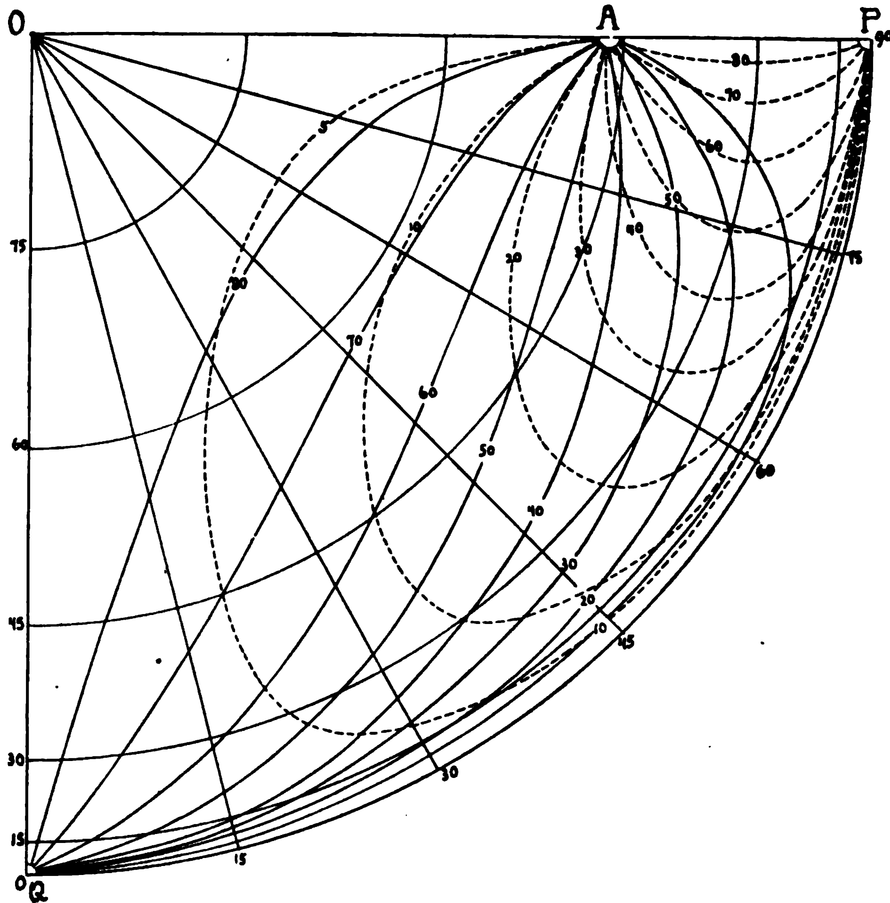



Fig. 6.

De figuur is ten opzichte der assen $OP$ en $OQ$ weer geheel symmetrisch op de wijze als fig. 2 voor de isogyren ten opzichte van de scherpe bissectrix aangeeft, aangezien de punten hier beantwoorden aan de waarde:

$$\varphi' = \tfrac{1}{2}\, bg \cot \left( \frac{1 - \sin^2 V \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha \, . \sin^2 V} \cdot \frac{1}{\sin x} + \frac{1 - \sin^2 V \cos^2 \alpha}{\sin 2\alpha \sin^2 V} \, . \sin x \right) -$$

$$- \, bg\, tg\, (\sin x\, tg\, \alpha) = y' - \theta'.$$

$$\varphi'' = \tfrac{1}{2}\, bg \cot \left( \frac{1 - \sin^2 V \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha \, . \sin^2 V} \cdot \frac{1}{\sin x} + \frac{1 - \sin^2 V \cos^2 \alpha}{\sin 2\alpha \sin^2 V} \, . \sin x \right) +$$

$$+ \, bg\, tg\, (\sin x \cot \alpha) = y' - \theta''.$$

De teekens van $y'$, $\theta'$ en $\theta''$ blijven nu onveranderd voor $0 < x < \pi$

en voor $\alpha$ varieerend tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$, zoodat ook hier het teeken der uitdooving in aanliggende boloctanten afwisselend positief en negatief zal zijn. De punten, waarin gelijktallige isogyren van de stelsels $\varphi'$ en $\varphi''$ elkaar snijden, geven de plaats aan van de polen der sneden, waarin symmetrische uitdooving ten opzichte van de in het praeparaat zichtbare splijtrichtingen (of vlakken) $h'$ (100) en $g'$ (010) wordt waargenomen. Daar is dus

$$\varphi' + \varphi'' = 2y' - (\theta' + \theta'') = 0.$$
$$2y' = \theta' + \theta''$$

De boog $OA = V$. Wordt de assenhoek kleiner, dan nadert $A$ steeds meer tot $O$; de isogyren $\varphi'$ en $\varphi''$ naderen tot een symmetrisch verloop met betrekking tot de assen $OP$ en $OQ$, zoodat de kromme, welke hunne snijpunten verbindt, in de projectie steeds vlakker wordt, en eindelijk, wanneer $V = 0$ is geworden, en $A$ met $O$ samenvalt, overgaat in de rechte, die den hoek $POQ$ halveert. Voor $V = 0$ wordt $y' = 0$, dus

$$\theta' + \theta'' = 0$$
$$\sin x \; tg\; a - \sin x \cot a = 0$$
$$tg\; a = \cot a$$

zoodat de meetkundige plaats van de snijpunten der isogyren $\varphi'$ en $\varphi''$, d. i. die der punten van symmetrische uitdooving, in dat geval gegeven wordt door de lijn

$$a = 45°.$$

**Sterrekunde.** — De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt eene mededeeling aan van den Heer J. STEIN, S. J. te Rome: „*β Lyrae als dubbelster.*"

(Mede aangeboden door den Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN).

1. Voor zoover mij bekend, was Professor E. C. PICKERING de eerste, die naar aanleiding zijner spectroskopische onderzoekingen het vermoeden uitsprak, dat $\beta$ Lyrae een nauw sterrenpaar zijn kon, welks componenten cirkelvormige banen beschrijven in eene lichtperiode [1]). Dit vermoeden werd in 1892 bevestigd door BELOPOLSKY [2]). Van een veertiental spectogrammen mat hij de verplaatsingen van den lichtenden

---

1) Spectrum of $\beta$ Lyrae. By Prof EDWARD C. PICKERING. A. N. 3051 (1891).

2) Les changements dans le spectre de $\beta$ Lyrae. A. BÉLOPOLSKY. Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani. Vol. XXII, 1893.

*F*-streep, en bevond dat deze tijdens de lichtminima een minimum (in absolute waarde), tijdens de lichtmaxima een maximum vertoonden, en wel zóó dat zij beantwoordden aan een nadering vóór-, en aan eene verwijdering nà het hoofdminimum. Daaruit leidde hij een cirkelvormige baan af voor den component, die den anderen op laatstgenoemd oogenblik verduistert. Ook Prof. VOGEL [1]) kwam na onderzoek der Potsdamsche spectogrammen tot het besluit, dat de verplaatsing der lijnen nauwelijks anders verklaard kon worden, dan als een gevolg der bewegingen van verschillende lichamen met ongelijke spectra; absolute bepalingen van de ligging der lijnen met voldoende nauwkeurigheid uit te voeren, gelukte hem echter niet. Volgens hem zouden echter de photometrische gegevens twee hemellichamen veronderstellen van ongelijke lichtsterkte, zich bewegend in een nagenoeg cirkelvormige baan, of in een ellips met de lange as in de gezichtslijn, terwijl de spectroskopische onderzoekingen leiden tot de aanname van twee lichamen, waarvan 't éene een spectrum met lichtende lijnen, het andere met absorptie-lijnen bezit, maar die een zeer excentrische baan beschrijven waarvan de groote as een aanzienlijken hoek met de gezichtslijn vormt. Beide verschijnselen onder éénzelfde oogpunt samen te vatten, zou echter niet mogelijk zijn In 1896 nam Dr. MYERS [2]) de lichtkromme van ARGELANDER („vera" pro 1850) tot onderwerp van een uitgebreid theoretisch onderzoek, en als resultaat verkreeg hij nagenoeg cirkelvormige banen van twee uitgerekte omwentelingsellipsoïden, wier lange assen steeds in elkaars verlengde vallen. Daardoor wordt 't geheele verloop der lichtvariatie op bevredigende wijze weergegeven. Het volgend jaar bracht BELOPOLSKY een nieuwe bevestiging van het dubbelster-karakter [3]). Ditmaal waren het de verplaatsingen der donkere *Mg*-lijn ($\lambda = 448.2\ \mu\mu$), die het hem mogelijk maakten daaruit de zwak excentrische baan af te leiden van den tweeden component, nl. van dengene, die tijdens 't hoofdminimum verduisterd wordt. Father W. SIDGREAVES komt in zijn jongste spectografische studie van $\beta$ Lyrae [4]) tot hetzelfde resultaat

[1]) Ueber das Spectrum von $\beta$ Lyrae. Von H. C. VOGEL. Sitzungsberichte der K. Preussischen Ak. der Wiss zu Berlin. 8 Februar 1894.

[2]) Untersuchungen über den Lichtwechsel des Sternes $\beta$ Lyrae. Inauguraldissertation... von G. W MYERS, München 1896. — The system of $\beta$ Lyrae. id. The Astroph. Journ. Vol. VII N°. 1.

[3]) Recherches nouvelles du spectre de $\beta$ Lyrae, par A. BÉLOPOLSKY. Memorie della Società degli Spettrosc. It. vol. XXVI, 1897. — New Investigations of the Spectrum of $\beta$ Lyrae, id Astroph. J. Vol. VI N°. 4.

[4]) A spectrographic Study of $\beta$ Lyrae. By Rev. WALTER SIDGREAVES S. J. Monthly Notices of R. A. S., Jan. 1904.

als Prof. VOGEL: een vrij sterk excentrische baan, waarvan de groote as met den gezichtsstraal een grooten hoek vormt.

Uit verschillende numerieke gegevens meent Prof. CH. ANDRÉ [1]), evenals reeds vroeger Dr. MYERS, te kunnen aannemen, dat de excentriciteit der baan sinds ARGELANDER's tijd is toegenomen, alsook dat de groote as zich verplaatst heeft; en hieruit tracht ANDRÉ een verklaring te geven van de termen van hoogere orde in de door Dr. PANNEKOEK verbeterde formule van ARGELANDER [2]). Eindelijk heeft Dr. L. TERKAN eenige korte beschouwingen ten beste gegeven in A. N. n° 4067 [3]), waarna nog een uitvoeriger studie van zijn hand is verschenen in de Verhandelingen der Hongaarsche Akademie van Wetenschappen [4]). Hiermede is, naar wij meenen, de voornaamste literatuur *ter verklaring* van de lichtvariatie opgesomd.

2. Het doel, dat schrijver dezes zich voorstelde, was oorspronkelijk alleen, de door Dr. PANNEKOEK afgeleide lichtkromme volgens MYERS' methode te behandelen, om te onderzoeken, of daaruit wellicht eenige ingrijpende verandering der baanelementen sinds ARGELANDER viel te constateeren. Het eerste gedeelte van MYERS' dissertatie, waarin als eerste benadering een cirkelvormige baan wordt afgeleid, is in 't algemeen vrij correct, maar het tweede deel, waarin deze baan met behulp van differentiaalformules wordt omgevormd tot een zwak excentrische, bleek eene nieuwe behandeling dringend te behoeven. Uit theoretisch onjuiste differentiaalformules zijn foutieve normaalvergelijkingen afgeleid, deze laatste zijn weer foutief opgelost, en eindelijk is de nauwere aansluiting der theoretische kromme aan die van ARGELANDER, voornamelijk in de buurt van het hoofdminimum, enkel verkregen door een gelukkig samentreffen van cijferfouten. Hierover hier nog nader in bijzonderheden te treden, heeft geen nut. Als een enkel staaltje geven wij de lichtintensiteiten ($I_B$), zooals die door MYERS zijn afgeleid uit de waargenomen lichtgraden (Stufen) van ARGELANDER, van 30 uren vóór tot 30 uren nà het hoofdminimum; daarnaast onder $I_{R_1}$ de lichtintensiteiten, die door MYERS worden gegeven als resultaten zijner definitieve baanelementen, [5]) en onder

---

[1]) Traité d'Astronomie Stellaire par CH. ANDRÉ, 2me p. NN. 460—1.

[2]) Untersuchungen über den Lichtwechsel von β Lyrae. Dr. A. PANNEKOEK. Verhandelingen der Kon. Ak. van Wetensch. te Amsterdam, Vol. 5, N°. 7. id. A. N. N°. 3456.

[3]) Beitrag zur Berechnung der Bahnelemente van β Lyrae. Dr L. TERKÁN.

[4]) β Lyrae pályaelemeinek kiszámítása spektroskopikai és photometriai adatokból. TERKAN Lajostól. — Mathematikai és Természettudományi Ertesitö, XXIV kötet 3 füzetéből. Budapest 1906.

[5]) Inaugural-dissertation, blz. 48; A. J. l.c. blz. 16.

$I_{R_2}$ diezelfde resultaten vrij van cijferfouten. In de drie volgende kolommen geven wij diezelfde grootheden, omgezet in lichtgraden ($\sigma$). Welke waarde MYERS toekent aan een lichtgraad van ARGELANDER vind ik niet vermeld; uit zijne lichtintensiteiten in de beide minima vind ik daarvoor 0.130 grootte, en daaraan heb ook ik mij gehouden. De maximum-intensiteit is gelijk aan de eenheid gesteld. De lichtgraden van A, die van 3.35 in 't hoofdminimum stijgen tot de maximumwaarde 12.35, zijn gemakshalve gereduceerd tot het interval 3.00 tot 12.00.

| $t$ | $I_B$ | $I_{R_1}$ | $I_{R_2}$ | $\sigma_B$ | $\sigma_{R_1}$ | $\sigma_{R_2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-30^u$ | 0.7296 | 0.7525 | 0.7586 | 9.27 | 9.61 | 9.67 |
| −24 | .5836 | .6019 | .6674 | 7.40 | 7.78 | 8.60 |
| −18 | .4386 | .4993 | .5627 | 4.88 | 6.15 | 7.16 |
| −12 | .3661 | .4275 | .4506 | 3.55 | 4.85 | 5.29 |
| − 6 | .3484 | .3487 | .3500 | 3.10 | 3.13 | 3.16 |
| 0 | .3433 | .3433 | .3433 | 3.00 | 3.00 | 3.00 |
| + 6 | .3499 | .3488 | .3477 | 3.15 | 3.12 | 3.11 |
| +12 | .3988 | .4275 | .4462 | 4.30 | 4.85 | 5.21 |
| +18 | .5306 | .5591 | .5586 | 6.67 | 7.11 | 7.10 |
| +24 | .6572 | .6624 | .6635 | 8.46 | 8.54 | 8.55 |
| +30 | .7644 | .7528 | .7553 | 9.70 | 9.61 | 9.61 |

In 't volgende hebben wij vooreerst getracht, juiste formules te geven ter afleiding eener flauw excentrische baan uit de lichtvariatie. Deze zijn daarna toegepast op de kromme van ARGELANDER en op die van Dr. PANNEKOEK. Vervolgens zijn ook BELOPOLSKY's spectrographische gegevens opnieuw gereduceerd, wijl omtrent de resulteerende baan eenige onzekerheid heerscht[1]). Dit is wellicht toe te schrijven aan de door B. toegepaste methode van LEHMAN—FILHÉS[2]). Deze is uitmuntend geschikt om een groote excentriciteit met voldoende nauwkeurigheid te bepalen; minder echter voor zeer geringe $e$, daar hier de onvermijdelijke willekeur in het trekken der grafische snelheids-kromme een te overwegenden invloed heeft.

3. Wij gaan dus uit van de volgende hypothese:

[1]) In de „Recherches nouvelles" (Memorie enz.) geeft BELOPOLSKY $e = 0.04$; in zijn „New Investigations" (A. J.) $e = 0.07$, uit dezelfde waarnemingen.

[2]) A. N. n. 3242.

Twee gelijkvormige, nitgerekte omwentelings-ellipsoïden bewegen zich om haar gemeenschappelijk zwaartepunt in elliptische banen. Verondersteld wordt, dat de lange assen der ellipsoïden steeds in elkaars verlengde vallen, terwijl hare middelpunten zich bewegen, volgens de wetten van KEPLER, om het gemeenschappelijk zwaartepunt. Tijdens de conjuncties bedekken zij elkaar gedeeltelijk. Gevraagd wordt de lichtintensiteit voor ons oog op elk oogenblik, indien men de ellipsoïden mag vervangen door hare gelijkmatig verlichte projecties op 't hemelgewelf.

Wij nemen als lengte-eenheid de halve lange as van de grootste ellipsoïde ($E_1$), als eenheid van lichtsterkte het lichtmaximum van $\beta$ Lyrae. Zij verder:

$\varkappa$ de halve lange as van 't kleinste lichaam;

$q$ de verhouding der lange as tot de middellijn van den equator;

$f$ de verhouding van de groote as der ellips, volgens welke een der ellipsoïden zich op 't hemelgewelf projicieert, tot de lange as dier ellipsoïde zelf;

$a$ de halve groote as der relatieve baan van het kleinste lichaam ($E_2$), $e$ de excentriciteit, $v$ de ware anomalie, $r$ de voerstraal in de ware, relatieve baan;

$\beta$ de hoek, dien de voerstraal in de ware baan maakt met de projectie van den gezichtsstraal op 't baanvlak („achter" het hemelgewelf); deze hoek neemt toe met de beweging in de baan;

$\omega$ de lengte van het periastron, gerekend als $\beta$;

$i$ de hoek van het baanvlak met 't raakvlak aan 't hemelgewelf;

$\varrho$ de projectie van $r$ op 't hemelgewelf;

$M$ het gemeenschappelijk deel van twee cirkels met stralen $=1$ en $=\varkappa$, wier middelpunten op een afstand $\varrho' = \frac{\varrho}{f}$ van elkaar verwijderd zijn;

$\lambda$ de verhouding der helderheden (per oppervlakte-eenheid) van de grootste en de kleinste elliptische projecties;

$J$ de schijnbare totale licht-intensiteit op tijd $t$, (van de aarde uit gezien).

Zoolang $E_1$ en $E_2$ elkaar niet bedekken, is

$$J = f.$$

Wanneer $E_2$ door $E_1$ bedekt wordt, is

$$J = f\left(1 - \frac{M}{\pi(\lambda + \varkappa^2)}\right).$$

Wordt $E_1$ door $E_2$ bedekt, dan is

$$J = f\left(1 - \frac{\lambda M}{\pi(\lambda + \varkappa^2)}\right).$$

Zijn $2\varphi'$ en $2\varphi$ de hoeken, waaronder de gemeenschappelijke koorde der cirkels, die tot bepaling van $M$ dienen, wordt gezien van uit hun resp. middelpunten, dan is

$$M = \tfrac{1}{2}\{(2\varphi' - \sin 2\varphi') + \varkappa^2(2\varphi - \sin 2\varphi)\}$$

$$\sin\varphi' = \varkappa \sin\varphi\,; \qquad \cos\varphi = \frac{\varrho'^2 + \varkappa^2 - 1}{2\varkappa\varrho'}.$$

$\varphi'$ is altijd $< \frac{\pi}{2}$; $\varphi$ kan $= \pi$ worden, als nl. de kleine schijf zich geheel op de groote projicieert.

Verder is:

$$\varrho^2 = r^2(1 - \cos^2\beta \sin^2 i)\,; \qquad \beta = \omega + v.$$

Deze formules zijn eensluidend met die van Dr. Myers.

Berekening van $f$.

De vergelijking van den cylinder, die de eylipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ omhult en welks as hoeken $\varphi, \chi, \psi$ maakt met de $X$-, $Y$-, $Z$-assen, is

$$\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\cos^2\chi}{b^2} + \frac{\cos^2\psi}{c^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) =$$
$$= \left(\frac{x\cos\varphi}{a^2} + \frac{y\cos\chi}{b^2} + \frac{z\cos\psi}{c^2}\right)^2.$$

Het oppervlak van de loodrechte doorsnee van dezen cylinder is:

$$\Omega = \pi\sqrt{a^2 b^2 \cos^2\psi + b^2 c^2 \cos^2\varphi + c^2 a^2 \cos^2\chi}.$$

Stelt men $a = b = \frac{1}{q}$, $c = 1$, dan is

$$\Omega = \frac{\pi}{q}\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2\psi}, \qquad \varepsilon^2 = \frac{q^2 - 1}{q^2}.$$

De kleine halve as der doorsnee is $\frac{1}{q}$; dus de groote:

$$f = \sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2\psi}\,; \qquad \cos^2\psi = \cos^2\beta\sin^2 i\,;$$

$\psi$ is namelijk de hoek, dien de lange as der ellipsoïde met den gezichtsstraal maakt.

Bij de berekening van $f$ neemt Dr. Myers, in plaats van de momentane projectie der ellipsoïde op 't hemelgewelf, de doorsnede der ellipsoïde met een vlak, gaande door haar middelpunt en lood-

recht staande op den gezichtsstraal, hetgeen volgens hem geoorloofd is „wenn die Abplattung nicht ungeheuer gross ist". Zoo stelt hij:

$$f = \frac{1}{\sqrt{1 + (q^2 - 1)\cos^2\psi}}.$$

Daar de strenge formule minstens even eenvoudig is, is deze substitutie ongegrond. Stelt men de uitdrukking van MYERS $= f'$, dan is

$$\frac{f}{f'} = \sqrt{1 + \left(\frac{q^2-1}{2q}\right)^2 \sin^2 2\psi}.$$

Maximum-waarden voor $\psi = \frac{\pi}{4}$:

| $q$ | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{f}{f'}$ | 1.02 | 1.03 | 1·06 | 1.08 |

Zoo wordt dus een systematische fout ingevoerd, die reeds bij geringe uitrekking niet te verwaarloozen is.

4. Heeft men met voorloopige elementen eene lichtkromme berekend, dan tracht men door variatie dezer elementen de nog overblijvende verschillen tusschen waarneming en berekening te verkleinen. Men moet dus onderzoeken, hoe de lichtintensiteit met de elementen varieert.

Wij vonden: $J = F(f, M, \lambda, \varkappa^2)$ en zullen eerst $df$ en $dM$ uitdrukken als functies van $d(\varkappa^2)$, $d\beta$, $d\varrho$.

Vooreerst zij opgemerkt, dat $\lambda$ door $\varkappa^2$ geheel bepaald is, indien men, zooals blijken zal, aannemen mag, dat $E_2$ zich tijdens de minima geheel op $E_1$ projicieert. Immers, indien $f_m = \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}$ (= waarde van $f$ in de beide minima), dan is, in diezelfde veronderstelling:

$$f_m \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \varkappa^2} = \text{const.}_1 \text{ (= intensiteit in het hoofdminimum)}$$

$$f_m\left(1 - \frac{\varkappa^2\lambda}{\lambda + \varkappa^2}\right) = \text{const.}_2 \text{ (= ,, ,, ,, nevenminimum)}$$

Hieruit volgt, na deeling:

$$d\lambda = \frac{\lambda(1-\lambda)}{\varkappa^2} d(\varkappa^2) \text{ en } \frac{df_m}{f_m} = \frac{\lambda}{\lambda + \varkappa^2} d\varkappa^2 = -\frac{d(\varepsilon^2 \sin^2 i)}{2 f_m^2}$$

Met behulp dezer laatste vergelijking vindt men zonder moeite:

$$df = \frac{\varepsilon^2 \sin^2 i}{2f} \sin 2\beta d\beta + \frac{\cos^2\beta}{f}(1 - \varepsilon^2 \sin^2 i)\frac{\lambda}{\lambda + \varkappa^2} d(\varkappa^2);$$

dus onafhankelijk van de variatie van $i$.

De berekening van $dM$ rechtstreeks uit de formules is vrij omslachtig[1]; uit de meetkundige beteekenis van $M$ vindt men $dM$ bij den eersten oogopslag. Blijkbaar is $M$ enkel een functie van $\varkappa$ en $\varrho'$. Wanneer $\varkappa$ met $\Delta\varkappa$ toeneemt, wordt $M$ vermeerderd met een strookje $2\varkappa\varphi\Delta\varkappa$; neemt $\varrho'$ toe met $\Delta\varrho'$, dan wordt $M$ verminderd met een strookje (sikkel) $2 \sin\varphi' \,.\, \Delta\varrho' = 2\varkappa \sin\varphi \,.\, \Delta\varrho'$. Derhalve is:

$$dM = \varphi d(\varkappa^2) - 2 \sin\varphi' \,.\, d\varrho'$$

$$= \varphi d(\varkappa^2) - \frac{2 \sin\varphi'}{f} d\varrho + \frac{2\varrho \sin\varphi'}{f^2} \,.\, df$$

Substitueert men hierin de bovenstaande waarde van $df$, dan is $dM$ uitgedrukt in $d(\varkappa^2)$, $d\beta$, $d\varrho$.

5. *Berekening van $d\beta$ en $d\varrho$ als functiën van de variaties der baanelementen en der epoche.*

Indien $\sin\varphi = e$, dan is (vgl. BAUSCHINGER, die Bahnbestimmung der Himmelskörper, n°. 197):

$$dv = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos\varphi \,\{(t-T)\, d\mu - \mu dT\} + \frac{a}{r} \cos\varphi \sin v \left(1 + \frac{r}{p}\right) d\varphi.$$

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{da}{a} - \sin(P-\Omega) \cos(P-\Omega) \sin i \, tg\, i \,.\, d\omega - \sin^2(P-\Omega)\, tg\, i \,.\, di$$

$$+ \left(\frac{a}{r}\right)^2 \{e \sin E - \sin(P-\Omega) \cos(P-\Omega) \sin i \, tg\, i \cos\varphi\, \{(t-T)\, d\mu - \mu dT\}$$

$$- \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left\{(\cos E - e) \cos\varphi + \sin(P-\Omega)\cos(P-\Omega) \sin i \, tg\, i \sin E \left(\frac{r}{a} + \cos^2\varphi\right)\right\} d\varphi.$$

Volgens de hierboven aangenomen definitie van $\omega$, moet men stellen:

$$\varrho \sin(P-\Omega) = r \cos i \cos(\omega + v) = r \cos i \cos\beta$$

$$\varrho \cos(P-\Omega) = - r \sin(\omega + v) = - r \sin\beta$$

Wij gaan thans over tot 't volgende bijzondere geval:

*a.* de oorspronkelijke baan is cirkelvormig;

*b.* indien $i = 90° - \iota'$, dan is $\iota'$ zoo klein, dat hoogere machten dan de tweede verwaarloosd kunnen worden; hetzelfde gelde van $\sin\varphi$.

Zij verder $d\mu = 0$; $d\omega = 0$; $2e \cos\omega = x$, $2e \sin\omega = y$; $n = \frac{2\pi}{U}$ ($U =$ omloopstijd $= 12.91$ dagen), $t_1 =$ de tijd gerekend van af „bovenste conjunctie"; $dM_0 = -\mu dT$.

Dan is met voldoende benadering:

[1]) Zie: Untersuchungen über den Lichtwechsel des Sternes $\beta$ Persei, von J. HARTING. (München 1889) blz. 41.

$$d\beta = dM_0 + x \sin nt_1 - y \cos nt_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{da}{a} + \frac{a^2}{2\varrho^2}\cos^2 nt_1\, i'^2 + \frac{a^2}{2\varrho^2}\sin 2nt_1 \,.\, dM_0 -$$

$$- \tfrac{1}{2}\, x\left(\cos nt_1 - \frac{a^2}{\varrho^2}\sin 2nt_1 \sin nt_1\right) - \tfrac{1}{2}\, y\left(\sin nt_1 + \frac{a^2}{\varrho^2}\sin 2\, nt_1 \sin nt_1\right) . \quad (b)$$

Daar deze differentiaal-uitdrukkingen reeds meermalen verwarring veroorzaakten [1]), worden ze hier nog op andere wijze afgeleid.

Uit:

$$\beta = v + \omega$$

volgt:

$$d\beta = dv + d\omega.$$

In de cirkelvormige baan was $v = M$; in de elliptische wordt

$$v = M + 2e \sin M + \ldots + dM_0.$$

Substitueert men $M = nt_1 - \omega$, en stelt men $d\omega = 0$, dan vindt men, bij verwaarloozing van hoogere machten van $e$:

$$d\beta = dM_0 + x \sin nt_1 - y \cos nt_1$$

Stelt men in: $\varrho^2 = r^2 \sin^2 \beta + r^2 \cos^2 i \cos^2 \beta.$

$$i = 90^\circ - i',$$

dan is, met verwaarloozing van hoogere machten van $i'$:

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{dr}{r} + \frac{r^2}{2\varrho^2}\sin 2\beta\, d\beta + \frac{r^2}{2\varrho^2}\cos^2\beta .\, i'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

In de elliptische baan is

$$r = \frac{a\,(1-e^2)}{1 + e \cos v} = a_0 + da - ae \cos(\beta - \omega) + \ldots =$$

$$= a_0 + da - \frac{1}{2} a\, x \cos nt_1 - \frac{1}{2} ay \sin nt_1 \ldots$$

Dus:

$$dr = da - \frac{1}{2}\, ax \cos nt_1 - \frac{1}{2} ay \sin nt_1$$

Hieruit volgt, door substitutie in ($c$), de reeds gevonden uitdrukking voor $\frac{d\varrho}{\varrho}$.

---

1) Dr. Mijers stelt $d\beta = 0$ voor $t_1 = 0$ en tevens $dM_0 = 0$, hetgeen in tegenspraak is met ($a$). — Prof. Hartwig, in zijne studie: „Der veränderliche Stern vom Algoltypus Z Herculis" (Bamberg 1900) blz. 39, stelt den factor $\sin(P\text{-}☊)\cos(P\text{-}☊)\sin i \,tg\, i$ gelijk 0 voor $i = 90^\circ$, terwijl deze, volgens bovenstaande, gelijk wordt aan $-\frac{r^2}{2\varrho^2}\sin 2\beta$. Op een ander geval maakt Dr. Pannekoek opmerkzaam in zijn Algol-dissertatie (blz. 22—3).

6. Wij hebben nu achtereenvolgens $dM$ en $df$ uitgedrukt als functien van $d(\varkappa^2)$, $d\beta$ en $d\varrho$; en daarna $d\beta$ en $d\varrho$ als functiën van $da$, $i'^2$, $dM_0$, $x$ en $y$. Differentieert men nu de uitdrukking

$$J_1 = f\left(1 - \frac{M}{\pi(\lambda + \varkappa^2)}\right),$$

geldend in de omgeving van het eerste minimum, dan vindt men door achtereenvolgende substitutie de volgende waarde voor $dJ_1$:

$$\pi(\lambda + \varkappa^2)\, dJ_1 = K_1\, d(\varkappa^2) + A_1\, da + I_1\, i'^2 + X_1 x + Y_1 y + \Delta_1 (dM_0 - y),$$

waarin:

$$K_1 = \frac{\pi\lambda}{q^2 f^2} J_1 \cos^2 nt_1 + \pi\left(1 + \frac{\lambda - \lambda^2}{\varkappa^2}\right)(f - J_1) - f\varphi - \frac{2\lambda}{q(\lambda + \varkappa^2)} \cdot \frac{\varrho}{f^2} \cdot \cos^2 nt_1 \sin\varphi';$$

$$A_1 = \frac{2\varrho \sin\varphi'}{r}\ ;\ I_1 = \frac{r^2 \cos^2 nt_1}{\varrho} \sin\varphi';$$

$$X_1 = \Delta_1 \sin nt_1 - \varrho \sin\varphi' \cos nt_1\ ;\ Y_1 = \Delta_1 (1 - \cos nt_1) - \varrho \sin\varphi' \sin nt_1\ ;$$

$$\Delta_1 = \frac{r^2 \sin 2nt_1 \sin\varphi'}{\varrho} + \frac{\varepsilon^2}{2f^2} \sin 2nt_1 \{\pi(\lambda + \varkappa^2) J_1 - 2\varrho \sin\varphi'\}.$$

Handelen wij op gelijke wijze met de uitdrukking:

$$J_2 = f\left(1 - \frac{\lambda M}{\pi(\lambda + \varkappa^2)}\right),$$

geldend in de omgeving van het tweede minimum, dan vinden wij, indien wij stellen $t_2 = t_1 - \frac{U}{2}$:

$$\pi \frac{\lambda + \varkappa^2}{\lambda}\, dJ_2 = K_2\, d(\varkappa^2) + A_2\, da + I_2 i'^2 + X_2 x + Y_2 y + \Delta_2 (dM_0 + y)$$

waarin:

$$K_2 = \frac{\pi}{q^2 f^2} J_2 \cos^2 nt_2 + \pi(f - J_2) - f\varphi - \frac{2\lambda}{q(\lambda + \varkappa^2)} \cdot \frac{\varrho}{f^2} \cdot \cos^2 nt_2 \sin\varphi';$$

$$A_2 = \frac{2\varrho \sin\varphi'}{r}\ ;\ I_2 = \frac{r^2 \cos^2 nt_2}{\varrho} \sin\varphi';$$

$$X_2 = -\Delta_2 \sin nt_2 + \varrho \sin\varphi' \cos nt_2;\ Y_2 = -\Delta_2 (1 - \cos nt_2) + \varrho \sin\varphi' \sin nt_2$$

$$\Delta_2 = \frac{r^2 \sin 2nt_2 \sin\varphi'}{\varrho} + \frac{\varepsilon^2}{2f^2} \sin 2nt_2 \left(\pi \frac{\lambda + \varkappa^2}{} J_2 - 2\varrho \sin\varphi'\right).$$

7. Wanneer niet de lichtintensiteit, maar de helderheid in grootten of lichtgraden rechtstreeks waargenomen is, moet men nog de variatie van 't cijfer der grootte of der lichtgraden uitdrukken in de variatie der intensiteit.

Zij $J_0$ de intensiteit van het maximum, $G_0$ de bijbehoorende grootte, $J$ en $G$ dezelfde grootheden op den tijd $t$, dan is volgens de formule van POGSON:

$$G - G_0 = 2.512 \, (log \, J_0 - log \, J).$$

Derhalve:

$$dG = - 2.512 \, m. \frac{dJ}{J} \quad (m = modulus \; der \; Brigg. \; log.)$$

$$dG = - 1.092 \, \frac{dJ}{J}.$$

Zij het grootte-equivalent van een lichtgraad $= - \frac{1}{v}$, dan is, wanneer $\sigma_0$ en $\sigma$ het aantal der lichtgraden aanduiden:

$$\sigma_0 - \sigma = v(G - G_0) = 2.512 v \, (log \, J_0 - log \, J)$$

Dus:

$$d\sigma = 1.092 v \frac{dJ}{J}$$

Stelt men ARGELANDER's lichtgraad voor de lichtkromme van $\beta$ Lyrae gelijk 0.130 grootte, dan is:

$$d\sigma = 8.413 \, \frac{dJ}{J}.$$

8. In de aangenomen hypothese vinden de hoofd-phasen (min.$_1$, max.$_1$, min.$_2$, max.$_2$) plaats, wanneer $\beta_1 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Stel $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ de daarbij behoorende ware anomalieën; $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ de overeenkomstige middelbare anomalieën. Indien, zooals bij $\beta$ Lyrae, de intervallen nagenoeg gelijk zijn, moet $e$ klein zijn, en mag men bij benadering stellen:

$$v_1 = M_1 - y; \; v_2 = M_2 + x; \; v_3 = M_3 + y; \; v_4 = M_4 - x.$$

$$(x = 2e \cos \omega; \; y = 2e \sin \omega)$$

of:

$$v_2 - v_1 = \frac{\pi}{2} = (M_2 - M_1) + x + y$$

$$v_3 - v_2 = \frac{\pi}{2} = M_3 - M_2) - x + y$$

$$v_4 - v_3 = \frac{\pi}{2} = (M_4 - M_3) - x - y$$

Indien de verschillen $M_2 - M_1 \ldots$ [1]) met voldoende en dezelfde

[1]) De lichttijd-correctie tot het gemeenschappelijk zwaartepunt, berekend uit de spectroskopische baan, bedraagt in de conjuncties ruim $\pm$ 100 tijdseconden, en kan dus verwaarloosd worden

nauwkeurigheid bekend zijn, vindt men hieruit, als waarschijnlijkste waarden:

$$\left.\begin{aligned} 4x &= -\pi + (M_4 - M_3) + 2(M_3 - M_2) - (M_2 - M_1) \\ 4y &= \pi + (M_4 - M_3) - 2(M_3 - M_2) - (M_2 - M_1) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad I$$

Combineert men alleen gelijksoortige phasen, dan vindt men:

$$\left.\begin{aligned} 2x &= -\pi + (M_4 - M_2) \\ 2y &= \pi - (M_3 - M_1) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad II$$

De twee oplossingen vallen samen, indien $(M_2 - M_1) + (M_4 - M_3) = \pi$.

In A. N. n°. 3456 heeft Dr. PANNEKOEK een overzicht gegeven van de intervallen, gerekend van 't hoofdminimum, voor verschillende waarnemers van 1842 tot 1895.

Deze tijdruimte in tweeën verdeelend, vindt hij gemiddeld: ($U = 12^d.91$)

| | $max_1$—$min_1$ | $min_2$—$min_1$ | $max_2$—$min_1$ |
|---|---|---|---|
| 1842—1870 | $3^d.12$ | $6^d.40$ | $9^d.54$ |
| 1870—1895 | $3^d.32$ | $6^d.48$ | $9^d.73$. |

Hieruit vindt men, voor het eerste tijdperk:

volgens form. (*I*):

$$\left\{\begin{aligned} e \sin\omega &= -0.0052; \quad e = 0.009 \\ e \cos\omega &= +0.0076; \quad \omega = -34° \end{aligned}\right.$$

volgens form. (*II*):

$$\left\{\begin{aligned} e \sin\omega &= +0.0067; \quad e = 0.008 \\ e \cos\omega &= -0.0043; \quad \omega = 123°. \end{aligned}\right.$$

Evenzoo voor het tweede tijdperk:

$$\left\{\begin{aligned} e \sin\omega &= +0.0040; \quad e = 0.013 \\ e \cos\omega &= -0.0125; \quad \omega = 162° \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} e \sin\omega &= -0.0030; \quad e = 0.006 \\ e \cos\omega &= -0.0055; \quad \omega = 209° \end{aligned}\right.$$

De eenige gevolgtrekking, die men hieruit maken kan, is dat $e$ in beide tijdperken zeer gering was, en nauwelijks 0.01 te boven ging.

9. Een enkele blik op de door Dr. PANNEKOEK medegedeelde cijfers overtuigt ons, dat het hopeloos ware uit de resultaten der *afzonderlijke* waarnemers iets naders over de excentriciteit te willen afleiden. Met name zij gewezen op 't groote verschil der uitkomsten, die LINDEMANN en PANNEKOEK uit de reductie van PLASSMANN's waarnemingen verkregen, zoodat het geen zin heeft uit deze alleen reeds tot een toename der excentriciteit te besluiten.

Een eenvoudige methode om ook de helling der baan te bepalen, meent Dr. L. TERKAN gevonden te hebben op deze wijze [1]):

„Lichtminimum of -maximum vindt plaats, wanneer $\varrho$ „extreme" waarden aanneemt, derhalve als

---

1) A. N. nr 4067.

$$\frac{d\varrho}{dv} = \cos v \sin v \sin^2 i + e \sin v = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Uit formule (2) is voor het hoofdminimum $\sin\ v = 0$, voor het „nevenmaximum" $\cos v = -\dfrac{e}{\sin^2 i}$. Aangenomen is hierbij, dat de tijd van het hoofdmininimnm samenvalt met den periastron-doorgang. Kent men dus $e$, en $v$ op 't oogenblik van 't maximum, dan is ook $i$ bekend. Voor $e$ neemt TERKAN de waarde 0.07, door BELOPOLSKY uit zijn spectroskopische waarnemingen afgeleid [1]). De middelbare anomalie in 't maximum bepaalt hij uit het door PLASSMANN gevonden interval [2]):

II min. — II max. = 3,05 dagen,

en ontwikkelt dan deze anomalie, met behulp van $\cos\ v = -\dfrac{e}{\sin^2 i}$, in een reeks [3]) met een argument $\alpha$, dat $\sin^2 i$ bevat. Hieruit vindt hij

$$i = 51^\circ.3.$$

Later, in zijn Hongaarschen arbeid [4]) stelt hij $e = 0.06$, en leidt uit eigen waarnemingen af: I min. — I max. = 3,48 dagen, en vindt dan, uit de gewone vergelijkingen van KEPLER, met behulp van $\cos\ v = -\dfrac{e}{\sin^2 i}$:

$$i = 30^\circ.$$

Afgezien nog van de zeer twijfelachtige waarde der numerieke gegevens schijnt de hypothese, dat het licht-maximum intreedt, als $\varrho$ een maximum is, ongegrond. Neemt men daarenboven met Dr. TERKAN aan, dat de beide hemellichamen bolvormig zijn, dan moet het licht constant zijn, zoolang de beide bollen elkaar niet voor 't oog bedekken, en dit wordt door de waarnemingen niet bevestigd. Daarenboven kan er dan van een scherp bepaald maximum-tijdstip geen sprake zijn. Het antwoord door Dr. TERKAN op dit bezwaar gegeven: „dat ons oog of de kijker niet in staat is het stelsel te scheiden, en dat de lichtstralen, die in de ruimte uit dezelfden afstand, maar van een breeder veld tot ons komen, tot een grootere schijf worden vereenigd", [5]) mag weinig bevredigend heeten.

---

[1]) Vergl. blz. 383. noot [1])

[2]) A. N. nr 3242.

[3]) In deze reeks is bij vergissing $\sin\varphi \cos\varphi$ vervangen door $e$, en $tg\,(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$ door $\dfrac{\sqrt{4-e^2} - e}{\sqrt{4-e^2} + e}$ (in plaats van $\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}$).

[4]) $\beta$ Lyrae palyaelemeinek enz. blz. 412.

[5]) $\beta$ Lyrae palyaelemeinek enz. blz. 417.

10. *Bepaling der baanelementen enz. uit de lichtkromme van* ARGELANDER [1]).

Als eerste benadering stellen wij $i = 90°$, $e = 0$.

Eene benaderende waarde van $q$ levert ons het verloop der kromme in de omgeving der maxima. Zoolang zij daar ten opzichte van de ordinaat van 't maximum symmetrisch verloopt, kan men aannemen, dat de eclips nog niet begonnen is, en is

$$J = \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 nt_M};$$

$t_M$ = tijd, van 't max. gerekend.

Uit de lichtkromme lezen we dus de vermindering $(\sigma_0 - \sigma)$ in lichtgraden af, in gelijke tijdsintervallen vóór en na de beide maxima.

| $t_M$ | $(\sigma_0-\sigma)_I$ | $(\sigma_0-\sigma)_{II}$ |
|---|---|---|
| $-30^u$ | 0.76 | 0.50 |
| $-24$ | 0.47 | 0.31 |
| $-18$ | 0.25 | 0.18 |
| $-12$ | 0.10 | 0.07 |
| $-6$ | 0.02 | 0.02 |
| $+6$ | 0.03 | 0.03 |
| $+12$ | 0.09 | 0.11 |
| $+18$ | 0.21 | 0.24 |
| $+24$ | 0.38 | 0.43 |
| $+30$ | 0.59 | 0.67 |

| $t_M$ | $(\sigma_0-\sigma)_{gem}$ |
|---|---|
| $\pm 6^u$ | 0.025 |
| $\pm 12$ | 0.093 |
| $\pm 18$ | 0.220 |

| $t_M$ | $(W-B)_I$ | $(W-B)_{II}$ |
|---|---|---|
| $-18^u$ | $-0.03$ | $+0.04$ |
| $-12$ | 0.00 | $+0.03$ |
| $-6$ | 0.00 | 0.00 |
| $+6$ | $-0.01$ | $-0.01$ |
| $+12$ | $+0.01$ | $-0.01$ |
| $+18$ | $+0.01$ | $-0.01$ |

Bij de 24 uren vóór en ná vertoont zich reeds een toenemende afwijking van de symmetrie bij beide maxima. Uit de gemiddelde waarden $(\sigma_0 - \sigma)_{gem}$ werden nu de lichtintensiteiten berekend uit de formule:

$$\sigma_0 - \sigma = -\frac{2.512}{0.13} \log J$$

en de betrekking:

$$\varepsilon^2 \sin^2 nt_M = 1 - J^2$$

leverde de volgende gegevens:

$$0.015\, \varepsilon^2 = 0.006$$
$$0.058\, \varepsilon^2 = 0.022$$
$$0.127\, \varepsilon^2 = 0.051$$

[1]) De Stella β Lyrae variabili commentatio altera. Scripsit FREDERICUS ARGELANDER Bonnae a. 1859. — Curva „vera" pro 1850.

Hieruit volgt als waarschijnlijkste waarde $\varepsilon^2 = 0.397$; $q = 1.288$. De afwijkingen Waarn.—Berek. zijn gegeven in de twee laatste kolommen.

Heeft men $q$ gevonden, dan kan men $\varkappa$ en $\lambda$ bepalen uit de lichtintensiteiten in de beide minima. Deze zijn: 0.3433 en 0.6365, en leveren ons, voor $i = 90°$, de twee betrekkingen:

$$\frac{1}{q} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \varkappa^2} = 0.3433\,; \quad \frac{1}{q}\left(1 - \frac{\varkappa^2 \lambda}{\lambda + \varkappa^2}\right) = 0.6365,$$

waaruit volgt:

$$\varkappa = 0.6387\,; \quad \lambda = 0.3233.$$

Eindelijk is, op 't oogenblik, dat de eclips begint:

$$\frac{\varrho}{f} = \varrho' = 1 + \varkappa.$$

Uit de asymmetrie leiden wij bij benadering af, dat dit even na $18^u$ ($nt_M = \pm\, 20°55'$) het geval is, en stellen dus:

$$\frac{\varrho}{f} = \frac{a \cos 21°}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 21°}} = 1.6387 = 1 + \varkappa$$

waaruit volgt:

$$a = 1.710.$$

Wij hebben dus als eerste benadering de volgende elementen:

$\varkappa = 0.6387$; $\lambda = 0.3233$; $q = 1.288$; $a = 1.710$; $e = 0$; $i = 90°$

en als „epoche" nemen wij aan, dat de centrale verduistering van $E_2$ door $E_1$ samenvalt met het hoofdminimum van ARGELANDER's kromme.

11. In de volgende tabel geeft de 2e kolom onder $W_1$ de lichtgraden van ARGELANDER's kromme in gelijke intervallen vóór en na het hoofdminimum, de 7e kolom onder $W_2$ idem vóór en na de halve periode $= 6^d.455$ (dus *niet* vóór en na het nevenminimum, dat bij ARGELANDER $6^d.375$ van het eerste verwijderd is). De kolommen $R_{s_1}$ en $R_{s_2}$ geven de lichtgraden, uit bovenstaande elementen berekend.

12. Zooals men ziet, zijn de afwijkingen $W - R_s$ vóór beide minima overwegend negatief, na de minima positief, waaruit volgt, dat door eene verschuiving der theoretische lichtkromme in negatieve tijdrichting betere aansluiting kan worden verkregen. Ook de excentriciteit veroorzaakt, behalve verplaatsing der maxima en minima, eene kleine asymmetrie ten opzichte der minima. Om den invloed van excentriciteit en epoche op de asymmetrie afzonderlijk na te gaan, kunnen wij de foutenvergelijkingen in twee groepen splitsen. De coëfficienten

| $t$ | $W_1$ | $R_{S_1}$ | $R_{M_1}$ | $W_1$-$R_{S_1}$ | $W_1$-$R_{M_1}$ | $W_2$ | $R_{S_2}$ | $R_{M_2}$ | $W_2$-$R_{S_2}$ | $W_2$-$R_{M_2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| —72 | 11.95 | 11.98 | 11.98 | —0.03 | —0.03 | 11.87 | 11.98 | 11.98 | —0.11 | —0.11 |
| —66 | 11.84 | 11.91 | 11.93 | —0.07 | —0.09 | 11.79 | 11.91 | 11.93 | —0.12 | —0.14 |
| —60 | 11.69 | 11.80 | 11.84 | —0.11 | —0.15 | 11.66 | 11.80 | 11.84 | —0.14 | —0.16 |
| —54 | 11.48 | 11.58 | 11.72 | —0.10 | —0.24 | 11.48 | 11.62 | 11.72 | —0.14 | —0.24 |
| —48 | 11.20 | 11.34 | 11.45 | —0.14 | —0.25 | 11.25 | 11.37 | 11.52 | —0.12 | —0.27 |
| —42 | 10.82 | 10.75 | 11.04 | +0.07 | —0.22 | 10.99 | 11.06 | 11.26 | —0.07 | —0.27 |
| —36 | 10.29 | 10.07 | 10.44 | +0.22 | —0.15 | 10.68 | 10.68 | 10.92 | 0.00 | —0.24 |
| —30 | 9.27 | 9.14 | 9.64 | +0.13 | —0.37 | 10.30 | 10.22 | 10.50 | +0.08 | —0.20 |
| —24 | 7.40 | 7.91 | 8.55 | —0.51 | —1.15 | 9.78 | 9.70 | 10.00 | +0.08 | —0.22 |
| —18 | 4.83 | 6.28 | 7.13 | —1.45 | —2.30 | 9.04 | 9.13 | 9.44 | —0.09 | —0.40 |
| —12 | 3.55 | 4.22 | 5.26 | —0.67 | —1.71 | 8.42 | 8.56 | 8.82 | —0.14 | —0.40 |
| — 6 | 3.10 | 3.05 | 3.15 | +0.05 | —0.05 | 8.21 | 8.23 | 8.25 | —0.02 | —0.04 |
| 0 | 3.00 | 3.00 | 3.00 | 0.00 | 0.00 | 8.20 | 8.19 | 8.19 | +0.01 | 0.00 |
| + 6 | 3.15 | 3.05 | 3.15 | +0.10 | 0.00 | 8.38 | 8.23 | 8.25 | +0.15 | +0.13 |
| +12 | 4.30 | 4.22 | 5.26 | +0.08 | —0.96 | 8.91 | 8.56 | 8.82 | +0.35 | +0.09 |
| +18 | 6.67 | 6.28 | 7.13 | +0.39 | —0.46 | 9.64 | 9.13 | 9.44 | +0.51 | +0.20 |
| +24 | 8.46 | 7.91 | 8.55 | +0.55 | —0.09 | 10.25 | 9.70 | 10.00 | +0.55 | +0.25 |
| +30 | 9.70 | 9.14 | 9.64 | +0.56 | +0.06 | 10.75 | 10.22 | 10.50 | +0.53 | +0.25 |
| +36 | 10.50 | 10.07 | 10.44 | +0.43 | +0.06 | 11.14 | 10.68 | 10.92 | +0.46 | +0.22 |
| +42 | 10.97 | 10.75 | 11.04 | +0.20 | —0.07 | 11.43 | 11.06 | 11.26 | +0.37 | +0.17 |
| +48 | 11.[illegible]1 | 11.34 | 11.45 | —0.03 | —0.14 | 11.64 | 11.37 | 11.52 | +0.27 | +0.12 |
| +54 | 11.57 | 11.58 | 11.72 | —0.01 | —0.15 | 11.79 | 11.62 | 11.72 | +0.17 | +0.07 |
| +60 | 11.75 | 11.80 | 11.84 | —0.05 | —0.09 | 11.91 | 11.80 | 11.84 | +0.11 | +0.07 |
| +66 | 11.88 | 11.91 | 11.93 | —0.03 | —0.05 | 11.98 | 11.91 | 11.93 | +0.07 | +0.05 |
| +72 | 11.91 | 11.98 | 11.98 | —0.07 | —0.07 | 12.01 | 11.98 | 11.98 | +0.03 | +0.03 |

$K$, $A$, $I$ en $X$ zijn nl. even functies, $Y$ en $\Delta$ oneven functies van $nt_1$, resp. $nt_2$. Nemen wij derhalve de som en het verschil van twee foutenvergelijkingen, geldend voor $+t_1$ en $-t_1$, dan bevat de eerste der beide resulteerende enkel $d(\kappa^2)$, $\delta a$, $i'^2$ en $x$, de tweede $y$ en $dM_0$.

Op deze wijze zijn de hier volgende vergelijkingen afgeleid, voor intervallen van telkens 6 uur, van 't 1ste, resp. 2de minimum af gerekend.

Hierbij zijn echter niet bovenstaande elementen ten grondslag gelegd, maar die, welke door Dr. MIJERS na herhaalde benadering uit ARGELANDER's kromme zijn afgeleid en door hem voor de beste cirkel-elementen worden gehouden. Deze zijn :

$$a = 1.8955 \; ; \; \varkappa = 0.7580 \; ; \; q = 1.1993 \; ; \; \lambda = 0.4023 \; ; \; i = 0$$

Daaruit zijn door mij de lichtgraden $R_{M_1}$ en $R_{M_2}$ der vorige tabel berekend; zooals men ziet, zijn de afwijkingen $W - R_{M_1}$ in de nabijheid van het hoofdminimum vrij aanzienlijk.

HOOFDMINIMUM.

| $t_1$ | $d(x^2)$ | $da$ | $(10c^2)$ | $x$ | = | $y$ | $(dM_0-y)$ | = |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ±72° | + 0.03 | + 0.00 | + 0.00 | + 0.70 | − 0.05 | + 0.62 | + 0.70 | − 0.02 |
| 66 | + .13 | + .00 | + .00 | + 1.41 | − .07 | + 1.12 | + 1.45 | + .02 |
| 60 | + .30 | + .00 | + .00 | + 2.02 | − .12 | + 1.41 | + 2.15 | + .03 |
| 54 | + .04 | + .60 | + .02 | + 2.59 | − .19 | + 1.55 | + 3.20 | + .04 |
| 48 | − .40 | + 1.46 | + .06 | + 3.16 | − .19 | + 0.94 | + 4.76 | + .05 |
| 42 | − .50 | + 1.92 | + .14 | + 3.55 | − .14 | + .76 | + 6.37 | + .07 |
| 36 | − .40 | + 2.34 | + .28 | + 3.80 | − .04 | + .60 | + 8.18 | + .10 |
| 30 | − .06 | + 2.58 | + .50 | + 3.89 | − .15 | + .44 | + 10.32 | + .21 |
| 24 | + .60 | + 2.70 | + .91 | + 3.78 | − .62 | + .81 | + 12.92 | + .53 |
| 18 | + 1.75 | + 2.60 | + 1.70 | + 3.43 | − 1.38 | + .18 | + 16.08 | + .92 |
| 12 | + 3.42 | + 2.20 | + 3.38 | + 2.69 | − 1.33 | + .07 | + 19.57 | + .37 |
| 6 | + 2.97 | + 0.79 | + 4.98 | + 1.02 | − 0.02 | + .01 | + 14.11 | + .02 |

NEVENMINIMUM.

| $t_2$ | $d(x^2)$ | $da$ | $(10c^2)$ | $x$ | = | $y$ | $(dM_0+y)$ | = |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ±72° | + 0.03 | + 0.00 | + 0.00 | − 0.05 | − 0.04 | − 0.04 | + 0.05 | + .02 |
| 66 | + .12 | + .00 | + .00 | − .10 | − .04 | − .07 | + .10 | + .09 |
| 60 | + .30 | + .00 | + .00 | − .14 | − .05 | − .09 | + .15 | + .12 |
| 54 | + .33 | + .24 | + .00 | − .26 | − .08 | − .01 | + .40 | + .15 |
| 48 | + .30 | + .58 | + .02 | − .44 | − .07 | + .07 | + .90 | + .19 |
| 42 | + .38 | + .78 | + .05 | − .59 | − .05 | + .06 | + 1.42 | + .22 |
| 36 | + .52 | + .89 | + .10 | − .71 | − .01 | + .05 | + 2.01 | + .23 |
| 30 | + .70 | + .94 | + .18 | − .79 | + .02 | + .04 | + 2.65 | + .22 |
| 24 | + .90 | + .91 | + .30 | − .80 | + .01 | + .03 | + 3.35 | + .23 |
| 18 | + 1.11 | + .80 | + .52 | − .73 | − .10 | − .01 | + 4.02 | + .30 |
| 12 | + 1.22 | + .58 | + .89 | − .55 | − .15 | − .00 | + 4.48 | + .24 |
| 6 | + 0.62 | + .17 | + 1.09 | − .17 | + .04 | + .00 | + 2.71 | + .08 |

Bij de afleiding der hier volgende normaal-vergelijkingen zijn de fouten-vergelijkingen geldend voor $t_1 = \pm 6^{\text{u}}$ en $t_2 = \pm 6^{\text{u}}$ achterwege gelaten.

Normaal-vergelijkingen :

$$\begin{array}{llllll}
18.54\, d(\varkappa^2) & + 15.17\, da & + 16.98\, (10\iota'^2) & + 15.31\, x & = & - 7.670 \\
15.17 \quad \text{„} & + 41.68 \quad \text{„} & + 18.14 \quad \text{„} & + 53.17 \quad \text{„} & = & - 9.673 \\
16.98 \quad \text{„} & + 18.14 \quad \text{„} & + 20.29 \quad \text{„} & + 20.75 \quad \text{„} & = & - 7.720 \\
15.31 \quad \text{„} & + 53.17 \quad \text{„} & + 20.75 \quad \text{„} & + 101.96 \quad \text{„} & = & - 13.227
\end{array}$$

$$255.69\, y + 160.37\, (dM_0 - y) = 10.242$$

$$160.37\, y + 1125.52\, (dM_0 - y) = 37.759$$

Oplossing der vier eerste vergelijkingen :

$x = -0.026$ ; $10\iota'^2 = -0.044$ ; $da = -0.0741$ ; $d(\varkappa^2) = -0.2915$.

Daar $\iota'$ imaginair wordt, stellen wij in de fouten-vergelijkingen $\iota' = 0$, en vinden dan :

$$x = -0.026 \; ; \; da = -0.0799 \; ; \; d(\varkappa^2) = -0.3268.$$

$$y = +0{,}021 \; ; \; dM_0 - y = +0.031.$$

Hieruit vindt men als verbeterde elementen :

$a = 1.8156$ ; $\varkappa = 0.4978$ ; $\lambda = 0.2249$ ; $q = 1.3859$ ; $e = 0.017$; $\omega = 141°.3$.

Bijzonder groot is de correctie van $\varkappa^2$, meer dan de helft der oorspronkelijke waarde (0.5746). Daar in dit geval $dJ$ niet meer evenredig met $d(\varkappa^2)$ kan worden gesteld, moet men met deze elementen opnieuw een lichtkromme en de differentiaal-quotiënten berekenen, om — zoo noodig — een nieuwe benadering te vinden.

In de volgende tabel geven de kolommen $R_1$ en $R_2$ de lichtgraden, uit de verbeterde elementen berekend.

In Fig. I vindt men de grafische voorstelling dezer getallen.

Hierdoor is de aansluiting in de omgeving van het hoofdminimum, aanmerkelijk verbeterd. Wel is waar blijft er nog een afwijking van meer dan een lichtgraad te constateeren, 18 uren vóór het minimum. Wellicht zou die door herhaling van het geheele proces nog verminderd kunnen worden. Neemt men echter de onzekerheid in aanmerking, die meestal bij 't trekken der kromme in de naaste omgeving van een minimum bestaat, dan loont 't de moeite niet, die omslachtige berekening te herhalen. In elk geval blijkt uit de kleine waarde der coefficienten van $y$ in de foutenvergelijkingen duidelijk, dat eene excentriciteit van enkele honderdsten niet in staat is eene merkbare asymmetrie te verklaren. De betere aansluiting bij 't hoofdminimum wordt hoofdzakelijk veroorzaakt door de verschuiving van het theoretisch hoofd-minimum om $\dfrac{dM_0 - y}{2\pi} \times U = 0^{\text{d}}.063$ in de rich-

| $t$ | $W_1$ | $R_1$ | $W_1-R_1$ | $W_2$ | $R_2$ | $W_2-R_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| —72u | 11.95 | 11.95 | 0.00 | 11.87 | 11.97 | —0.10 |
| —66 | 11.84 | 11.81 | .00 | 11.79 | 11.88 | — .09 |
| —60 | 11.69 | 11.68 | + .01 | 11.66 | 11.73 | — .07 |
| —54 | 11.48 | 11.47 | + .01 | 11.48 | 11.52 | — .04 |
| —48 | 11.20 | 11.22 | — .02 | 11.25 | 11.26 | — .01 |
| —42 | 10.82 | 10.93 | — .11 | 10.99 | 10.96 | + .03 |
| —36 | 10.29 | 10.42 | — .13 | 10.68 | 10.55 | + .13 |
| —30 | 9.27 | 9.47 | — .20 | 10.30 | 10.05 | + .25 |
| —24 | 7.40 | 8.06 | — .66 | 9.78 | 9.47 | + .31 |
| —18 | 4.83 | 6.01 | —1.18 | 9.04 | 8.84 | + .20 |
| —12 | 3.55 | 3.46 | + .09 | 8.42 | 8.35 | + .07 |
| — 6 | 3.10 | 3.05 | + .05 | 8.21 | 8.22 | — .01 |
| 0 | 3.00 | 3.00 | .00 | 8.20 | 8.21 | — .01 |
| + 6 | 3.15 | 3.06 | + .09 | 8.38 | 8.30 | + .05 |
| +12 | 4.30 | 3.88 | + .42 | 8.91 | 8.73 | + .18 |
| +18 | 6.67 | 6.39 | + .28 | 9.64 | 9.35 | + .29 |
| +24 | 8.46 | 8.32 | + .14 | 10.25 | 9.94 | + .31 |
| +30 | 9.70 | 9.66 | + .04 | 10.75 | 10.45 | + .30 |
| +36 | 10.50 | 10.54 | — .04 | 11.14 | 10.87 | + .27 |
| +42 | 10.97 | 11.01 | — .04 | 11.43 | 11.18 | + .25 |
| +48 | 11.31 | 11.30 | + .01 | 11.64 | 11.44 | + .20 |
| +54 | 11.57 | 11.55 | + .02 | 11.79 | 11.66 | + .13 |
| +60 | 11.75 | 11.75 | .00 | 11.91 | 11.83 | + .08 |
| +66 | 11.88 | 11.89 | — .01 | 11.98 | 11.94 | + .04 |
| +72 | 11.91 | 11.98 | — .07 | 12.01 | 12.00 | + .01 |

ting der negatieve tijd-as, terwijl ook het nevenminimum $0^d.069$ vroeger valt dan dat der lichtkromme van Argelander.

3. Een tweede stel van elementen werd afgeleid in de niet onaannemelijke veronderstelling, dat het eerste minimum in Argelander's lichtkromme $0^d.08$ vroeger valt, waardoor de asymmetrie grootendeels wordt weggenomen. Het tweede theoretische minimum laten

wij samenvallen met het waargenomene, waardoor het interval der beide minima juist gelijk wordt aan eene halve periode ($6^d.375 + 0^d.08 = 6^d.455$). De baan moet derhalve cirkelvormig zijn, of elliptisch met de lange as loodrecht op de lijn der knoopen. Wij vonden op deze wijze:

$a=1.7209$; $\varkappa=0.5015$; $\lambda=0.2276$; $q=1.3944$; $i'=7°,25$; $e=0.04$; $\omega=180°$.

De volgende tabel geeft in de kolommen $R_1$ en $R_2$ de lichtgraden,

| $t$ | $W_1$ | $R_1$ | $R'_1$ | $W_1$-$R_1$ | $W_1$-$R'_1$ | $W_2$ | $R_2$ | $R'_2$ | $W_2$-$R_2$ | $W_2$-$R'_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — 72* | 11.97 | 11.97 | 11.97 | 0.00 | 0.00 | 11.89 | 11.97 | 11.97 | —.08 | —.08 |
| — 66 | 11.88 | 11.89 | 11.83 | —.01 | +.05 | 11.83 | 11.89 | 11.95 | —.06 | —.12 |
| — 60 | 11.74 | 11.75 | 11.66 | —.01 | +.08 | 11.71 | 11.75 | 11.84 | —.04 | —.13 |
| — 54 | 11.54 | 11.56 | 11.44 | —.02 | +.10 | 11.54 | 11.56 | 11.67 | —.02 | —.13 |
| — 48 | 11.29 | 11.31 | 11.18 | —.02 | +.11 | 11.33 | 11.31 | 11.44 | +.02 | —.11 |
| — 42 | 10.95 | 10.98 | 10.86 | —.03 | +.09 | 11.08 | 11.01 | 11.15 | +.07 | —.07 |
| — 36 | 10.48 | 10.35 | 10.16 | +.13 | +.32 | 10.78 | 10.62 | 10.71 | +.16 | +.07 |
| — 30 | 9.65 | 9.42 | 9.20 | +.23 | +.45 | 10.42 | 10.26 | 10.40 | +.16 | +.02 |
| — 24 | 8.06 | 8.09 | 7.85 | —.03 | +.21 | 9.95 | 9.63 | 9.75 | +.32 | +.20 |
| — 18 | 5.48 | 6.29 | 6.05 | —.81 | —.57 | 9.28 | 9.06 | 9.15 | +.22 | +.13 |
| — 12 | 3.80 | 4.07 | 3.90 | —.27 | —.10 | 8.56 | 8.52 | 8.57 | +.04 | —.01 |
| — 6 | 3.18 | 3.05 | 3.05 | +.13 | +.13 | 8.25 | 8.25 | 8.26 | .00 | —.01 |
| 0 | 3.00 | 3.00 | 3.00 | .00 | .00 | 8.19 | 8.20 | 8.20 | —.01 | —.01 |
| + 6 | 3.07 | 3.05 | 3.05 | +.02 | +.02 | 8.30 | 8.25 | 8.26 | +.05 | +.04 |
| + 12 | 3.76 | 4.07 | 3.90 | —.31 | —.14 | 8.71 | 8.52 | 8.57 | +.19 | +.14 |
| + 18 | 6.01 | 6.29 | 6.05 | —.28 | —.04 | 9.40 | 9.06 | 9.15 | +.34 | +.25 |
| + 24 | 7.98 | 8.09 | 7.85 | —.11 | +.13 | 10.08 | 9.63 | 9.75 | +.45 | +.33 |
| + 30 | 9.37 | 9.42 | 9.20 | —.05 | +.17 | 10.61 | 10.26 | 10.40 | +.35 | +.21 |
| + 36 | 10.31 | 10.35 | 10.16 | —.04 | +.15 | 11.04 | 10.62 | 10.71 | +.42 | +.33 |
| + 42 | 10.84 | 10.98 | 10.86 | —.14 | —.02 | 11.35 | 11.01 | 11.15 | +.34 | +.20 |
| + 48 | 11.22 | 11.31 | 11.18 | —.09 | +.04 | 11.58 | 11.31 | 11.44 | +.27 | +.14 |
| + 54 | 11.50 | 11.56 | 11.44 | —.06 | +.06 | 11.75 | 11.56 | 11.67 | +.19 | +.08 |
| + 60 | 11.71 | 11.75 | 11.66 | —.04 | +.05 | 11.87 | 11.75 | 11.84 | +.12 | +.03 |
| + 66 | 11.84 | 11.89 | 11.83 | —.05 | +.01 | 11.96 | 11.89 | 11.95 | +.07 | +.01 |
| + 72 | 11.94 | 11.97 | 11.97 | —.06 | —.06 | 12.00 | 11.97 | 11.97 | +.03 | +.03 |

berekend met de 5 eerste elementen, zonder excentriciteit; de kolommen $R_1'$ en $R_2'$ dezelfde, met inachtneming der excentriciteit.

De kolommen $W_1 - R_1'$ en $W_2 - R_2'$ laten eene middelbare afwijking van ± 0.17 lichtgraden, terwijl ARGELANDER als middelb. fout van de ordinaten zijner lichtkromme ± 0.16 lichtgr. geeft (waarsch. fout 0.1095) 't Ware dus illusorisch, naar betere aansluiting te streven. De elliptische baan lijdt echter aan 't groote bezwaar, dat daarbij het eerste maximum $0^d.18$ na—, het tweede maximum $0^d.10$ vóór de overeenkomstige maxima van ARGELANDER's lichtkromme vallen. In de cirkelbaan valt het eerste max. slechts $0^d.02$, het tweede $0^d.06$ later, terwijl de aansluiting nog zeer bevredigend is.

14. Ten slotte zij hier nog een stel cirkel-elementen meegedeeld, die door herhaalde benadering verkregen zijn uit de lichtkromme van Dr. PANNEKOEK:

$$a = 1.5378\ ;\ \varkappa = 0.5378\ ;\ \lambda = 0.2900\ ;\ q = 1\ 4609.$$

Bij de afleiding is aangenomen, dat $a$ niet kleiner mag zijn dan $1 + \varkappa$. Waargenomen en theoretisch *hoofdminimum* laten wij samenvallen.

In de volgende tabel geeft $t$ het aantal uren vóór en na het *theoretisch* hoofd- en nevenminimum; $W_1$ en $W_2$ de lichtgraden op dezelfde tijdstippen, afgelezen uit de lichtkromme van Dr. P.; $R_1$ en $R_2$ de lichtgraden der theoretische kromme.

De nog overblijvende verschillen zijn vóór 't eerste minimum overwegend positief, daarna negatief; bij 't nevenminimum zijn de teekens omgekeerd. Die verschillen zouden, bij eene kleine excentriciteit ($e \sin \omega = 0.016$), vrij sterk verminderd kunnen worden, door het hoofdminimum in de lichtkromme van PANNEKOEK $0^d.063$ later, en het nevenminimum $0^d.069$ vroeger te leggen. Daardoor wordt echter het tijdsinterval min I — min II méér verminderd, dan aannemelijk schijnt.

Overigens spreekt het vanzelf, dat in het onderhavige geval, waar twee gasvormige lichamen met elkaar in contact schijnen, de bewegingsvergelijkingen van KEPLER slechts een zeer ruwe benadering geven, terwijl ook de invloed der vloedwerking ertoe bijdraagt, om de gevolgen der excentriciteit op 't verloop der lichtkromme te maskeeren.

Wij besluiten hieruit, dat men uit de lichtkrommen enkel kan afleiden, dat de baan nagenoeg cirkelvormig is; voor een toe- of afname der in elk geval zeer geringe excentriciteit is geen grond voorhanden. Eene vergelijking der elementen $a$ en $q$ wekt 't vermoeden, dat de afstand der beide hemellichamen sinds ARGELANDER's tijd

| $t$ | $W_1$ | $R_1$ | $W_1—R_1$ | $W_2$ | $R_2$ | $W_2—R_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| —72u | 11.96 | 11.97 | —0.01 | 11.96 | 11 97 | —0.01 |
| —66 | 11.88 | 11.87 | + .01 | 11 87 | 11.88 | — .01 |
| —60 | 11.72 | 11 67 | + .05 | 11.62 | 11.71 | — .09 |
| —54 | 11.53 | 11.37 | + .16 | 11.33 | 11.46 | — .13 |
| —48 | 11.26 | 10.95 | + .31 | 10.89 | 11.15 | — .26 |
| —42 | 10.87 | 10.37 | + .50 | 10.42 | 10.75 | — .33 |
| —36 | 10.23 | 9.61 | + .62 | 9.92 | 10 27 | — .35 |
| —30 | 9.06 | 8.60 | + .46 | 9.38 | 9 72 | — 34 |
| —24 | 7.17 | 7.27 | — .10 | 8 86 | 9.10 | — .24 |
| —18 | 5.15 | 5.53 | — .38 | 8.34 | 8.43 | — .09 |
| —12 | 3.80 | 3.53 | + .27 | 7 92 | 7.82 | + .10 |
| — 6 | 3.20 | 3.09 | + .11 | 7 61 | 7.57 | + .04 |
| 0 | 3.00 | 3.00 | .00 | 7.50 | 7.50 | .00 |
| + 6 | 3.16 | 3.09 | + .07 | 7.75 | 7.57 | + .18 |
| +12 | 3.77 | 3.53 | + .24 | 8.11 | 7.82 | + .29 |
| +18 | 5.07 | 5.53 | — .46 | 8.68 | 8.43 | + .25 |
| +24 | 6.75 | 7.27 | - .52 | 9.26 | 9.10 | + .16 |
| +30 | 8.36 | 8.60 | — .24 | 9.80 | 9.72 | + 08 |
| +36 | 9 40 | 9.61 | — .21 | 10.30 | 10.27 | + .03 |
| +42 | 10.07 | 10.37 | — .30 | 10.75 | 10.75 | .00 |
| +48 | 10.62 | 10.95 | — .33 | 11.08 | 11 15 | — .07 |
| +54 | 11.13 | 11.37 | — .24 | 11.42 | 11.46 | — .04 |
| +60 | 11.52 | 11.67 | — .15 | 11.61 | 11.71 | — .10 |
| +66 | 11.78 | 11.87 | — .09 | 11.87 | 11.88 | — .01 |
| +72 | 11.93 | 11.97 | — 04 | 11.94 | 11.97 | — .03 |

Fig. II geeft hiervan de grafische voorstelling.

verkleind is, waarmede de vergrooting van $q$ in overeenstemming is. Daarmede schijnt echter weer de gestadige verlenging der periode in strijd.

15. *Baanberekening uit* BELOPOLSKY'*s spectrogrammen.*

Bij de berekening der baan uit de snelheden in de richting van

den gezichtsstraal, zooals die door B. zijn afgeleid uit de verplaatsing der lichtende *F*-lijn in de spectrogrammen van 1892, is de methode van WILSING [1]) gevolgd, die voor zeer geringe excentriciteit de voorkeur verdient boven die van LEHMAN-FILHÉS.

De eerste kolom geeft den middelbaren waarnemingstijd van PULKOWA; de 2e kolom de phase in de lichtperiode van 12.91 dagen, waarbij is aangenomen, dat het hoofdminimum, volgens de door PANNEKOEK verbeterde formule van ARGELANDER viel op 1892 Sept 25.781 M. T. Greenwich (= $25^d.865$ M. T. PULKOWA). De 3e kolom bevat de tot de zon herleide snelheden in geografische mijlen, met kleine wijziging ontleend aan de Memorie della Soc. d. Spettr. It., vol. XXII. BELOPOLSKY heeft nl. voor de snelheid der aarde eene constante correctie van — 2.1 G.M. aangebracht, terwijl deze in werkelijkheid schommelt tusschen — 1.6 en — 2.3 G.M.

| *T* | Phase | Snelh. in G.M. | $S_r$ | *W-R* |
|---|---|---|---|---|
| | d | | | |
| Sept. 23.3 | 10.34 | —11.2 | —11.25 | +0.05 |
| 24.4 | 11.44 | —11 6 | —10.09 | —1.51 |
| 25.4 | 12.44 | — 4.4 | — 2 58 | +1.82 |
| 27.3 | 1.44 | + 4.8 | + 5.28 | —0.48 |
| 30.3 | 4.44 | +10.7 | +10.50 | +0.20 |
| Okt. 2.3 | 6.44 | + 1 7 | + 2.09 | —0.39 |
| 3.3 | 7.44 | — 3.6 | — 2.71 | —0.89 |
| 7.3 | 11.44 | — 9.5 | —10.09 | +0.59 |
| 11.3 | 2.53 | +10.1 | +10.29 | —0.19 |
| 19.3 | 10.53 | —12.4 | —11.29 | —1.11 |
| 20.3 | 11.53 | —10 3 | — 9.84 | —0.46 |
| 26.3 | 4.62 | +10.6 | + 9.98 | +0.62 |
| Nov. 25.2 | 8.70 | — 6.7 | — 7.85 | +1.15 |
| 26.2 | 9.70 | —10.2 | —10.62 | +0 42 |

Deze waarnemingen geven, met de notaties van WILSING, de volgende normaalvergelijkingen :

[1]) Dr. J. WILSING. Ueber die Bestimmung von Bahnelementen enger Doppelsterne aus spectroskopischen Messungen der Geschwindigkeitscomponenten. A. N. no. 3198

Fig. I.

——— Lichtkrommevan Argelander („vera" pro 1850)

.......... Theoretische lichtkromme; elementen:

$a = 1.8156$; $\varkappa = 0.4978$; $\lambda = 0.2249$; $q = 1.3859$

$e = 0.017$; $\omega = 141^\circ,3$; $i = 90^\circ$

Verplaatsing van het hoofdminimum —0d.063.

De abscissen geven den tijd aan in dagen; de ordinaten het licht in graden

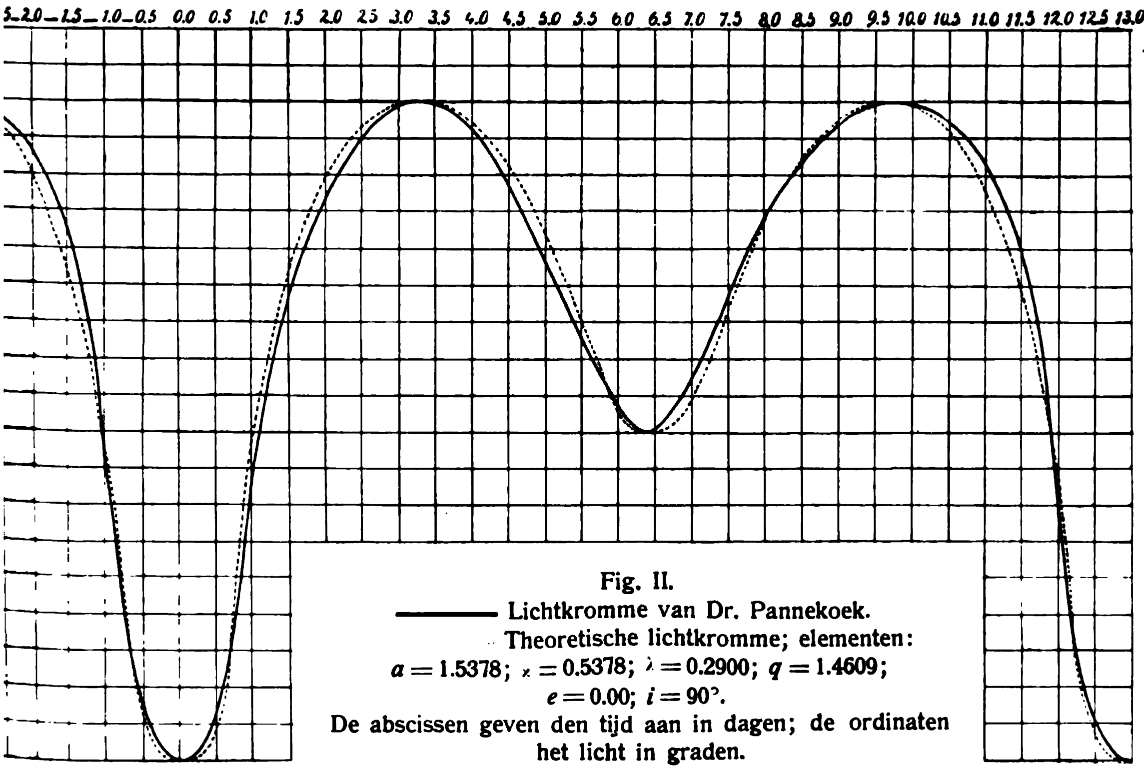



Fig. II.

——— Lichtkromme van Dr. Pannekoek.

.......... Theoretische lichtkromme; elementen:

$a = 1.5378$; $\varkappa = 0.5378$; $\lambda = 0.2900$; $q = 1.4609$;

$e = 0.00$; $i = 90^\circ$.

De abscissen geven den tijd aan in dagen; de ordinaten het licht in graden.

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
+ 14 g_0 & -3.17\ a_1 & +1.56\ b_1 & -3.41\ a_2 & -1.28\ b_2 & = & -42.00 \\
-3.17\ g_0 & +7.64\ a_1 & -1.68\ b_1 & +1.81\ a_2 & +1.02\ b_2 & = & +90.78 \\
+1.56\ g_0 & -1.68\ a_1 & +6.36\ b_1 & -2.71\ a_2 & -0.27\ b_2 & = & -37.81 \\
-3.41\ g_0 & +1.81\ a_1 & -2.17\ b_1 & +8.52\ a_2 & +0.32\ b_2 & = & +30.74 \\
-1.28\ g_0 & +1.02\ a_1 & -0.27\ b_1 & +0.32\ a_2 & +5.48\ b_2 & = & +8.57
\end{array}
$$

Opgelost:

$g_0 = -$ 0.097 G.M. $=$ const. snelheid in de richting van de zon.

$a_1 = -\, an \sin i \sin(\omega' + M_0) = +11.196$ ; $b_1 = an \sin i \cos(\omega' + M_0) = -2.953$

$a_2 = -\, ean \sin i \sin(\omega' + 2M_0) = +0.498$ ; $b_2 = ean \sin i \cos(\omega' + 2M_0) = -0.708$

$\omega'$ is de lengte van het periastron, van ☊ af gerekend; $M_0$ de middelb. anomalie in 't begin der lichtperiode.

Derhalve:

$$an \sin i = 11.579\,;\ \omega' = 115°20'\,;\ M_0 = 139°54'\,;\ e = 0.075.$$

Daar $\omega' + M_0 = 180° + 75°12'$, behooren de afgeleide elementen tot het lichaam, dat tijdens het hoofdminimum het andere verduistert. De conjunctie treedt in, wanneer $\omega' + v = 270°$, d.i. $0^d.39$ na het uit de empirische formule berekende hoofdminimum.

In bovenstaande tabel geeft de 4e kolom de berekende snelheden, de 6e de overblijvende verschillen.

16. *Spectrogrammen van* 1897.

De snelheden (in G. M), door B. afgeleid uit de verplaatsingen der donkere *Mg*-lijn $\lambda = 448.16\ \mu\mu$, zijn hier onveranderd overgenomen uit de Memorie della Soc. degli Spettr. It. vol XXVI. De empirische formule geeft als epoche van 't hoofdminimum 1897 Juni 22 $16^u.24$ M. T. PULKOWA. (Zie tabel p. 404).

Als eerste benadering werd een cirkelvormige baan bepaald, waarvoor werd gevonden:

$$an \sin i = 24.210\,;\ \omega' + M_0 = 89°.30'.1.$$

Daarna werden correctiën afgeleid met behulp der formule:

$$d\frac{dz}{dt} = dg_0 + KndT \sin(\omega' + v) + dK \,.\, \cos(\omega' + v) +$$
$$+ Ke \cos\omega' \cos 2(\omega' + v) + Ke \sin\omega' \sin 2(\omega' + v).$$

waarin $K = an \sin i$, $T =$ tijd van periastrondoorgang.

Deze formule wordt uit de algemeene differentiaal-formule [1]) gevonden, door $d\mu = 0$ en $d\omega = 0$ te stellen en machten van $e$ te verwaarloozen.

---

[1]) Zie BAUSCHINGER, Die Bahnbestimmung der Himmelskörper, N°. 199.

| | $T$ | Phase | Snelh. in G.M. | $S_r$ | $W-R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | u | d u | | | |
| Juni 20 | 11.5 | 10 17.0 | +18.27 | +19.29 | −1.02 |
| 22 | 12.0 | 12 17.6 | − 2.60 | + 0.28 | −2.88 |
| 23 | 12.4 | 0 20.2 | −10.62 | −10.98 | +0.36 |
| 24 | 12.1 | 1 19.9 | −20.40*) | −19.92 | −0.48 |
| 28 | 11.6 | 5 19.4 | −11.14 | −10.77 | −0.37 |
| 30 | 11.1 | 7 18.9 | +14.16 | +12.41 | +1.75 |
| Juli 2 | 11.9 | 9 19.7 | +21.38 | +22.42 | −1.04 |
| 8 | 12.3 | 2 22.3 | −24.97*) | −25.56 | +0.59 |
| 9 | 11.4 | 3 21.4 | −25.68 | −25.32 | −0.36 |
| 10 | 11.1 | 4 21.1 | −21.27 | −19.87 | −1.40 |
| 11 | 11.0 | 5 21.0 | − 8.83 | −10.00 | +1.17 |
| 12 | 11.5 | 6 21.5 | + 3.24 | + 2.34 | +0.90 |
| 13 | 11.4 | 7 21.4 | +13.15 | +13.43 | −0.28 |
| 15 | 11.4 | 9 21.4 | +24.15 | +22.34 | +1.81 |
| 17 | 11.2 | 11 21.2 | +10.34 | + 9.35 | +0.99 |
| 21 | 11.2 | 2 23.4 | −27.52 | −25.65 | −1.87 |
| 22 | 11.2 | 3 23.4 | −23.48 | −25.07 | +1.59 |
| 24 | 10.3 | 5 22.3 | − 9.28 | − 9.37 | +0.09 |
| 25 | 10.2 | 6 22.2 | + 0.53 | + 2.70 | −2.17 |
| 26 | 10.0 | 7 22.0 | +12.77 | +13.68 | −0.91 |
| 27 | 10.2 | 8 22.0 | +21.03 | +20.86 | +0.17 |
| 30 | 10.1 | 11 22.1 | +10.11 | + 9.16 | +0.95 |
| 31 | 10.2 | 0 0.6 | − 1.03 | − 2.01 | +0.98 |
| Aug. 2 | 9.7 | 2 0.1 | −20.36 | −21.64 | +1.28 |

*) Gemiddelde van twee waarnemingen.

Zoo vindt men de volgende normaal-vergelijkingen:

$-$ [illegible] $p_1 - 1.83 K_u \mu - 2.11 K - 2.22 K_1 \cos\omega' - 2.03 K_1 \sin\omega' = -0.05$

$-1.83$ „ $+13.18$ „ $-1.12$ „ $+1.31$ „ $-0.16$ „ $= +6.17$

$-2.11$ „ $-1.12$ „ $+12.82$ „ $-0.28$ „ $+0.26$ „ $= 0.00$

$-2.22$ „ $+1.31$ „ $-0.28$ „ $+13.88$ „ $-0.31$ „ $= +4.75$

$-2.03$ „ $-0.16$ „ $+0.26$ „ $-0.31$ „ $+12.12$ „ $= -5.98$

Oplossing:

$dg_0 = + 0{:}0124$ ; $K\mu dT = + 0.450$ ; $dk = +0.054$ ;
$Ke \cos \omega' = + 0.292$ ; $Ke \sin \omega' = - 0.489$.

en hieruit volgen de elementen:

$g_0 = - 2.082$ *GM.* ; $an \sin i = 24.264$ ; $e = 0.0235$ ;
$\omega' = 300°51'$ ; $\omega' + M_0 = 88°26'$ ;

terwijl de conjunctie volkomen samenvalt met het hoofdminimum: *het verschil in tijd bedraagt minder dan* $0^d.01$. Blijkbaar is dit de baan van het hemellichaam, dat tijdens het hoofdminimum verduisterd wordt. Hiermede stemt ook overeen, dat het verschil van de gevonden lengten der beide periastra weinig van 180° verschilt (300°51′ — 115°20′). Een gelukkig toeval kan hierbij medegewerkt hebben.

De excentriciteit der 2$^{de}$ baan is echter meer dan driemaal *kleiner*, dan die der 1$^{ste}$, terwijl de afgeleide snelheid van het geheele stelsel in de richting der zon in het 2$^{de}$ geval 2 geogr. m. grooter is. Indien dit laatste verschil reëel is, zou deze versnelling eene *verkorting* der periode tusschen 1892 en 1897 veroorzaakt hebben. Daar echter de metingen van 1892, volgens het oordeel van Prof. H. C. Vogel „nicht als ganz einwurfsfrei angesehen werden können",[1]) schorten wij ons oordeel op, tot Prof. Belopolsky zijne schoone onderzoekingen omtrent het spectrum van β Lyrae zal hebben hervat, omtrent de lichtlijn *F* in 't bijzonder, zooals hij reeds in 1897 voornemens was te doen.

Stellen wij $i = 90°$, dan zijn de halve groote baan-assen:

$$a_1 = 2056000 \ G.M. \quad ; \quad a_2 = 4307000 \ G.M.$$

Uit de 3$^e$ wet van Kepler vinden wij dan met ruwe schatting:

$$m_1 = 17.1 \text{ zonne-massa's} \quad ; \quad m_2 = 8.1 \text{ zonne-massa's.}$$

17. Uit de voorgaande beschouwingen meenen wij te kunnen besluiten, dat de gegevens omtrent β Lyrae geen voldoenden grondslag bieden om een bepaalde gevolgtrekking te wettigen omtrent eene verandering der elementen, met name der excentriciteit. En voor 't overige kan de aangenomen verklaring der lichtvariatie, wegens onze onbekendheid met de toestanden in zulk een eng stelsel, enkel gelden als een zeer ruwe benadering — een grove nabootsing van een zeer ingewikkeld mechanisme.

[1]) Ueber das Spectrum von β Lyrae. Sitzungsb. Ak. Berlin. 1894 VI.

**Kristallografie.** — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer W. VOIGT te Göttingen: *„Ueber die krystallographisch zulässigen Zähligkeiten der Symmetrieaxen."*

(Mede aangeboden door den Heer KAMERLINGH ONNES).

In einem der Artikel des zweiten Heftes seiner gesammelten Abhandlungen beschäftigt sich Herr H. A. LORENTZ mit der für Krystallographie und Krystallphysik gleich wichtigen Frage nach der zulässigen Zähligkeit einer Symmetrieaxe erster oder zweiter Art. Er geht bei dieser Untersuchung von dem Prinzip der rationalen Doppelverhältnisse aus, von dem er einleitend zeigt, dass es als Fundament krystallographischer Deductionen geeignet, nämlich mit sich selbst vereinbar ist.

Das Studium dieser interessanten Abhandlung führte mich zu dem Gedanken, dass für den speziellen Zweck ein anderes Grundprinzip der Krystallographie, dasjenige der rationalen Indizes, wohl noch einen bequemeren Ausgangspunkt bilden möchte. Die Verfolgung dieses Gedankens führte mich zu den nachstehenden Entwickelungen, die, wie ich glaube, das Ziel auf einem hervorragend einfachen und kurzen Wege erreichen. Ich werde analog, wie Herr LORENTZ getan hat, zunächst für das benutzte Grundprinzip zeigen, dass es mit sich selbst nicht im Widerspruch ist, und sodann aus ihm die zulässige Zähligkeit der Symmetrieaxen ableiten.

1. Das Prinzip der rationalen Indizes hat bekanntlich den folgenden Inhalt.

Wählt man an einem Krystallpolyeder drei beliebige Begrenzungsflächen aus und konstruirt Parallele zu ihren Schnittgeraden als eine Art von Axenkreuz durch einen beliebigen Punkt $O$, wählt man ferner zwei weitere beliebige Flächen des Polyeders und legt Parallele zu ihnen in beliebigen Positionen durch dieses Axenkreuz, so markiren diese Ebenen auf den Axen Abschnitte

$$u = OA, \quad v = OB, \quad w = OC \quad \text{einerseits,}$$
$$u' = OA', \quad v' = OB', \quad w' = OC' \quad \text{andererseits.}$$

Das Prinzip der rationalen Indizes behauptet dann, dass

$$\frac{u'}{u} : \frac{v'}{v} : \frac{w'}{w} = z_1 : z_2 : z_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

jederzeit ganzzahlige Verhältnisse bilden.

Damit das Prinzip zu keinem Widerspruch führe, ist erforderlich, dass, wenn man von drei *anderen* Begrenzungsflächen des Polyeders ausgeht und *deren* Schnittgeraden als Grundaxen benutzt, dann die Polyederflächen *auch auf diesen Axen* Abschnitte von dem oben

geschilderten Verhalten liefern, falls sie sich in Bezug auf das erste Axenkreuz demgemäss verhielten.

Dass dies erfüllt ist, lehrt die folgende Betrachtung, die an Figur 1

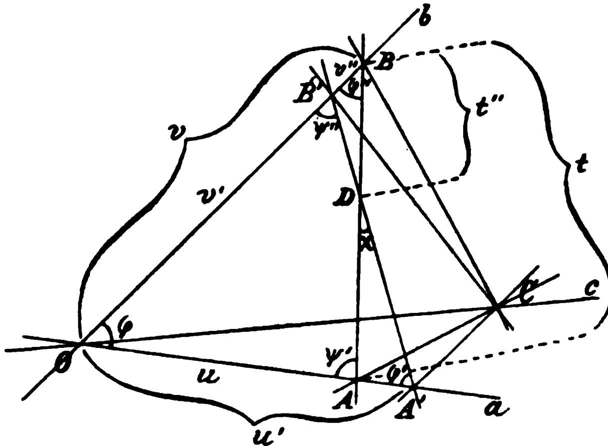



Fig. 1.

anknüpft. *Oa, Ob, Oc* bilden das *erste* System Grundaxen, *ABC* und *A'B'C* stellen die beiden Ebenen dar, welche dem Prinzip der rationalen Indizes entsprechen sollen, derart, dass für die von ihnen gelieferten Abschnitte die Gleichung (1) gilt. Für die einfache Gestaltung des Beweises ist es wesentlich, dass man die beiden Ebenen die *Oc*-Axe in demselben Punkt schneiden lässt, sodass $w = w'$ ist, und die Gleichung (1) die Gestalt annimmt

$$\frac{u'}{u} : \frac{v'}{v} : 1 = z_1 : z_2 : z_3 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Als zweites Axenkreuz nehmen wir die Geraden *BO, BA, BC,* als zweites Flächenpaar, das die *BC*-Axe gleichfalls in einem Punkt schneidet, die Flächen *A'B'C* und *AOC*. Soll das Prinzip auf keinen Widerspruch führen, so muss aus (2) folgen

$$\frac{t''}{t} : \frac{v''}{v} : 1 = \zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wobei die Bezeichungen links durch die Figur gedeutet sind und $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ gleichfalls ganze Zahlen sind.

Versteht man unter $r$ und $\varrho$ rationale Brüche, so kann man auch verlangen, dass aus

$$\frac{u'}{u} : \frac{v'}{v} = r \text{ folge } \frac{t''}{t} : \frac{v''}{v} = \varrho ,$$

während zugleich aus $\frac{v'}{v} = r'$ folgt $\frac{v''}{v} = \varrho'$.

Das *letztere* folgt unmittelbar aus der Anschauung, denn aus $v' + v'' = v$ folgt $r' + \varrho' = 1$, somit mit $r'$ auch $\varrho'$ rational.

Für *ersteres* ergiebt sich der Beweis durch wiederholte Anwendung des Sinussatzes, welcher liefert nach der Figur

$$\frac{u}{\sin\varphi''} = \frac{v}{\sin\varphi'} = \frac{t}{\sin\varphi}, \quad \frac{u'}{\sin\psi''} = \frac{v'}{\sin\varphi'}, \quad \frac{v''}{\sin\chi} = \frac{t''}{\sin\psi''},$$

während

$$\chi = \psi' - \varphi' = \psi'' - \varphi'', \quad \pi = \varphi + \psi' + \varphi'' = \varphi + \varphi' + \psi''.$$

Hieraus ergiebt sich

$$r = \frac{\sin(\varphi + \varphi')\sin(\varphi + \varphi'')}{\sin\varphi' \sin\varphi''}, \quad \varrho = \frac{\sin(\varphi + \varphi')\sin(\varphi + \varphi'')}{\sin(\varphi + \varphi' + \varphi'')\sin\varphi}.$$

Der hierin ausgesprochene Zusammenhang zwischen $r$ und $\varrho$ wird am leichtesten gewonnen, indem man aus der ersten Formel $\varphi'$ bestimmt und den Wert in die zweite einsetzt; man erhält so

$$r / (r - 1) = \varrho.$$

Dies zeigt, dass ein rationales $r$ auf ein rationales $\varrho$ führt, wodurch der Beweis geliefert ist.

Den letzten Teil des Beweises kann man nach einer Bemerkung von Herrn LORENTZ noch vereinfachen, wenn man den MENELAUS'schen Satz als bekannt voraussetzt.

Der verlangte Beweis ist nämlich auch geliefert, wenn aus

$$\frac{v'}{v} = r' \text{ und } \frac{u'}{u} = r''$$

folgt

$$\frac{v''}{v} = \varrho' \text{ und } \frac{t''}{t} = \varrho''.$$

Ueber das erstere ist schon oben gesprochen; bezüglich des letzteren liefert der MENELAUS'sche Satz nach der Figur

$$\frac{BD}{AD} = \frac{OA'}{AA'} \cdot \frac{BB'}{OB'},$$

d. h.

$$\frac{t''}{t - t''} = \frac{u'}{u' - u} : \frac{v - v'}{v'}.$$

Die Rationalität von $u'/u$ und $v'/v$ ergiebt hiernach also direkt die Rationalität von $t''/t$.

2. Die Feststellung der zulässigen Zähligkeit $n$ einer Symmetrieaxe gelingt aus irgend einem der krystallographischen Grundprinzipe nur für den Fall $n \geqq 5$, da jedes dieser Prinzipe *fünf* gleichartige krystallographische Elemente in Beziehung setzt. Man verfährt dann in der Regel so, dass man die allgemeine Eigenschaft, welche das

Prinzip für die Fälle $n \geqq 5$ ergiebt, auch für die Fälle $n < 5$ fordert. Man kann sich indessen auch für diese letzte *begrenzte* Zahl von Fällen auf die Erfahrung stützen und nur für die *unbegrenzte* Zahl der ersteren Fälle das Prinzip heranziehen.

Da das Prinzip der rationalen Indizes Flächen der Krystallpolyeder beliebig parallel mit sich zu verschieben gestattet, so sind für seine Anwendung Symmetrieaxen erster und zweiter Art vollständig gleichwertig. Ein Unterschied liegt nur darin, dass für die Axen zweiter Art $n$ notwendig eine gerade Zahl sein muss.

Wir knüpfen an eine Konstruktion auf einer Kugel vom Radius Eins an, durch deren Centrum wir alle in Betracht kommenden Richtungen legen (Fig. 2). $A$ sei die Spur der $n$-zähligen Axe, $P_1, P_2 \ldots P_5$ seien die Spuren der Normalen von 5 zusammengehörigen Flächen (1), (2), ... (5) des Polyeders, derart dass $\psi = 2\pi/n$. Die $P_h$ sind dann als die *Pole* dieser Flächen zu bezeichnen.

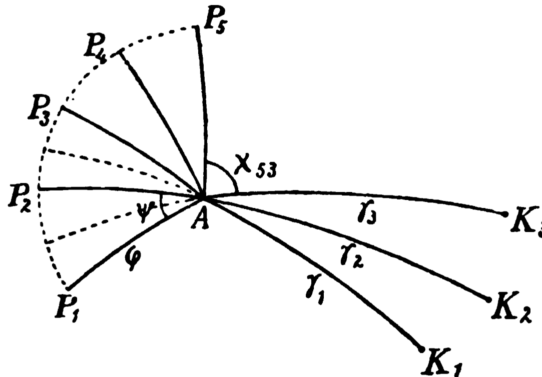



Fig. 2.

$K_1$, $K_2$, $K_3$ seien die Spuren der Schnittgeraden der Flächen (2, 3), (3, 1), (1, 2), so dass also

$$K_1P_2 = K_1P_3 = \tfrac{1}{2}\pi, \quad K_2P_3 = K_2P_1 = \tfrac{1}{2}\pi, \quad K_3P_1 = K_3P_2 = \tfrac{1}{2}\pi.$$

$K_1$, $K_2$, $K_3$ bilde das Axenkreuz, (4) und (5) sei das Flächenpaar für die Anwendung des Prinzipes der rationalen Indizes. Es handelt sich also um Berechnung der Abschnitte, welche die Flächen (4) und (5) auf den Kanten $K_i$ markiren.

Geben wir den Flächen solche Lagen, dass sie die Kugel in ihren Polen tangiren, so sind die Abschnitte $\sigma_{hi}$ mit den Reciproken der $\cos(K_i\, P_h)$, $i = 1, 2, 3$, $h = 4, 5$ identisch. Demnach sind die Werte dieser Cosinus zu bestimmen.

Wird $AK_i$ in $\gamma_i$, $AP_h$ in $\varphi$, $\angle P_h A K_i$ in $\chi_{hi}$ abgekürzt, so liefert die Figur aus $\Delta K_i A P_h$

$$\cos(K_i\, P_h) = \cos\varphi \cos\gamma_i + \sin\varphi \sin\gamma_i \cos\chi_{hi}; \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ferner folgt aus $\Delta P_2AK_1$, $\Delta P_2AK_3$, $\Delta P_1AK_2$

$$tg\,\gamma_1 = tg\,\gamma_3 = \frac{ctg\,\varphi}{cos\,\frac{1}{2}\,\psi}\ ,\ tg\,\gamma_2 = \frac{ctg\,\varphi}{cos\,\psi}\ , \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

während die Figur unmittelbar liefert

$$\left.\begin{array}{lll} \chi_{41} = \pi - \frac{3}{2}\,\psi, & \chi_{42} = \pi - 2\psi, & \chi_{43} = \pi - \frac{5}{2}\,\psi, \\ \chi_{51} = \pi - \frac{5}{2}\,\psi, & \chi_{52} = \pi - 3\psi, & \chi_{53} = \pi - \frac{7}{2}\,\psi. \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Schreibt man das Prinzip der rationalen Indizes

$$\frac{\delta_{41}}{\delta_{51}} : \frac{\delta_{42}}{\delta_{52}} : \frac{\delta_{43}}{\delta_{53}} = z_1 : z_2 : z_3, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

und beachtet dass in den Quotienten je zweier $\delta_{hi}$ gemäss

$$1/\delta_{hi} = cos\,(K_i P_h) = cos\,\gamma_i cos\,\varphi\,(1 + tg\,\varphi\,tg\,\gamma_i\,cos\,\chi_{hi})$$

sich der vor der Klammer stehende Faktor forthebt, so lassen sich die Werte (5) und (6) leicht einführen und man erhält aus (7)

$$\frac{cos\,\frac{1}{2}\,\psi - cos\,\frac{5}{2}\,\psi}{cos\,\frac{1}{2}\,\psi - cos\,\frac{3}{2}\,\psi} : \frac{cos\,\psi - cos\,3\psi}{cos\,\psi - cos\,2\psi} : \frac{cos\,\frac{1}{2}\,\psi - cos\,\frac{7}{2}\,\psi}{cos\,\frac{1}{2}\,\psi - cos\,\frac{5}{2}\,\psi} = z_1 : z_2 : z_3.$$

Dies giebt direkt

$$\frac{sin\,\frac{3}{2}\,\psi}{sin\,\frac{1}{2}\,\psi} : \frac{sin\,2\psi\,sin\,\psi}{sin\,\frac{3}{2}\,\psi\,sin\,\frac{1}{2}\,\psi} : \frac{sin\,2\psi}{sin\,\psi} = z_1 : z_2 : z_3 \quad \ldots \quad (8)$$

Nehmen wir von dieser Doppelproportion zunächst das erste und das letzte Glied, so liefert dies

$$\frac{sin\,\frac{3}{2}\,\psi}{sin\,\frac{1}{2}\,\psi} : \frac{sin\,2\psi}{sin\,\psi} = r$$

d. h. gleich einem rationalen Bruch, oder auch

$$\frac{1 + 2\,cos\,\psi}{2\,cos\,\psi} = r \text{ d. h. } cos\,\psi = \frac{1}{2(r-1)} = r',$$

wo $r'$ auch rational ist.

Diese Forderung wird für $\psi = 2\pi/n$ und $n \geqq 5$ nur für $n = 6$ erfüllt.

Setzt man diesen Wert von $\psi$ in die Gleichung (8) ein, so ergiebt sich

$$2 : \frac{3}{2} : 1 = z_1 : z_2 : z_3 ;$$

derselbe ist also auch mit der vollständigen Doppelproportion vereinbar.

*Somit ist* $n = 6$ *der einzige Wert* $\geq 5$, *der mit dem Prinzip der rationalen Indizes verträglich ist.* Dehnt man die Forderung, dass $\cos \psi$ rational sein muss, auf die Fälle $n < 5$ aus, dann ergeben sich für die Axen erster Art noch die Werte $n = 2$, 3, 4, für die zweiter Art noch die Werte $n = 2$, 4 als zulässig.

*Göttingen,* im November 1907.

**Natuurkunde.** — De Heer Kamerlingh Onnes biedt aan Mededeeling N°. 100[a] uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden. H. Kamerlingh Onnes en C. Braak: *„Isothermen van tweeatomige gassen en hunne binaire mengsels.* VI. *Isothermen van waterstof tusschen* — 104° C. *en* — 217° C. (Vervolg).

§ 17. *Overzicht der bepalingen. Opmerking over den toestel.*

De metingen in deze Mededeeling vermeld, bevatten in de eerste plaats de aanvullende bepalingen waarop reeds in § 14 van Med. N°. 99[a] (Juni 1907) werd gedoeld. Dit zijn een drietal bepalingen bij — 217° bij een dichtheid van ongeveer 170 maal de normale.

Het lag verder voor de hand met den voor deze bepalingen ingerichten piëzometer, zijnde een van ongeveer dezelfde afmetingen als die van serie II van Med. N°. 97[a] (Dec. 1906) de overige bepalingen van serie II te herhalen. Een vergelijking van de waarden van $pv_A$ in deze serie verkregen met die welke de seriën III en IV leverden, leert namelijk, dat de eerste hoewel slechts weinig, toch iets lager liggen dan de laatste. Het is mogelijk dat dit aan een systematische fout te wijten is, daar de vulling bij de latere seriën met meer voorzorgen geschiedde (vergelijk § 5 van Med. N°. 97[a]). Bij de serie welke nu medegedeeld wordt geschiedt zij evenals bij serie IV door middel van gedistilleerden waterstof.

De stalen overpijpjes op de steel van den piëzometer zoowel als op den steel van het piëzometer-reservoir waren (zie § 15 van Med. N°. 99[a]) aan het glas gesoldeerd. Hierdoor is een gasdichte verbinding met de staalcapillair verzekerd. Bij een verbinding met lak is deze wel eens moeielijk te verkrijgen, omdat de moer bij sterk aanzetten gaat afschuiven.

§ 18. *Waarden van* $pv_A$ *van serie V.*

Overeenkomstig tabel XII van Med. N°. 97[a] zijn in tabel XX de

uitkomsten der bepalingen weergegeven. De temperaturen waarbij de metingen geschiedden waren — 182°.74, — 195°.16, — 204°.62, — 212°.91 en — 215°.94. In tabel XX is de reductie tot de standaard-temperaturen van tabel XII uitgevoerd. Zij geschiedde door interpolatie met behulp van de viriaal-coefficiënten, die in § 12 van Med. N°. 97$^a$ zijn afgeleid waardoor de meer omslachtige methode van § 8 kon worden verlaten. De berekening der temperaturen geschiedde op de wijze van Med. N°. 95$^e$ (Oct. 1906). Zij kunnen door middel van tabel XVIII van Med. N°. 97$^b$ (Jan. 1907) tot de normale waterstof-schaal worden teruggebracht.

TABEL XX, $H_2$. Serie V. Waarden van $pv_A$.

| N°. | $t_s$ | $p$ | $pv_A$ | $d_A$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | — 182°.81 | 48.431 | 0.32746 | 147.90 |
| 2 | | 55.493 | 0.32857 | 168.91 |
| 3 | | 62.889 | 0.33028 | 190.41 |
| 4 | — 195°.27 | 42.304 | 0.27362 | 154.61 |
| 5 | | 47.782 | 0.27351 | 174.70 |
| 6 | | 52.808 | 0.27360 | 193.01 |
| 7 | — 204°.70 | 36.999 | 0.23165 | 159.72 |
| 8 | | 41.258 | 0.23061 | 178.91 |
| 9 | | 44.631 | 0.23001 | 194.04 |
| 10 | — 212°.82 | 32.035 | 0.19414 | 165.01 |
| 11 | | 34.611 | 0.19270 | 179 61 |
| 12 | | 37.275 | 0.19149 | 194 66 |
| 13 | — 217°.41 | 28.955 | 0.17318 | 167.63 |
| 14 | | 31.191 | 0.17152 | 181.85 |
| 15 | | 33.180 | 0.17005 | 195.12 |

§ 19. *Waarden van $pv_A$ van serie IV.*

Brengt men op dezelfde wijze, als dit in de vorige § is geschied de uitkomsten van tabel XIX [1]) van Med. N°. 99$^a$ terug tot de standaard-temperaturen, dan verkrijgt men de waarden van onder-

[1]) Deze tabel is aldaar abusievelijk XVI genoemd.

staande tabel (pag. 414). Voor —139°.88 is deze reductie niet uitgevoerd, aangezien het beter is deze temperatuur als standaard-temperatuur aan te nemen in plaats van —135°.71. De reductie moet hier voor een betrekkelijk groot temperatuursverschil plaats hebben en wordt onnauwkeurig. Het verdient daarom de voorkeur de waarden van tabel XIX voor deze temperatuur onveranderd te laten en zoo noodig de reductie toe te passen op die van serie I, die toch veel minder betrouwbaarheid bezitten. De temperatuur —164°.14 is als nieuwe standaard-temperatuur aangenomen.

De bepalingen 5 en 9 zoowel als 14 en 18 van tabel XIX zijn tot een gemiddelde vereenigd.

§ 20. *Vergelijking van de serien I en II met de contrôle-bepalingen.*

De punten van serie I en II zijn om redenen in § 17 vermeld dubbel bepaald op onderling geheel onafhankelijke wijze. Zij kunnen gemakkelijk met de contrôlebepalingen van IV en V worden vergeleken, door ze met behulp van de viriaal-coefficienten tot een zelfde dichtheid en temperatuur terug te brengen. Vergelijkt men op deze wijze voor —103°.57 Nos. 2, 3 en 4 van serie I (zie tabel XII) met 1, 2 en 3 van serie IV (zie tabel XXI), dan vindt men voor de verschillen van $pv_A$ voor IV—I respectievelijk:

$$+ 0.00001 \quad , \quad + 0.00007 \quad , \quad - 0.00019$$

en voor —139°.88 voor IV (5,6) — I (2,3):

$$- 0.00085 \quad , \quad - 0.00036.$$

Op dezelfde wijze handelende met de serien II en V (zie tabellen XII en XX) vindt men respectievelijk voor de temperaturen —182°.81, —195°.27, —204°.70 en —212°.82

| | | | |
|---|---|---|---|
| V (1, 2) | — II (2, 3) | = | + 0.00007, + 0.00010 |
| V (4, 5, 6) | — II (2, 3, 4) | = | + 0.00012, + 0.00026, + 0.00017 |
| V (7, 8, 9) | — II (2, 3, 4) | = | + 0.00020, + 0.00019, + 0.00034 |
| V (10, 11, 12) | — II (2, 3, 4) | = | + 0.00013, + 0.00008, + 0.00021 |

De verschillen zullen hoofdzakelijk aan condensatie van verontreinigingen moeten worden toegeschreven, daar ze bij daling van de temperatuur toenemen. Dit werd als voldoende grond aangenomen om de uitkomsten der seriën I en II als minder betrouwbaar in de verdere berekeningen niet op te nemen. Zulks werd ook voor —104° gedaan hoewel de seriën I en IV hiervoor zeer goed overeenstemmen. Ook voor de overige isothermen is behoudens den invloed der vermoedelijke condensatie het zeer regelmatig verloop in de

| TABEL XXI, $H_2$. Serie IV. Waarden van $pv_A$. | | | | |
|---|---|---|---|---|
| N$^0$. | $t_S$ | $p$ | $pv_A$ | $d_A$ |
| 1 | — 103°.57 | 28.447 | 0.63261 | 44.967 |
| 2 | | 38.186 | 0.63702 | 59.944 |
| 3 | | 48.724 | 0.64198 | 75.897 |
| 4 | | 58.368 | 0.64694 | 90.222 |
| 5 | — 139°.88 | 25.406 | 0.49459 | 51.368 |
| 6 | | 33.774 | 0.49697 | 67.960 |
| 7 | | 41.273 | 0.49967 | 82.600 |
| 8 | | 48.558 | 0.50232 | 96.667 |
| 9 | — 164° 14 [1]) | 22.818 | 0.40065 | 56.952 |
| 10 | | 28.688 | 0.40164 | 71.427 |
| 11 | | 34.387 | 0.40253 | 85.427 |
| 12 | | 39.947 | 0.40376 | 98.936 |
| 13 | — 182°.81 | 20.496 | 0.32704 | 62.670 |
| 14 | | 24.818 | 0.32699 | 75.898 |
| 15 | | 28.506 | 0.32672 | 87.248 |
| 16 | | 32.568 | 0.32675 | 99.673 |
| 17 | — 195°.27 | 18.527 | 0.27827 | 66.581 |
| 18 | | 23.303 | 0.27724 | 84.055 |
| 19 | | 27.837 | 0.27580 | 100.933 |
| 20 | — 204°.70 | 16.749 | 0.24036 | 69.684 |
| 21 | | 20.453 | 0.23876 | 85.658 |
| 22 | | 24.015 | 0.23691 | 101.367 |
| 23 | — 212°.82 | 15.416 | 0.20644 | 74.679 |
| 24 | | 18.038 | 0.20430 | 88.296 |
| 25 | | 20.643 | 0.20228 | 102.051 |
| 26 | — 217°.41 | 14.635 | 0.18738 | 78.103 |
| 27 | | 16.784 | 0.18491 | 90.766 |
| 28 | | 18.853 | 0.18289 | 103.080 |

[1]) Deze temperatuur is ontleend aan de vergelijking van den weerstand met den waterstofthermometer van 3 Juli '07 (zie tabel I Med. N$^0$. 101$a$).

ligging der punten een aanwijzing omtrent de nauwgezetheid der metingen zelve.

Er blijven nu over de bepalingen van de seriën III, IV en V, die voorkomen, teruggebracht tot de standaard-temperaturen, in de tabellen XII, XX en XXI. Met deze gegevens zijn de verdere berekeningen uitgevoerd. Plaat I geeft een overzicht van ligging der punten in het isothermen-diagram; op deze plaat is $\frac{pv_A}{T}$ als functie van de dichtheid uitgezet. ($T$ absolute temperatuur). Met I en II zijn de isothermen van 100°.20, en 0° over welke de volgende Mededeeling handelt, aangegeven, met de andere Romeinsche cijfers opklimmende met daling der temperatuur, die tot —217°.41.

§ 21. *Individueele viriaalcoëfficienten.*

Op dezelfde wijze als in § 12 van Med. N°. 97[a] is uiteengezet werden voor iedere isotherme de drie eerste viriaalcoëfficienten van de daar beschouwde reeks-ontwikkeling berekend, aan de hand van de vroegere en nieuwe gegevens. Deze zijn in onderstaande tabel vereenigd.

TABEL XXII. $H_2$ Individueele viriaalcoëfficienten.

| $t_s$ | $A_A$ | $10^3 B_A$ | $10^6 C_A$ | $10^{12} D_A$ | $10^{18} E_A$ |
|---|---|---|---|---|---|
| —103°.57 | 0.62048 | +0.24409 | +0.5300 | +0.9113 | —0.648 |
| —139°.88 | 0.48765 | +0.11175 | +0.4034 | +0.6753 | —0.378 |
| —164°.14 | 0.39891 | +0.00732 | +0.4148 | +0.4970 | —0.208 |
| —182°.81 | 0.33063 | —0.07947 | +0.3908 | +0.3809 | —0.088 |
| —195°.27 | 0.28508 | —0.12309 | +0.3165 | +0.2892 | —0.016 |
| —204°.70 | 0.25074 | —0.17328 | +0.3398 | +0.2166 | +0.031 |
| —212°.82 | 0.22103 | —0.22271 | +0.3599 | +0.1514 | +0.066 |
| —217°.41 | 0.20424 | —0.24539 | +0.3558 | +0.1122 | +0.082 |

Evenals in Med. N°. 97[a] zijn de afwijkingen tusschen de waargenomen waarden van $pv_A$ en de door middel der gevonden viriaalcoëfficienten berekende in een tabel vereenigd, die wij hier onder laten volgen.

TABEL XXIII $H_2$. Afwijkingen van de formule.

| $t_s$ | $10^5 (W_i - R_i)$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| —103°.57 | — 1 | + 8 | — 1 | —11 | + 6 | | | | | |
| —139°.88 | — 2 | +13 | —15 | 0 | + 4 | | | | | |
| —164°.14 | 0 | — 3 | + 7 | — 6 | + 2 | | | | | |
| —182°.81 | — 1 | —15 | +13 | + 3 | +12 | —15 | — 9 | +12 | | |
| —195°.27 | — 4 | — 2 | +25 | —11 | —16 | 0 | + 8 | | | |
| —204°.70 | —18 | + 4 | +36 | +22 | —22 | —24 | —21 | +23 | | |
| —212°.82 | —14 | + 3 | +12 | +22 | — 5 | —10 | — 4 | —22 | +18 | |
| —217°.41 | —14 | +13 | 0 | +15 | — 2 | + 1 | — 3 | —22 | — 6 | +18 |

De tweede kolom bevat de verschillen voor de punten van den waterstofthermometer (zie tabel XII van Med. N°. 97[a]), de volgende kolommen hebben betrekking op de seriën IV, V en III in de hier gegeven volgorde, terwijl voor iedere serie de getallen volgens de opklimmende dichtheden zijn gerangschikt.

Het blijkt, dat serie IV over het algemeen hoogere waarden geeft dan serie V. De berekende krommen kunnen dienen als vereffening van de seriën onderling. Hunne punten zullen ongetwijfeld meer betrouwbaar zijn dan die der afzonderlijke bepalingen. In het vervolg zal daarom van de viriaalcoëfficienten van tabel XXII worden uitgegaan.

§ 22. *Minima van* $pv_A$.

Voor de laagste vijf temperaturen werden met de nu beschikbare gegevens opnieuw de minima van de $pv_A$ lijnen bepaald en evenals vroeger de coëfficienten $P_0$, $P_1$ en $P_2$ van een parabool uitgerekend. De kolommen van tabel XXIV hebben dezelfde beteekenis als die van tabel XV van Med. N°. 97[a].

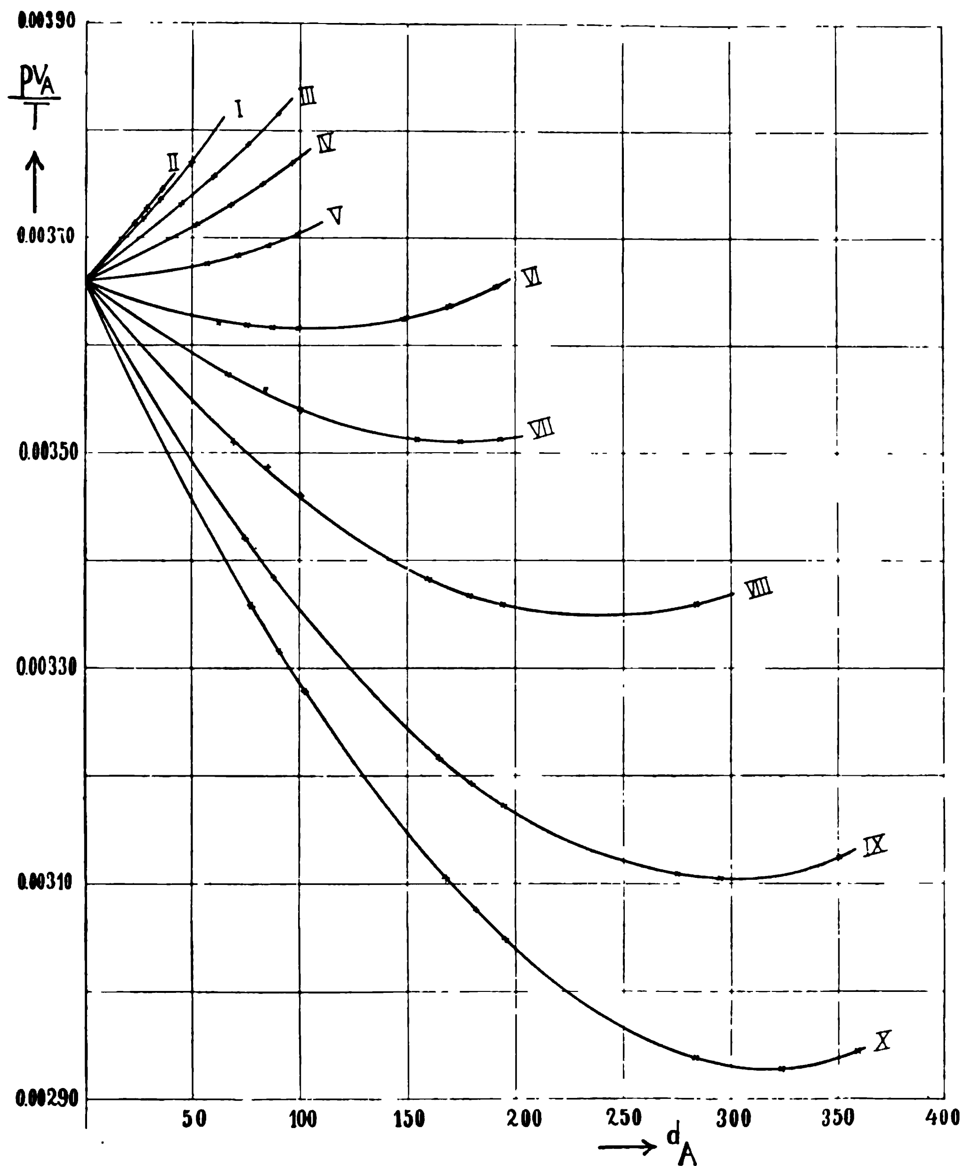
Voor de berekening der coefficiënten der parabool is nog een zesde punt gebruikt dat onder in de tabel is opgenomen en verkregen werd door middel van de isotherme van — 164°.14. Voor deze temperatuur is de waarde van $B_A$ zeer gering, zoodat door interpolatie gemakkelijk het BOYLE-punt kan worden bepaald. Hiervoor wordt gevonden, gemeten op de absolute schaal

$$t = -165°.72$$

waarmee een waarde van $pv_A = 0.39292$ overeenkomt.

KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK. „Isothermen van twee-atomige gassen en hunne binaire mengsels. VI. Isothermen van waterstof tusschen — 104° C. en — 217° C." (Vervolg).

Pl. I.



| TABEL XXIV. $H_2$. Minima van $pv_A$. | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $t_S$ | $pv_A$ | $d_A$ | $p$ | $W-R$ |
| — 182°.81 | 0.32663 | 99.70 | 32.57 | —0.29 |
| — 195°.27 | 0.27348 | 183.10 | 50.07 | +1.36 |
| — 204°.70 | 0.22945 | 238.27 | 54.67 | —0.21 |
| — 212°.82 | 0.18782 | 287.99 | 54.09 | —0.84 |
| — 217°.41 | 0.16342 | 321.51 | 42.54 | +0.19 |
| | 0.39292 | 0 | 0 | —0.23 |

Voor de coefficiënten der parabool wordt gevonden:

$$P_0 = - \quad 14.8370$$
$$P_1 = + \quad 676.563$$
$$P_2 = - \; 1624.31$$

De verschillen der laatste kolom zijn gering behalve voor —195°.27. Voor deze temperatuur blijkt tevens (zie tabel XXII) $C_A$ te klein te zijn. Beide afwijkingen zullen moeten worden toegeschreven aan minder juiste ligging van een of meer der isotherme-punten. Uit de teekening van Pl. I is reeds te zien dat het middelste punt van serie IV waarschijnlijk te hoog ligt.

De parabool snijdt de ordinaat $p = 0$ in twee punten waar $pv_A$ respectievelijk $= 0.39330$ en $0.02323$ is, waarmee overeenkomen de absolute temperaturen

$$T_1 = 6.3 \qquad T_2 = 107°.5.$$

Voor den top der parabool is $pv_A = 0.20826$, waarmee overeenkomt een druk van 55.61 atmosferen. Hieruit volgt voor de absolute temperatuur van de isotherme, die door den top gaat:

$$T = 64°.2.$$

**Natuurkunde.** — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. N°. 100[b] uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden. H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: „*Isothermen van twee-atomige gassen en hunne binaire mengsels.* VII. *Isothermen van waterstof tusschen* 0° *C. en* 100° *C.*"

§ 1. *Overzicht der bepalingen.*

Aan den piëzometer van serie IV (Med. N° 99[1] Juni 1907) werd het reservoir van 5 cm³. vervangen door een van 10 cm³. Met dezen toestel werden twee isothermen bepaald, in ijs en in damp van kokend water. Tot het verkrijgen van constante temperaturen werden dezelfde hulpmiddelen gebruikt als in Med. N°. 60 (Juni 1900). De watermanometer (vergelijk § 8 van Med. N°. 27 (Juni 1896)) werd wel afgelezen, maar daar het drukverschil niet meer dan 0.5 mM. bedroeg, kon de hiermede samenhangende temperatuurcorrectie worden verwaarloosd. Voor de bepaling van de temperatuur van de staal-capillair werden 3 thermometers langs de capillair opgehangen. Voor de bepaling van 100° was wel een papieren scherm aangebracht om den opstijgenden warmen luchtstroom af te leiden, echter was de spiraal met koud water boven op de wolpakking van den kooktoestel achterwege gelaten. Daar het temperatuursverschil tusschen de thermometers niet meer dan 2° bedroeg, was deze handelwijze geoorloofd.

De gecorrigeerde aanwijzing van den aneroide-barometer bedroeg 765.4 mM, waaruit voor de temperatuur van het kookpunt volgt 100°.20.

§ 2. *Waarden van* $pv_A$.

In onderstaande tabel zijn de uitkomsten van de bepalingen weergegeven. De kolommen hebben dezelfde beteekenis als in tabel XIX van Med. N°. 99[a].

TABEL I. $H_2$. Waarden van $pv_A$.

| N°. | $t$ | $p$ | $pv_A$ | $d_A$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0° | 27.333 | 1.01511 | 26.926 |
| 2 | | 35.602 | 1.02002 | 34.903 |
| 3 | | 43.413 | 1.02505 | 42.352 |
| 4 | | 50.583 | 1.02964 | 49.127 |
| 5 | 100°.20 | 30.970 | 1.38619 | 22.342 |
| 6 | | 39.796 | 1.39143 | 28.601 |
| 7 | | 50.254 | 1.39788 | 35.951 |

§ 3. *Individueele viriaal-coefficiënten.*

Men kan de gegevens van tabel I gebruiken om evenals in § 12 van Med. N°. 97[a] is geschied, voor iedere isotherme de eerste twee viriaal-coefficiënten af te leiden. Wegens de kleine dichtheden die in het spel komen kunnen in formule (1) van § 12 van Med. N°. 97[a] $D_A$, $E_A$ en $F_A = 0$ gesteld worden, zoodat de formule zich reduceert tot

$$pv_A = A_A + \frac{B_A}{v_A} + \frac{C_A}{v_A^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Daar slechts een gering aantal punten gegeven is en zooals reeds werd opgemerkt de dichtheden gering zijn kan $C_A$ niet met voldoende nauwkeurigheid worden bepaald. De waarden van dezen coefficient werden door ons ontleend aan Med. N°. 71 § 3, waar $C_{A_0} = 0.0_6670$ en $C_{A_{100}} = 0.0_6606$.

Ten einde den loop der $pv_A$ lijnen nog nader te bepalen werd gekozen de waarde van $pv_A$ voor een dichtheid overeenkomende met die in den waterstofthermometer van Med. N°. 60 (Juni 1900) waarmede (vergelijk Med. N°. 97[b] XV. § 1) voor den spannings-coefficient van waterstof bij 1090 mm. nulpuntsdruk werd gevonden 0.0036629. Door opvolgende benaderingen laat zich deze waarde van $pv_A$ door middel van de isotherme van 0° afleiden. Men vindt voor 0°

$$pv_{A\,0^\circ.1100\,mm.} = 1.000256$$

en voor 100°.20 met den spanningscoefficient 0.0036629

$$pv_{A\,100^\circ.2} = 1.367373$$

Voor de dichtheid kan in beide gevallen worden gesteld $d_A = 1.44$.

Men verkrijgt nu voor 0° vijf en 100°.20 vier waarden $pv_A$ en $d_A$, waaruit zich door middel van de methode der kleinste kwadraten de coëfficienten $A_A$ en $B_A$ van vergelijking (1) laten bepalen. Deze waarden zijn:

Voor 0°:

$$A_A = 0.999242$$
$$B_A = 0.58001 \times 10^{-3}.$$

Voor 100°.20:

$$A_A = 1.366260$$
$$B_A = 0.86316 \times 10^{-3}.$$

Voor 100°.00 laten zich hieruit berekenen:

$$A_A = 1.365528$$
$$B_A = 0.86259 \times 10^{-3}.$$

De verschillen die overblijven tusschen de waarden van $pv_A$ van

tabel I en de met de gevonden coëfficienten volgens formule (1) berekende zijn respectievelijk
voor 0°:

+ 0.00018, — 0.00023, — 0.00028, + 0.00004, + 0.00029

voor 100°.20:

— 0.00013, + 0.00034, — 0.00001, — 0.00019.

De eerste waarde heeft telkens betrekking op het voor den waterstofthermometer berekende punt. De verschillen zijn gering en overschrijden niet of zeer weinig $\frac{1}{4000}$ van $pv_A$.

**Natuurkunde.** — De heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. 101[a] uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: H. KAMERLINGH ONNES, C. BRAAK en J. CLAY: „*Over het meten van zeer lage temperaturen. XVII. Contrôlebepalingen met den waterstofthermometer en den weerstandsthermometer.*"

§ 1. *Inleiding.*

In Mededeeling N°. 95[e] (October 1906)zijn de uitkomsten van een aantal metingen samengevat, die aangeven dat tot — 217° temperatuurmetingen met den waterstofthermometer tot op $\frac{1}{50}^{\circ}$ nauwkeurig zeer goed mogelijk zijn en de uitkomsten voor verschillende vullingen verkregen wezen er op, dat bij onze metingen tot — 217° deze nauwkeurigheid inderdaad wel bereikt zal zijn. Wij stelden ons voor nog de volgende metingen hierbij aan te sluiten.

1°. verdere contrôle-bepalingen tusschen 0° en — 217° om de grens van de nauwkeurigheid der temperatuur-metingen met den waterstofthermometer en der vastlegging [1]) van bepaalde temperaturen door bepaalde weerstanden van een weerstands-thermometer nog nader vast te stellen.

2°. uitbreiding der contrôle-bepalingen tot metingen in vloeibare waterstof.

3°. vastlegging van bepaalde standaard-temperaturen door de kook-

---

[1]) Bij onderzoekingen zal in den regel eenvoudigheidshalve de temperatuuraflezing met een weerstandsthermometer, die men afzonderlijk met den waterstofthermometer vergelijkt, boven die met den waterstofthermometer zelve verkozen worden.

punten en smeltpunten van waterstof, zuurstof en andere gemakkelijk zuiver te verkrijgen stoffen [1]).

4°. (vergelijk Med. N°. $95^a$ § 1, Juni 1906) temperatuur-metingen met den helium-thermometer *a*. voor directe of indirecte vergelijking met den waterstofthermometer, *b*. om voor de bepaling der laagste temperaturen, in het bijzonder ook voor de reductie op de absolute schaal, een meer vaste basis te verkrijgen.

Het sub 3° en 4° bedoelde onderzoek is reeds ver gevorderd. Thans deelen wij eenige metingen mede, die betrekking hebben op 1° en 2°.

§ 2. *Overzicht der bepalingen.*

Wat de sub 2°. bedoelde contrôles betreft zijn twee onafhankelijke bepalingen met volkomen dezelfde vergelijkingstoestellen verricht. De sub 1°. bedoelde metingen zijn niet geheel geslaagd doordat de weerstandsthermometer een kleine herstelling had moeten ondergaan [2]). Maar de metingen hebben daardoor in een ander opzicht deze beteekenis gekregen, dat zij als een nieuwe calibratie van — 104° tot — 259° van den in Med. N°. $95^e$ gebruikten weerstands-thermometer, laten beoordeelen in hoeverre na dergelijke herstellingen, die op den duur wel onvermijdelijk zijn, voor den weerstandsthermometer dezelfde temperatuurscoëfficienten blijven gelden.

De medegedeelde metingen leggen verder een tweetal temperaturen beter (verg. echter noot 2 bij § 3, 2°) vast, die tot nog toe niet met de gewenschte betrouwbaarheid waren bepaald (zie §§ 3 en 5) [3]).

De resultaten zijn hieronder in een tabel vereenigd. De tweede en derde kolom bevatten de aflezingen van den waterstofthermometer en van den weerstandsthermometer. Die van den waterstofthermometer zijn op de wijze van N°. $95^e$ (Oct. 1906) berekend (daar aangeduid als *t*) en behoeven derhalve nog de correcties in Med. $97^b$ aangegeven. Deze

---

1) Wanneer wij over dergelijke vaste punten beschikken, kunnen met zuiver gas gevulde kookpuntstoestellen, die met de te calibreeren toestellen in hetzelfde bad geplaatst zijn, den waterstofthermometer bij calibraties vervangen. Dit geeft, wanneer met deze enkele temperaturen kan worden volstaan, een belangrijke vereenvoudiging. Buitendien hebben wij in deze vaste punten een middel tot vergelijking van gasthermometers met verschillende gassen ($H_2$ en He bijv.) gevuld, of in verschillende laboratoria in gebruik.

2) Door het breken van den weerstand ging slechts $^1/_{60}$ van den draad verloren maar dit laat ruimte voor de tegenwerping, dat indien deze niet volkomen homogeen is wijziging in de temperatuurscoëfficienten niet geheel uitgesloten is. Meer is het laatste te vreezen naar aanleiding van het opnieuw winden van den draad.

3) Van deze metingen is reeds gebruik gemaakt in tabel V, Med N°. $99^b$ (Juni 1907) bij — 252°.82 en — 255°.18 in afwijking van tabel I, Med, N°. $95^c$.

werden hier nog niet aangebracht omdat dit nog in geen der voorgaande Mededeelingen is geschied en derhalve de vergelijking onderling op deze wijze gemakkelijker is. De volgende kolom bevat de weerstanden van kolom 3 omgerekend met den factor 1.01806, zijnde de verhouding van de weerstanden bij 0° C. voor en na het breken van den draad. Deze waarden zijn vergeleken met formule $A_I$ van § 6 van Med. N°. 95$^c$. Juni 1906. De vijfde kolom bevat de verschillen met deze formule.

In de zesde kolom zijn de verschillen, die volgens Med. N°. 95$^c$ (Juni 1906) te verwachten waren, opgegeven. In de zevende die van de beide weerstandsthermometers in $\Omega$.

TABEL I. Vergelijking tusschen den platinathermometer $Pt_{I'}$ en den waterstofthermometer

| Datum 1907 | Temperatuur volgens den waterstof-thermometer | Weer-stand in $\Omega$ | Weer-stand omge-rekend | $W_{PtI'}-R_{AI}$ | $W_{PtI}-R_{AI}$ | $W_{Pt'}-W_{Pt}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 Juli | — 102°.671 | 79.131 | 80.551 | — 0.000 | — 0.023 | + 0.023 |
| 3 Juli | — 119°.730 | 70.190 | 71.450 | + 0.003 | | |
| 3 Juli | — 164°.113 | 45.054 | 45.863 | + 0.047 | | |
| 25 Maart | — 182°.352 | 34.492 | 35.111 | — 0.008 | — 0.029 | + 0.021 |
| 29 Juni | — 216°.610 | 14.936 | 15.204 | + 0.016 | + 0.028 | — 0.012 |
| 19 Maart | — 252°.822 | 1.9208 | 1.9553 | + 2.4131 | + 2.432 | — 0.019 |
| 1 Juli | — 252°.839 | 1.9243 | 1 9588 | + 2.4180 | + 2.432 | — 0.014 |
| 19 Maart | — 255°.177 | 1.6852 | 1.7154 | + 2.0518 | | |
| 1 Juli | — 258°.864 | 1.4522 | 1.4783 | + 0.4855 | + 0.199 | + 0.287 |

§ 3. *Uitkomsten.*

Ten einde uit de gegevens van tabel I gevolgtrekkingen te kunnen maken zij opgemerkt, dat de nieuwere bepalingen geschiedden met denzelfden met gedestilleerden waterstof gevulden thermometer [1]).

[1]) Voor de vroegere bepalingen is dit slechts voor enkele het geval. Dit zal tot — 217° in verband met vorige metingen (zie Med. 95$^e$) geen verschil geven, voor metingen in waterstof is dit echter nog niet experimenteel aangetoond. De methode van vulling door middel van electrolytischen waterstof, mits zorgvuldig toegepast, kan ook voor deze temperaturen als volkomen afdoende beschouwd worden. Zij vereischt echter een meer ingewikkeld stelsel van hulpapparaten en is daarom bij de andere methode wat betreft de betrouwbaarheid achter te stellen.

Aan tabel I laat zich voor die bepalingen waarvoor nu of vroeger nog een andere bepaling bij dezelfde temperatuur is verricht het volgende ontleenen :

1°. Een vergelijking tusschen de aanwijzingen van den weerstandsthermometer voor en na het breken van den draad, behoudens de afleesfouten van den waterstof- en weerstandsthermometer, door middel van de bepalingen van 25 Maart, 29 Juni en 3 Juli. Deze geven voor de waarnemingen op de laatste twee data slechts geringe verschillen. Vergelijkt men nl. de afwijkingen $W—R_{Al}$ van tabel II van Med. N°. 97$^c$ met die van tabel I van deze Mededeeling dan zijn de verschillen respectievelijk voor —103°, —183° en —217° [1])

$$+0.023 \quad +0.021 \text{ en } -0.012$$

overeenkomende met

$$0°.040, \ 0°.036 \text{ en } 0°.022$$

waaruit mag worden afgeleid, dat tot — 217° de veranderingen in de temperatuurscoefficienten door het opnieuw winden van den draad zoo niet onmerkbaar dan toch uiterst gering zijn.

2°. Een vergelijking van twee weerstandscalibraties, waarbij dezelfde waterstof- en weerstandsthermometer werden gebruikt, in de nabijheid van het kookpunt van waterstof door middel van de bepalingen van 19 Maart en 1 Juli. Het verschil is 0.0049 $\Omega$ = 0°.046 en grooter dan $\frac{1}{50}^{\circ}$ welke als grens der nauwkeurigheid voor metingen tot — 217° is afgeleid. Dit moet hoogstwaarschijnlijk daaraan worden toegeschreven, dat de weerstandsmetingen minder nauwkeurig zijn, omdat zij met de Wheatstone-brug en niet met den differentiaal-galvanometer zijn verricht. [2])

---

[1]) Voor — 217° bereikt dit verschil juist de in Med. N°. 95$^e$ afgeleide nauwkeurigheidsgrens en overschrijdt deze voor de beide andere slechts weinig.

Voor — 183° kan nog een andere reden voor dit verschil worden opgegeven. Het is waarschijnlijk tot op zekere hoogte daaraan toe te schrijven, dat de vroegere bepalingen (van 30 Juni en 6 Juli '06) evenals die bij — 217° van 30 Juni '06 als minder betrouwbaar moeten worden beschouwd. Bij een in Dec. 1906 begonnen onderzoek bleek namelijk de staalcapillair niet meer volkomen dicht te zijn en zij is dit bij genoemde metingen misschien ook reeds niet meer geweest. Dit laatste wordt waarschijnlijk door de sterke nulpuntsveranderingen bij deze bepalingen n.l. 0.33 mm., waarop reeds in § 11 van Med. N°. 95$^e$ werd gewezen, zonder dat er toen een verklaring van kon worden gegeven.

Het gebrek is wellicht ontstaan doordat in het einde van Mei '06 de thermometer gedeeltelijk uit elkaar is genomen waarbij de capillair te veel is gebogen. De waarnemingen van voor Juni '06 hebben dan ook met dit euvel niets te maken.

[2]) De nauwkeurigheid van de brug van Wheatstone, is voor hoogere temperaturen beneden 0° volkomen voldoende, (zie Med. N°. 99$b$ § 2 voor temperaturen

3°. Een vergelijking tusschen de aanwijzingen van den met gedistilleerde waterstof gevulden thermometer en den vroegeren met electrolytische waterstof gevulden door middel van de bepaling van 1 Juli, behoudens de waarnemingsfouten van waterstof- en weerstandsthermometer en veranderingen in de temperatuurscoefficienten van den weerstand. [1])

Het verschil blijkt grooter dan men uit de ondervinding voor hoogere temperaturen opgedaan zou verwachten. Wellicht is bij de meting van 5 Mei '06, die de eerste was, welke in vloeibare waterstof werd verricht bij de weerstandsmeting of de aflezing van den waterstofthermometer een systematische fout ingeslopen, welke aan onze aandacht is ontsnapt. In allen gevalle moet de calibratie bij deze laagste temperaturen worden herhaald.

De in deze § behandelde verschillen wijzen, voor zoover ze grooter dan de verwachte nauwkeurigheidsgrens zijn, ten deele op abnormale foutenbronnen, ten deele op fouten die in het vervolg zijn te voorkomen (o.a. door kleine weerstanden steeds met den differentiaalgalvanometer te meten) en is het waarschijnlijk, dat gebruik makende van de opgedane ervaring in volgende bepalingen ook voor de temperaturen beneden — 217° de nauwkeurigheid van 0°.02 zal worden bereikt.

§ 4. Over de nauwkeurigheid, met welke eene temperatuur door een bepaalden weerstand wordt vastgelegd, laten, naast Med. N°. 95$^e$ § 7, de volgende waarnemingen oordeelen, waarbij twee weerstandsthermometers tegelijkertijd in een zelfde bad waren gedompeld.

Met $Pt_I$ werd ingesteld op een bepaalde temperatuur, bij welke de weerstand van $Pt_{III}$ werd bepaald, daarna werd de temperatuur een weinig veranderd en opnieuw op $Pt_I$ de temperatuur afgelezen, de weerstand van $Pt_{III}$ bepaald en gereduceerd op de eerste temperatuur.

---

tot — 217°), doch zij schiet voor metingen in waterstof, waarbij de weerstandsverandering zoo gering wordt, door den schadelijken invloed der overgangsweerstanden te kort. Gelijktijdig met de metingen van Tabel I in waterstof, die met de WHEATSTONE-brug zijn verricht, werd dan ook om de temperaturen beneden —217° vast te leggen een andere thermometer $Pt_d'$ met den differentiaal-galvanometer gecalibreerd.

[1]) Hoewel het niet is uitgesloten, dat de verandering der temperatuurcoefficiënten hier grooter is dan tot — 217°, kan dit geenszins de groote afwijking verklaren, aangezien de draad vooraf zorgvuldig is gegloeid. Tevens is het moeielijk aan te nemen, dat verontreiniging van het gas in den thermometer de oorzaak zou zijn, aangezien hiervoor bijv. zou moeten worden ondersteld dat ongeveer 0.7% lucht in het gas aanwezig zou zijn geweest, wat met het oog op de zorgvuldigheid waarmede de vulling geschiedde, niet wel mogelijk is.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | temp. op $Pt_I$ — 87°.54, | weerstand $Pt_{III}$ | 103.950 Ω [1]) | |
| nieuwe | „ „ „ gered. — 87°.54, | „ „ | 103.959 | verschil 0.009 Ω of 0°.014 |
| | temp. op $Pt_I$ — 216°.65 | | 17.379 | |
| nieuwe | „ „ „ gered. — 216°.65 | | 17.385 | verschil 0.006 Ω of 0°.009 |

De waarschijnlijke fout van een instelling op den weerstandsthermometer blijkt even groot als die van eene aflezing op den waterstofthermometer (zie Med. N°. 95$^e$ § 7)[2]).

De volgende waarnemingen hadden betrekking op het vastleggen van eene temperatuur over een langer tijdsverloop.

$Pt_{III}$ en $Pt_V$ werden onmiddellijk op elkaar volgend met $Pt_I$ gecalibreerd, hieruit werd afgeleid de temperatuur-aanwijzing volgens $Pt_I$ op $Pt_{III}$ en $Pt_V$. Later werd toen bij instelling op diezelfde temperatuur de goudthermometer $Au_0$ onmiddellijk op elkaar volgend met $Pt_{III}$ en $Pt_V$ vergeleken. De aflezingen waren

| temp. $Pt_I$ op $Pt_{III}$, | temp. $Pt_I$ op $Pt_V$, | $Au_0$ weerstand [3]) |
|---|---|---|
| — 58°.56 | — 58°.56 | 40.324 |
| — 87°.43 | [— 87°.50] | 34.638 |
| — 159°.07 | — 159°.08 | 20.393 |
| — 216°.27 | — 216°.29 | 8.459 |

Ziet men af van een grootere afwijking, bij welke door [ ] is aangegeven, dat wij deze aan een onregelmatigheid toeschrijven, zoo blijkt, dat het vastleggen van een temperatuur door een enkele bepaling op een weerstandsthermometer ongeveer dezelfde waarschijnlijke fout heeft als een enkele bepaling met den waterstofthermometer en in den regel tot op een bedrag dat minder blijft dan 0°.02 kan worden vertrouwd.

Voorshands is dus de nauwkeurigheid van de bepaling van een langen tijd standvastig gehouden temperatuur door den waterstofthermometer, gelijk te stellen aan die van het vastleggen van eene

---

1) Voor kleine veranderingen in de calibratie van $Pt_{III}$ en $Pt_V$ verwijzen wij op Comm. N°. 99*b*, waar ook de nulpunten opgegeven zijn. De veranderingen zijn het gevolg van een meer nauwkeurige bepaling van de verhouding der armen van de WHEATSTONE-brug en van den weerstand der toeleidingsdraden. De nulpunten bleken bij waarnemingen, die zich van 1905—1907 uitstrekken, tot op minder dan $\frac{1}{20000}$ onveranderd (verg. ook Med. N°. 99*b*).

2) In Med. N°. 95*e* § 7 werd voorloopig als punt van uitgang genomen, dat de fout in de instelling van den waterstofthermometer te verwaarloozen was.

3) Deze getallen wijken wegens onbeduidende later vastgestelde bankcorrecties iets af van de opgaven in Tabel III van Comm. N°. 95*d*.

temperatuur door den weerstandsthermometer, waarbij de noodige aflezingen echter, ook wanneer zij herhaald worden, in korteren tijd kunnen afloopen.

§ 5. Volgens § 3 moeten de waarnemingen van 30 Juni en 6 Juli '06 verworpen worden. Zij zijn gebruikt voor de calibratie van het thermo-element en den weerstandsthermometer van Med. N$^{os}$. 95$^a$, 95$^c$ en 95$^f$ (Nov. 1906) en de getallen — 217°.411 en — 182°.75 van tabellen VIII van 95$^a$, I, II van 95$^c$ en IX van 94$^f$ moeten dus gewijzigd worden.

De bepaling van 30 Juni '06 bij — 183° geeft met die van 25 Mrt. '07, die de eenige is van de vereischte betrouwbaarheid, een merkbaar verschil. In waarneming 11 van tabel VIII dient derhalve — 182°.75 vervangen te worden door — 182°.79 en een analoge verandering dient in tabel I, II en IX te worden aangebracht.

In plaats van de op — 182°.75 van tabel II betrekking hebbende getallen krijgt men nu:

TABEL II. Waarden voor — 183° in plaats van die van tabel II van Med. N$^0$. 97$c$.

| $t$ | Aantal waarn. | $W-R_{AI}$ | $W-R_{AII}$ | $W-R_B$ | $W-R_C$ |
|---|---|---|---|---|---|
| —182.79 | 2 | —0.008 | +0.048 | +0.104 | —0.014 |

De aansluiting is dus belangrijk verbeterd, daar $W-R_{AI}$ van — 0.029 tot — 0.008 veranderd is.

In de tabellen VIII van 95$^a$ en IX van 95$^f$ worden de drie temperaturen — 183°, welke tot een gemiddelde zijn vereenigd alle met 0°.04 verlaagd. $W-R$ wordt daardoor 0.0008 minder en de aansluiting wordt even zooveel beter.

Wat de bepaling van 6 Juli '06 betreft is de wijziging zeer gering. In tabel VIII van 95$^a$ en IX van 95$^f$ komt dientengevolge geen verandering als deze laatste bepaling bij het middelen wordt weggelaten, in tabel I en II komt ze niet voor.

In verband hiermede en het in noot 1 bij § 13 van Med. N°. 95$^a$ gezegde, is een nieuwe berekening niet uitgevoerd.

Als aanvulling van kolom 2 en 3 van Tabel I tot eene volledige calibratie van $Pt_I'$ kan $Pt_I$ in Tab. V van Med. 99$^b$ met het nulpunt 135.438 Ω dienen (verg. noot 1 bij § 4), waarbij dan te voegen de correcties Tab. XVIII van Med. 97$^b$.

**Natuurkunde.** — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. N°. $101^b$ uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: „H. KAMERLINGH ONNES *en* C. BRAAK: *Over het meten van zeer lage temperaturen. XVIII. Bepaling van het absolute nulpunt volgens den waterstofthermometer van constant volume en herleiding van de aflezingen op den normalen waterstofthermometer tot de absolute schaal.*"

§ 1. *Bepaling van het absolute nulpunt.*

Op dezelfde wijze als D. BERTHELOT [1]) de waarnemingen van CHAPPUIS omtrent de spanningscoëfficienten tusschen 0° en 100° en de hellingen der $pv$ lijnen bij 0° en 100° heeft gebruikt om den gemiddelden relatieven spanningscoëfficient van 0° tot 100° af te leiden, die het onderzochte gas voor dichtheden in den toestand van AVOGADRO, (zooals wij kortheidshalve dien zullen noemen, bij welken de afwijkingen van de wet van BOYLE-GAY-LUSSAC-AVOGADRO verwaarloosd kunnen worden), zou bezitten, kunnen ook de gegevens van Med. N°. $100^b$ en Med. N°. 60 (Juni 1900) hiertoe worden gebruikt.

Berekenen wij den spanningscoëfficient van den waterstofthermometer voor een nulpuntsdruk van 1090 mm. en een dichtheid van 1.44 uit Med. N°. 60 (zie § 1 van Med. N°. $97^b$ XV) op 0.0036629 dan laat zich de bedoelde spanningscoëfficient voor den toestand van AVOGADRO, dien wij door $\alpha_{AV}$ voorstellen, uit de gegevens van Med. N°. $100^b$ voor $B_A$ voor 0° en 100.°20 berekenen, door middel van de formule:

$$100 \times 0.0036629 = \frac{A_{A_0} \times 100\,\alpha_{AV} + (B_{A_{100}} - B_{A_0})\,\frac{1090}{760}}{A_{A_0} + B_{A_0}\,\frac{1090}{760}} \quad . \quad (1)$$

waarin in plaats van de in § 3 van Med. N°. $100^b$ gevonden waarde van $A_{A_0}$ een meer nauwkeurige waarde:

$$A_{A_0} = 1 - B_{A_0} - C_{A_0} = 0.999419$$

dient te worden genomen en $B_{A_{100}}$ door interpolatie uit $B_{A_0}$ en $B_{A_{100}}$ is afgeleid.[2]) Voor den gevraagden spanningscoëfficient vindt men hieruit:

$$\alpha_{AV} = 0.0036619.$$

Het omgekeerde hiervan geeft de temperatuur van het vriespunt op de absolute schaal gemeten. Dit is derhalve:

---

[1]) Sur les thermomètres à gaz. Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et des Mesures, T. XIII.

[2]) In formule (1) is de kromming der $pv$-lijnen buiten rekening gelaten, hetgeen geoorloofd is.

$$T_{0^\circ C.} = 273^\circ.08\ K$$

met $^\circ K$ (KELVIN) aanduidende graden op de absolute schaal waarvan er 100 tusschen het vriespunt en het kookpunt van water worden gevonden.

De nauwkeurigheid der gegevens is niet groot genoeg om de laatste decimaal op minder dan een eenheid vast te stellen. [1]), [2]). De gevonden waarde komt zeer goed overeen met die welke uit de meest vertrouwbare gegevens van andere waarnemers kan worden afgeleid [3]).

De methode, die wij hier hebben gevolgd, namelijk den spannings-coëfficient voor oneindig kleine dichtheden af te leiden met isotherme-bepalingen bij drukken tusschen 25 en 50 atmosferen, verdient de voorkeur boven het aanwenden van de gegevens van CHAPPUIS eenerzijds of die van AMAGAT anderzijds. Bij de eerste kan weliswaar de coëfficient $C$ zonder fout verwaarloosd worden, maar het geringe drukverschil heeft op de bepaling van $B$ een nadeeligen invloed. Daarentegen hebben bij grootere drukken, zooals bij de bepalingen van AMAGAT de coëfficienten $C$ en hoogere te grooten invloed om de waarde van $B$ nauwkeurig af te leiden. Bij onze bepalingen komt $C$ nog zoo weinig in aanmerking, dat een fout in de schatting van $C$ voor de bepaling van $B$ verwaarloosd kan worden.[4])

---

[1]) Op een kleine systematische afwijking tusschen de isothermen van waterstof bij 20° volgens Med. N⁰. 70 (Juni 1901) en die bij 0° en 100° van Med. N⁰. 100*b* zal bij de discussie der isothermen worden teruggekomen. Zij wijst eerder op $T_{0^\circ C.} = 273^\circ.07\ K$.

[2]) Wij stellen ons voor deze waarde nog nader vast te stellen met stikstof en helium door middel van bepalingen van isothermen bij 0° en 100° en van spanningscoëfficienten tusschen 0° en 100°, waarbij volgens Med. N⁰. 60 (de bepaling met $H_2$ wordt eveneens herhaald) wordt te werk gegaan, echter ter verkrijging van een hoogere nauwkeurigheid (aangegeven door die welke thans bij de isothermebepalingen is bereikt) met een reservoir van 300 $cm^3$.

[3]) Zie hierover de noot bij § 2. XIV van Med. N⁰. 97*b*.

[4]) Indien bijv. in de aanname van $C_A$ een fout is gemaakt van 15⁰/₀, hetgeen tevens met het oog op de gegevens van tabel XXII van Med. N⁰. 100*a* voor lagere temperaturen, toch zeker wel de bovenste grens voor de fout zal insluiten, dan is dit slechts 0.0000001, hetgeen in aanmerking nemende dat de grootste dichtheid, die bij de bepalingen van Med. N⁰. 100*b* voorkomt ongeveer 50 maal de normale bedraagt, bijv. voor 0° een fout in $B_A$ zou meebrengen, die beneden 0.000005 blijft. Daar een dergelijke systematische fout op bijna dezelfde wijze de waarde van $C_{A.100^\circ}$ zal veranderen, zal de fout in dit verschil veel geringer zijn en kan bijv. de fout hierdoor veroorzaakt in het verschil van $B_{A.0^\circ}$ en $B_{A.100^\circ}$ op 0.000001 worden geschat, zijnde $\frac{1}{5}$ van de fout in de absolute waarde van $B_A$. De fout in het absolute nulpunt door deze beide invloeden te samen blijft beneden 0°.01.

Terwijl derhalve de invloed van fouten in $C_A$ verwaarloosd kan worden, staat hier tegenover dat de drukkingen toch zoo groot zijn, dat een fout in den voor de dichtheid 1.44 aangenomen spannings-coëfficient ongeveer tot $\frac{1}{25}$ verkleind in de waarde van $B_A$ overgaat. Op deze wijze zijn derhalve verkregen gegevens bij tamelijk groot drukverschil, waaruit $B_A$ ondubbelzinnig kan worden bepaald.

§ 2. *Herleiding van de aflezingen op den normalen waterstof-thermometer tot de absolute schaal.*

Met formule (3) van § 2 van Med. N°. 97*b* werden met de nieuwe waarden van $B'_T$ (zie formule (2) van § 2 Med. N°. 97*b*) die zich uit de gegevens van tabel XXII laten berekenen, opnieuw de correcties van de aflezingen van den waterstofthermometer van constant volume tot de absolute schaal bepaald. Hiervoor werd van de individueele viriaalcoëfficienten uitgegaan en niet zooals in Med. N°. 97*b* van een algemeene temperatuur-formule, aangezien het verloop der afzonderlijke isothermen nu met voldoende zekerheid is vastgesteld om een dergelijke voorafgaande vereffening overbodig te maken.

Voor $B'_0$ en $B'_{100}$ werden andere waarden aangenomen dan in Med. N°. 97*b*. Namelijk werd gebruik gemaakt van de uitkomsten verkregen door directe bepalingen van isothermen bij 0° en 100°, waarvan de resultaten in Med. N°. 100*b* werden medegedeeld. Deze waarden zijn :

$$B'_0 = 0.0005807 \qquad B'_{100} = 0.0006321$$

verder werd voor het absolute nulpunt aangenomen

$$t = -273°.08 \text{ C.}$$

TABEL XXV. $H_2$. Correcties tot de absolute Schaal.

| $t_s$ | $\theta$ | $B'_T \cdot 10^3$ | $\Delta t_s$ | $\Delta t$ | $(W\text{-}R) \times 10^3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| — 103°.56 | — 1ι3°.54 | + 0.394 | + 0.017 | + 0 016 | 0 |
| — 139°.87 | — 139°.84 | + 0.229 | 0.029 | 0.026 | — 1 |
| — 164°.13 | — 164°.09 | + 0.018 | 0.043 | 0.039 | + 1 |
| — 182°.80 | — 182°.75 | — 0.241 | 0.056 | 0.051 | + 3 |
| — 195°.26 | — 195°.20 | — 0.432 | 0.059 | 0.054 | — 3 |
| — 204°.69 | — 204°.62 | — 0.692 | 0.069 | 0.063 | — 2 |
| — 212°.81 | — 212°.73 | — 1.009 | 0.079 | 0.072 | + 1 |
| — 217°.40 | — 217°.32 | — 1.203 | + 0.083 | + 0.076 | + 1 |

in de vorige § uit dezelfde isotherme-bepalingen afgeleid. De uitkomsten zijn in vorenstaande tabel vereenigd op de wijze van tabel XVI van Med. N°. $97^b$.

De verschillen met de vroegere waarden blijven niettegenstaande van geheel verschillende gegevens is gebruik gemaakt ver binnen de grenzen der nauwkeurigheid in § 3 (loc. cit.) opgegeven. De coëfficienten van de aldaar gegeven formule worden nu:

$$a = -0.007117$$
$$b = +0.005962$$
$$c = -0.000185$$
$$d = +0.001330$$

Met deze formule zijn de temperaturen van de tweede kolom bepaald. De verschillen tusschen de gegevens van de voorlaatste kolom met de formule zijn in de laatste kolom opgenomen.

Voor $-273°$ geeft de nieuwe formule dezelfde waarde als de vroegere van Med. N°. $97^b$ n.l. $\Delta t = +0°.14$, voor 0° en +100° geeft ze $\Delta t = 0°$. Voor de temperaturen tusschen 0° en 100° geeft de formule veel grootere negatieve waarden dan door BERTHELOT met zijne toestandsvergelijking zijn afgeleid (loc. cit. IX). Voor 20°, 50° en 80° wordt gevonden:

volgens BERTHELOT

$\Delta t = -0°.00046 \qquad -0°.00053$ en $0°\,00033$

volgens onze formule

$\Delta t = -0°.0012 \qquad -0°.0020$ en $0°.0014$

Volgens de vroeger afgeleide algemeene toestandsvergelijking van waterstof (zie § 1 Med. N°. 97*b*) zouden deze waarden zijn respectievelijk

$-0°.0026$ , $-0°.0047$ , $-0°.0036$.

**Natuurkunde.** — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. N°. $102^a$ uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: H. KAMERLINGH ONNES. „*Isothermen van één-atomige gassen en hunne binaire mengsels. I. Isothermen van helium tusschen* +100° *C. en* —217° *C.*".

(Zal in het verslag der volgende vergadering verschijnen).

**Natuurkunde.** — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. N°. $102^b$ uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: H. KAMERLINGH ONNES. „*Over het meten van zeer lage temperaturen.* XIX. *Herleiding van de aflezingen op den normalen heliumthermometer tot de absolute schaal.*"

(Zal in het verslag der volgende vergadering verschijnen).

**Wiskunde.** — De Heer SCHOUTE biedt voor de Werken der Akademie eene verhandeling aan van hemzelven en Mrs. A. BOOLE STOTT: "*On the sections of a block of eight cells by a space rotating about a plane.*"

De vergadering wordt gesloten.

---

ERRATUM.

In het verslag der vergadering van Juni 1907:

p. 166 r. 10 v. o. i. p. v. 300.000 leze men 30.000.

---

**(11 December 1907).**

H

BOEKDRUKKERIJ
DE ROEVER KRÖBER & BAKELS
AMSTERDAM.

